QUARKS AND LEPTONS

クォークとレプトン

——現代素粒子物理学入門——

F. ハルツェン・A. D. マーチン 共著

小林 澈郎・広瀬 立成　共訳

培風館

ネリーとペニーへ,
レベッカ, ロバート, ラチェル, デヴィドへ

QUARKS & LEPTONS
An Introductory Course in Modern Particle Physics

by
Francis Halzen, Alan D. Martin

序　　文

この 20 年間，素粒子物理はドラマティックな進歩をとげた。一連の重要な実験的発見は，クォークやレプトンという，原子核より下の階層の要素が存在することを確認した。原子核を作っている陽子や中性子 (核子) は，もはや素粒子とはみなすことができず，クォークから作られていることがわかった。すなわち，分子→原子→原子核→核子という系列に加えて“もう 1 つ物質構造の階層”が存在するのだ。しかし，素粒子物理学で，われわれが現在味わっている幸福感は，この注目すべき発見をはるかにしのぐ。荷電粒子の電磁相互作用を首尾よく記述することに成功した場の理論の拡張によって，クォークとレプトンの力学（ダイナミクス）が記述できる，ということが現実になったのはエキサイティングだった。もう少しくわしくいうと，基本的な相互作用は，局所的ゲージ対称性を持った場の量子論によって記述されるということが広く信じられているのである。本書の目的の 1 つは，このゲージ理論の驚くべき美しさと偉力を一目読者に伝えることである。クォークとレプトンを議論し，ゲージ場の量子 (光子，グルーオンおよび弱ボソン) の交換によって，クォークとレプトンがどのように相互作用するかを明らかにしよう。

弱ボソンの存在と陽子の安定性に関する当面の問題が間もなく実験的に決着がつく，というきわどい時期に本書が書かれつつあったことはよくわかっている。したがって，本書の中の何節かは，十分注意して読まなくてはいけない。今日有望そうに思われる理論も，明日の理論の効果（エフェクティブ）的現象論にすぎないかもしれない，ということを胆に銘じておく必要がある。しかし，ゲージ理論にこれ以上の言い訳は不要であろう。

われわれは読者に，物質の本性を解明すべく実験による攻撃を加えている現状を理解し，現在行われているさまざまな理論的考察を評価するのに十分な知

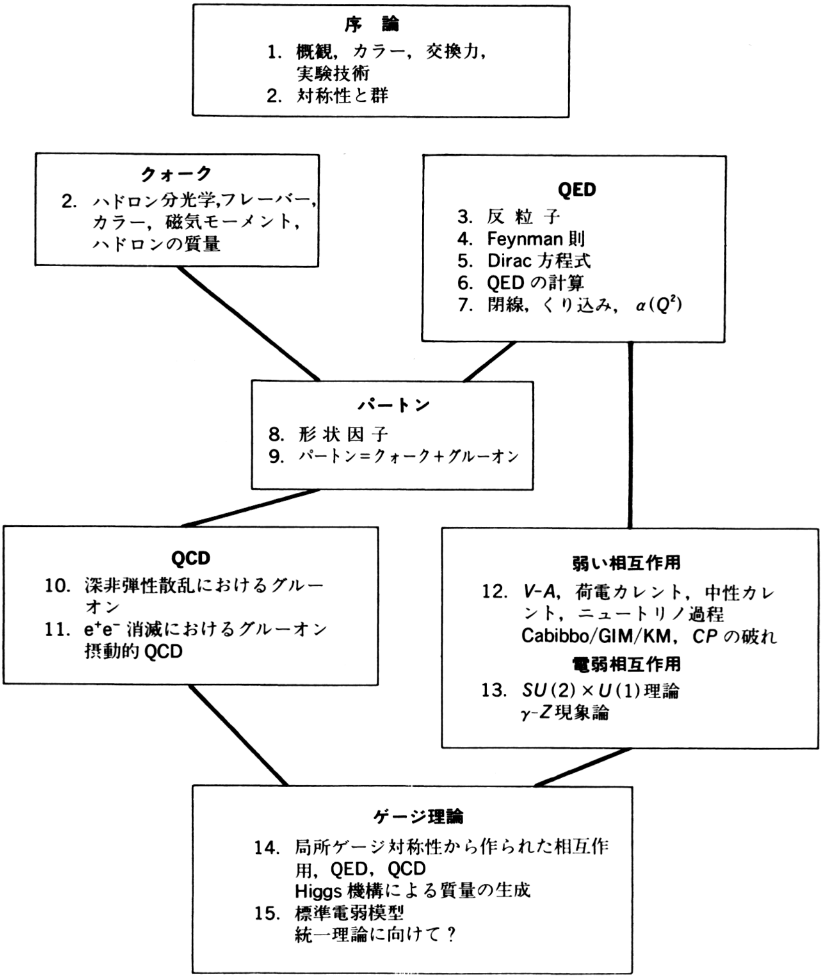
識を提供しようとつとめた。必要な知識の核心は，レプトンとクォークの電磁相互作用と弱い相互作用を記述する標準電弱模型，およびクォークとグルーオンの強い相互作用を記述する量子色力学（QCD）である。本書の第一の目的は，できるだけ簡単な方法でそのアイディアを紹介することである。非相対論的量子力学と特殊相対性理論に関する基本的知識だけを前提にする。量子電気力学（QED）の導入に十分時間をかけ，Feynman 則に馴れて，それを使いこなせるようにする。その手法は，引き続き量子色力学と弱い相互作用に一般化して，応用することができる。

本書は教育的な面に重点を置いた。それにはいろいろな意味がある。１つ１つの主題について完璧を期そうとはしなかった。多くの例題は，教育的価値を重視するという観点だけから選び，歴史的重要性は配慮しなかった。したがって，原著論文は参考文献に挙げないで，可能なかぎり，単行本と関連する総合報告論文を挙げておいた。もちろん，こういう選択をしたので，最初の発見に関してはあまり神経質に考えなかった。巻末に，本書と補足的に読んでいただきたい本や論文の一覧表を掲げておく。もちろん，学生諸君には，その本や論文に引用されている原論文を読むことをおすすめする。実験の学生にも理論の学生にも直接関心がある題材を提供するのにはだいぶ苦労した。野心的な理論家は，理論形式の深遠な美しさが公正に書かれていない，と感ずるだろうし，一方，実験家は当然，実験的発見の役割が十分強調されていないと文句をつけるかもしれない。幸い，すぐれた本や総合報告がたくさんあるから，本書とは違った流儀のもののガイダンスをしておけば，上に述べたような欠点は救われるであろう。

本書は，もともと素粒子物理学の入門として書かれたものであるが，下に列挙するように，実際に教える場合には内容に関していろいろ選択の自由があるだろう。次頁に付した流れ図は，各章で取り扱われる内容を示したものである。

A. １つの教え方は次のような確信に基づくものである。すなわち，現代の素粒子物理学，あるいは少なくともそのある部分はしばしば現象論的に成功を収めているので，原子物理学のようなずっと伝統的な主題とともに，量子力学特論の講義にふさわしい題材である。こういう目的には，第３章から第６章までを，第 12 章と第 14 章の一部から選んだ例題で補って教えることをおすすめする。

B. 学部の講義で，QED の Feynman 則の入門には第３章から第６章までを。



C. 量子色力学の入門には第 3 章から第 11 章までを。

D. 弱い相互作用と電磁相互作用の講義は，第 3 章から第 6 章までと第 12 章，第 13 章でよい。場合により，第 14 章と第 15 章で補足するのがよいかもしれない。

E. 標準的な素粒子物理学入門の講義では，この教科書全部をくわしくやれないかもしれない。その場合は，第 7, 10, 11, 14, 15 章は一部分，あるいは全部やらなくてもよい。

練習問題は第7章以外の各章につけた。問題の中のあるものは，教科書中の議論の一部としてそれを補う形になっている。問題の中で，教科書中の議論ととくに関係が密接なものについては，巻末に略解を記しておいた。

本書は，Durham 大学と Wisconsin 大学の学生諸君と友人たちの励ましによって次第に形をとり，書き上げられたものである。多くの同僚諸氏から貴重な助力を頂いた。とくに Peter Collins と Paul Stevenson には負うところが多い。2人は原稿全部を通読して，数えきれぬほどの改善をして下さった。原稿のその他の部分で貴重なコメントを頂いた同僚諸氏，とくに D. Bailin, V. Barger, U. Camerini, C. Goebel, K. Hagiwara (萩原 薫), G. Karl, R. March, C. Michael, M. Pennington, D. Reeder, G. Ross, D. Scott, T. Shimada (島田 徳三), T. D. Spearman, B. Webber にもお礼を申し上げる。面倒な原稿をみごとにタイプして下さった Vicky Kerr および Linda Dolan にお礼を申し上げたい。おかげでわれわれの仕事がずいぶん楽に進められた。

英国 Durham にて
1983年 1月12日　　　Francis Halzen, Alan D. Martin

日本語版への序文

本書は，今日，素粒子物理学で用いられている手法と，とくに，この世界を支配する $SU(3)\otimes SU(2)\otimes U(1)$ ゲージ対称性によって規定される，ゲージ相互作用をしているクォークとレプトンの標準模型に対する入門書である。1983 年 1 月，本書の原稿を出版社に送ったちょうど 2 週間後，われわれは陽子・反陽子衝突で作られた粒子群中に，荷電弱ボソン $W^{\pm}$ の最初の実験的証拠を発見したことを報ずる論文の下書きを CERN から受け取った。少しおくれて，春には中性の相棒 Z^0 ボソンが発見された。弱ボソンの諸性質が次第に高い精度でわかってきたのであるが，本書を書きかえる必要がなかったということは，標準模型のドラマティックな確証であった。本書の出版以来，量子色力学も，定性的段階から定量的段階へと急速に変化していった実験的検証にみごとに耐えて生き残っている。

この日本語版が出版される時期は，陽子崩壊はもちろんのこと，新世代の電子・陽電子コライダーを用いて，標準模型の彼方へと新しい攻撃を挑もうという戸口に立っている時期である。TRISTAN および加速器によらないいくつかの先端的実験によって，日本は新しい進展に積極的な役割を果そうとしている。これらの実験が，われわれに新しい発見をもたらし，標準模型を "低エネルギー現象論" に変えるような，より深い洞察を与えてくれることを望みたい。

私どもの本が，宇宙線実験や加速器実験によって，素粒子物理学に重要な寄与をし，また，真に歴史的貢献というべき業績を通して理論の進展に寄与した物理学者たちの母国語に翻訳されることは非常にうれしいことである。また，とくにうれしいのは，日本語が，私どもの何人かの研究協力者の国語であり，たくさんの友人の国語だからである。有難いことに，二人の友人がこの教科書の翻訳の労をとって下さった。著者として，活発な研究者であるお二人によっ

てこの日本語訳ができたことに感謝したい。

1985年10月21日　　Francis Halzen，Alan D. Martin

目　　次

1

素粒子物理学概観

1.1　世界は何からできているのか？

この疑問に答えようとするもっとも野心的・組織的な努力を，今日の素粒子物理学の研究にみることができる。この謎に対して大昔からいろいろな解答が与えられたが，ミレトスの Anaximenes (アナクシメネス) の考えもその 1 つである (図 1·1 参照)。それから 25 世紀を経て Mendeleev が到達した答えを，今ではだれもが知っている：すなわち周期表である。それは図 1·1 のある種の拡張であるが，そこには 100 種類をはるかに越える化学元素が含まれている。物質の基本構造についての Anaximenes の模型は，構成要素の単純さと経済性という点で，明らかに，概念の上では優れたものであった。だが，その模型は，決定的な問題をはらんでいる。それは間違っているのだ！　Mendeleev の答えは正しい。しかし，それを "最終的" あるいは基本的な解答とするには，あまりにも複雑すぎる。元素の多様性と周期表の構成にはっきりと現れている系統性は，下部構造の存在を強く示唆している。われわれは今では，周期表の元素が，より基本的な要素――電子と原子核――から構成されていることを知っている。

"世界は何からできているのか" に対する現代の解答を，表 1-1 に示そう。それは，Anaximenes の見解にみる，概念の単純さを備えていると同時に，Mendeleev の提案のように，真に定量的であり実験事実ともよい一致を示す。表 1-1 の解答は，原子，原子核，宇宙線，高エネルギー物理学の分野を含む一連の実験を通して，一歩一歩引き出されてきた。このような実験は，今世紀中頃からはじまったが，われわれを直接クォーク・レプトン・ゲージボソンの世界へ導いたのは，ここ 10 年間にわたる一連の非常に重要な発見であった。以前には，この描像 (表 1-1) は，物質の基本構造の謎を解き明かすために提案された多くの発想の 1 つにすぎなかった。

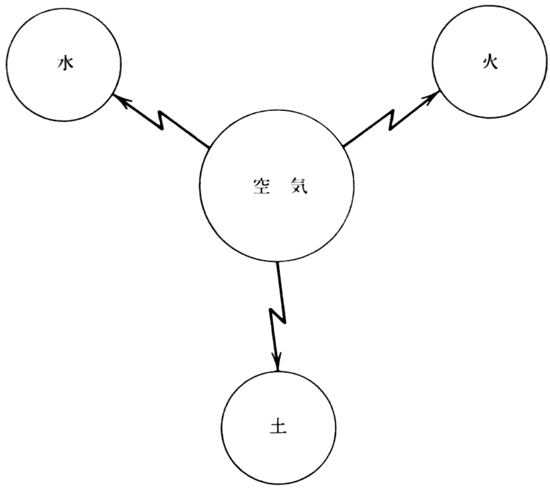


図1·1　Anaximenesのもとの考えでは，物質のすべての形態は，空気を濃縮したり希薄にしたりすることによって得られた。後になって，図に示す4つの要素を用いて"化学"が作られた。

表1-1　素粒子の構成要素とその量子数†

名　称	スピン	バリオン数 B	レプトン数 L	電　荷 Q
クォーク				
u(アップ)	1/2	1/3	0	+2/3
d(ダウン)	1/2	1/3	0	−1/3
レプトン				
e(電　子)	1/2	0	1	−1
ν(ニュートリノ)	1/2	0	1	0
ゲージボソン				
γ(光　子)	1	0	0	0
$W^{\pm}$, Z(弱ボソン)	1	0	0	±1, 0
g_i ($i=1,\cdots,8$ グルーオン)	1	0	0	0

†　スピンは$\hbar$の単位で与えられる。電荷の単位は，電子の電荷が −1 となるように定義する。表にはクォークとレプトンの反粒子 [$\bar{u}$, $\bar{d}$ (反クォーク)，e^+ (陽電子)，$\bar{\nu}$(反ニュートリノ)] は示していない。反粒子は第3章で定義するが，ここでの目的のためには，反粒子とは対応する粒子の量子数，B，L，Q の符号を反転させ，それ以外の性質は粒子と同じ，と考えておいてさしつかえない。たとえば $\bar{u}$ は，$B=-1/3$，$L=0$，$Q=-2/3$，そして e^+ は $B=0$，$L=-1$，$Q=+1$ である。

周期表の規則性は原子核への，さらに陽子・中性子(これを合わせて核子と呼ぶ)と呼ばれる素粒子への飛び石となった。核子は強い力，すなわち，核力によって“のりづけ”され原子核を作っている。さらに，核子は，電磁力を通して電子と結合し，化学元素の構成要素となる原子を形成する。弱い相互作用によって中性子は陽子に変わる。これが原子核の放射性β崩壊で，電子と反ニュートリノを伴って，中性子がゆっくり陽子に崩壊する過程である。この点で，世界は表1-1と非常によく似ている。ただし，核子p, nが表のクォークu, dの役割を演じているが。

ところで，中性子と陽子は孤独ではなかった。つまり，それらは，**バリオン**と呼ばれる強い相互作用をするフェルミオン(Fermi粒子)状態のスペクトルに現れる，もっとも軽い粒子に外ならぬことがわかった。数えてみると最近では，バリオンの数は100近い。同じように，**メソン**と呼ばれる強い相互作用をするボソン(Bose粒子)も発見された。その中でパイオン(π中間子)は一番軽い。フェルミオン(ボソン)は，スピン$J=n(\hbar/2)$を持つ。ただしフェルミオン(ボソン)のnは奇(0および偶)数である。　強い相互作用をするすべての粒子——メソンとバリオン——を一緒にして“ハドロン”と呼ぶ。

いわゆる“素”粒子の増加は，粒子が持つ下部構造(クォーク)への道を示すものであった。周期表によって構造を持つ原子を議論したことが，そのまま繰り返されている。パイオンおよびその他すべてのハドロンは，クォークから作られているのだ。電子とニュートリノは，強い相互作用はしないのでハドロンではなく，**レプトン**と呼ばれる別のグループに属している。とくにニュートリノは弱い相互作用しかしないが，電荷を持つ電子は，弱い相互作用と電磁相互作用をする。レプトンの数はハドロンのように多くはなく，クォークとともに大きさのない点状の基本粒子として表1-1に直接出てきている。　パイオン，中性子，陽子などは，謎とされていた物質の窮極要素ではない。それらはクォークとレプトンの世界に存在する束縛状態という意味で，原子核や原子の仲間入りをした。

以上述べた概念的発展を定量的に計算できるような理論の枠組が必要になった。明らかにSchrödinger方程式は，中性子のβ崩壊にみられる粒子の生成・消滅を扱えないし，さらに，通常の宇宙線実験に現れるきわめて高速の粒子を記述することもできない。1930年代の初頭，電子と光子の電磁相互作用を記述する理論(量子電気力学)が登場した。それは，量子化され，相対論的に不変という望ましい内容を持っていた。理論の中にレプトンとともにクォークを組み

入れ，電磁気以外の相互作用も考慮することが本質的である。とはいえ，量子電気力学に代表される相対論的な量子場の理論が，素粒子物理学の計算可能な枠組であることに変わりはない。ごく最近の発展は，このような理論の中で特別な種類の理論——ゲージ理論——が適切であることを明らかにした。量子電気力学は，ゲージ理論のもっとも簡単な例である。クォーク・レプトンの弱い相互作用と強い相互作用は，ともにゲージ理論によって記述できると信じられている。すなわち，電弱統一模型と量子色力学である。

ゲージ理論の一般的な枠組の中で定式化された模型とアイディアが，新しい実験的情報と手をとりあって，数多くの成果を生み出す土壌を提供してきた。本書の目的は，近い将来に建設され，完成する新しい世代の加速器によって，未知のエネルギー領域に踏み込みつつある研究を読者に紹介することにある。これらの加速器は，精巧な粒子検出器とともに，それまでに知りえなかった物質のより微細な構造を探るのである。

1.2　クォークとカラー

核物理学に現れる核子がクォークとよばれる粒子から作られていることを示す多くの実験事実は，第2章でまとめることにしよう。バリオンは3つのクォークの束縛状態である。メソンはクォークと反クォークからなる。陽子は(uud)の束縛状態である。表1-1に示した2種類のクォーク u, d の加算的量子数は，陽子がバリオン ($B=1=1/3+1/3+1/3$) であり，レプトンではなく ($L=0$)，陽子の全電荷が1 ($Q=2/3+2/3-1/3$) という事実を正しく記述する。

同じ議論によって，中性子は(udd)の束縛状態と考えることができる。π^+ メソンは $u\bar{d}$ 状態：$B=L=0$ であり，電荷が1 ($Q=2/3-(-1/3)$) ということから，それはメソンである。ついでに，3つの量子数——電荷 Q，バリオン数 B，レプトン数 L——は単なる記号以上のものであることを注意しておく：それは保存する加算的量子数である。たとえば，素粒子反応 ($\pi^- p \to \pi^0 n$，$n \to pe^-\bar{\nu}$ など) は，始状態と終状態で B の値が等しいときにのみ起こる (L, Q についても同様)。よく使われる角運動量の合成則によって，核子の全スピン $J=1/2$ とメソンの $J=0$ は，その構成子 (クォーク) のスピン $J=1/2$ から作ることができる。クォーク模型は，ごく自然に，ハドロンをバリオン (3体クォーク，フェルミオン状態) とメソン (クォーク・反クォーク，ボソン状態) に分離する。

クォーク模型がたちまち成功を収めたのは，そもそもそれが純粋に理論的な性格を持っていたからであろう。陽子や中性子は，広がりと豊かなクォーク内部構造を持ったかなり複雑な対象である。一方，場の量子論は，点状の素粒子，すなわち電子のような内部構造を持たない対称を扱う。核子とは違って構造のないクォークこそ，場の量子論が記述できる基本的な実体なのだ。場の理論は，電子の性質や電磁相互作用を記述するのに大きな成功を収めてきた。クォークの導入は，この強力な理論的手法によって (電磁相互作用以外の) 他の相互作用をも解明する道を開いたのである。

しかし，クォーク模型を作るにあたって，次の論理的段階で困難が生じた：

$$\begin{aligned} p &= uud, \\ n &= udd, \\ \Delta^{++} &= uuu. \end{aligned} \tag{1.1}$$

ここで，配位 uuu は，Δ^{++} バリオンの電荷 2 を正しく記述している (Δ^{++} は，Fermi とその協同研究者によって 1951 年に発見された $\pi^+ p$ 共鳴)。そのスピン $J=3/2$ は，3 つの u クォークが基底状態にあるとして，u クォークのスピン 1/2 を加えたものである。つまり，クォーク模型によって Δ 粒子の性質 (電荷，スピン，…) を実現するには，3 つの同種フェルミオン u で完全対称な基底状態 uuu を作らなければならない。これはもちろん，Fermi 統計で禁止される。かりに，このような統計性の困難を無視したとしても，この素朴なクォーク模型では明らかに不満足であった。次章で示すように，qqq，$\bar{q}\bar{q}\bar{q}$，$q\bar{q}$ は，一連の観測されているバリオン，反バリオン，メソンを再現する。では，qq，$\bar{q}\bar{q}$ あるいは，単一のクォーク状態 q などの可能性はどうか。これまで，電荷 4/3 の uu 粒子は観測されていない。以上述べた 2 つの困難は，クォーク (レプトンではない！) に新しい性質，すなわち新しい量子数を与えることによって解決された。それが“カラー”である。つまり，クォークは三原色を持つと考える：赤，緑，青を R, G, B と表記する。

“カラー”はもちろん，日常生活に現れる色とは何の関係もない。カラーという言葉は，すべての色が三原色から作られるという類似性に基づいているにすぎない。(1.1) の Δ^{++} の波動関数を $u_R u_G u_B$ と書き直せば，同種のクォークで生じた統計性の困難が，明らかに克服されたことになる。Δ 状態を作る 3 つのクォークは，いまやカラー量子数によって識別できる。この解答はずるいようにみえるかもしれない。しかし読者は，その判定を第 10 章，14 章まで保留していただきたい。そこではじめて，カラー自由度がゲージ理論に関連して“物理的”

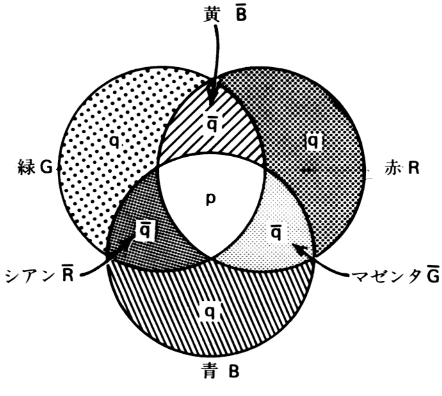
な意味を持つことになる。

もっとさし迫った問題がある。もし $u_R u_G u_B$ が Fermi が発見した Δ^{++} なら，陽子に対して $u_R u_G d_B$，$u_R u_G d_G$，$u_B u_R d_R$ など多数の状態が可能ではないか。だが，陽子状態はただ 1 つしかない。実験と矛盾しないためには，状態数を増やさずに，カラー量子数を導入しなければならないのである。それには，自然界に存在する素粒子はすべて "色のない状態"，すなわち "白色" であると要請する (もっと厳密には，R, G, B 空間での回転不変性の要請)。カラー量子数を直観的に表すのは容易だろう。図 1·2 のようにスクリーン上に投影した三原色，赤，青，緑の 3 つのスポットにクォーク の可能な 3 色を対応させる。反クォークの色は補色とする：シアン ($\overline{\mathrm{R}}$)，マゼンタ ($\overline{\mathrm{G}}$)，黄 ($\overline{\mathrm{B}}$)。 色の理論を知らないなら，補色を反赤，反緑，反青と考えておけばよい。反クォークの色は，図 1·2 のように，2 つの原色光が重なった場所にのみ現れる。こうすると，色 (クォーク) と補色 (反クォーク) を混ぜて色のない組み合わせ (白色) を作る方法は，次のように一義的に決まってしまう：

- 赤, 緑, 青を等量混ぜる (RGB)
- シアン，マゼンタ，黄を等量混ぜる ($\overline{\mathrm{R}}\overline{\mathrm{G}}\overline{\mathrm{B}}$)
- カラーとその補色を等量混ぜる ($\mathrm{R}\overline{\mathrm{R}}$, $\mathrm{G}\overline{\mathrm{G}}$, $\mathrm{B}\overline{\mathrm{B}}$)

この 3 つの可能性が，自然界で観測される粒子状態 (バリオン，反バリオン，メソン) に対応している。たとえば，

$$
\begin{aligned}
\mathrm{p} &= \text{“RGB”}, \\
\bar{\mathrm{p}} &= \text{“}\overline{\mathrm{R}}\overline{\mathrm{G}}\overline{\mathrm{B}}\text{”}, \\
\pi &= \text{“}\mathrm{R}\overline{\mathrm{R}}+\mathrm{G}\overline{\mathrm{G}}+\mathrm{B}\overline{\mathrm{B}}\text{”}.
\end{aligned}
\tag{1.2}
$$



p = “RGB”　　$\bar{\mathrm{p}}$ = “$\overline{\mathrm{R}}\overline{\mathrm{G}}\overline{\mathrm{B}}$”

π = “$\mathrm{R}\overline{\mathrm{R}}+\mathrm{B}\overline{\mathrm{B}}+\mathrm{G}\overline{\mathrm{G}}$”

図 1·2　ハドロンのカラー構成

いいかえれば，陽子は依然として，(1.1) のように (uud) 状態にあるが，(1.2) のクォークにはそれぞれ特定のカラーが与えられている。(1.2) で引用符をつけたのは，波動関数が正しく対称化・規格化されていることを忘れてはならないからである。第2章でこのことを実行し，事実 "RGB" の組み合わせが，クォークの Fermi 統計性から要請されるように，カラー指標の交換に対して反対称になっていることを示そう。

これまで議論してきたカラー量子数と現実の色の類似性は，完全なものではない。たとえば，3つの $q\bar{q}$ 状態 $\bar{R}R, \bar{G}G, \bar{B}B$ はいずれも無色であるが，観測にかかるメソンは，R, G, B カラー空間内の回転に対して不変な組み合わせ $\bar{R}R+\bar{G}G+\bar{B}B$ に限る。いいかえれば，"無色" はカラー群の1重表現を意味する。

以上の議論を簡単にまとめておこう。われわれは "隠れた" カラー量子数をクォークに与えた (量子力学でいう隠れた変数とは無関係である)。実験家の測定装置に飛び込んでくる粒子，すなわちクォークの束縛状態はすべて無色 (カラー1重状態) であるという意味で，カラーは世界から隠されている。

成功を収めたクォーク模型は Fermi 統計を破るようにみえるが，カラーはその困難を解決したばかりか，もっと多くの成果をあげた。RG, GB, … などの qq 状態は必然的に色を持つ。したがって，無色の束縛状態のみが存在するというわれわれのドグマによって qq 状態は禁止されるという点に注意しなくてはいけない。カラーの考えによれば，クォークの組み合わせ qqq, $\bar{q}\bar{q}\bar{q}$, $q\bar{q}$ だけが自然界で独自の役割を演じていることがわかる。クォーク自身は色を持つが，それはわれわれの視界から隠されているのだ。にもかかわらず，後で議論するように，ハドロンの内部にカラーが在存することを示す多くの実験事実がある。これでカラーの概念が持つもっとも深遠な意味を導入する準備が整った。

1.3 カラー：核相互作用の荷量

電磁気学の Maxwell 理論によれば，電子のような荷電粒子は，それが作る電磁場を通して互いに相互作用する。しかし，長い間，電荷間の遠隔作用がどのようにして生ずるのかわからなかった。荷電粒子は，作用を伝える実体がないのにどうして相互作用できるのか。場の量子論では，このような実体が存在する：自然界のすべての力は，粒子交換の結果生ずる。図1·3の点Aで，事象が発生したと考えよう。電子は光子 (電磁場の量子) を放出し，その結果，運動量を保存するため反跳を受ける。同時にエネルギーも保存させることが出来

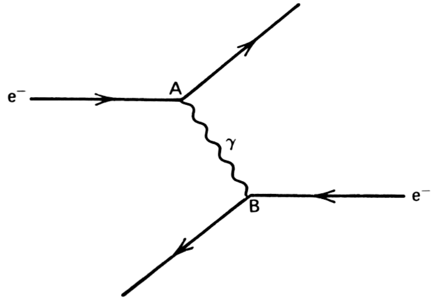


図 1·3　電子は，光子を交換して反跳を受ける。

ないことは明らかであるから，放出光子は実光子ではない。それは，"正しいエネルギーを持たない" 光子である。これを "仮想" 光子とよぶ (第 4, 6 章)。にもかかわらず，もし光子が十分短時間で再吸収されるかぎり，電子はこのような光子を放出できる。量子力学に固有の不確定性関係によって，光子は時間 $\Delta t \lesssim (\hbar/\Delta E)$ の間生きられる。ΔE は光子が "借用した" エネルギー，または電子が失ったエネルギーである。光子は同一電子ばかりでなく，図 1·3 のように別の電子に吸収されることもある。もう一方の電子は，点 B で仮想光子を吸収して反跳を受けるだろう。つまり，正味の効果は，2 つの電子が反発力を及ぼし合ったことになる。場の量子論では，このような粒子交換を 2 つの同種電荷間の Coulomb 斥力の原因と考える。

図 1·3 に示した力の直観的な描像は，斥力だけが粒子交換で記述できる，と思わせるかもしれないが，実はそうではない。仮想光子の運動量ベクトルは，かならずしも，古典物理学が予言するような向きを持たないので，仮想光子の衝撃は，場の量子論では正負いづれの符号もとりうる。だが，これはさほど驚くにあたらない。そもそも，図 1·3 の交換力についての議論はすべて，古典論では理解できないものなのだ。交換する "仮想" 光子は，他の点でも，ラジオ波のような自由に伝播する実光子とは異なっている。送信機の中の振動電流のエネルギーは，ラジオ波で運ばれる。仮想光子は，それを吸収・放出する電荷と無関係には存在できないのであって，不確定性原理によって許される距離 $c\Delta t$ しか動くことができない (c は光速度)。

以下では，荷電粒子の電磁相互作用を，図 1·4 (a) のように表現する (Feynman 図については，第 3 章前半を参照)。荷電クォークもまた，光子交換によって相互作用する。よく知られているように，ポジトロニウム (e^-e^+) は電磁相互作用で作られる。しかし，電磁相互作用は，クォークをハドロン内に束

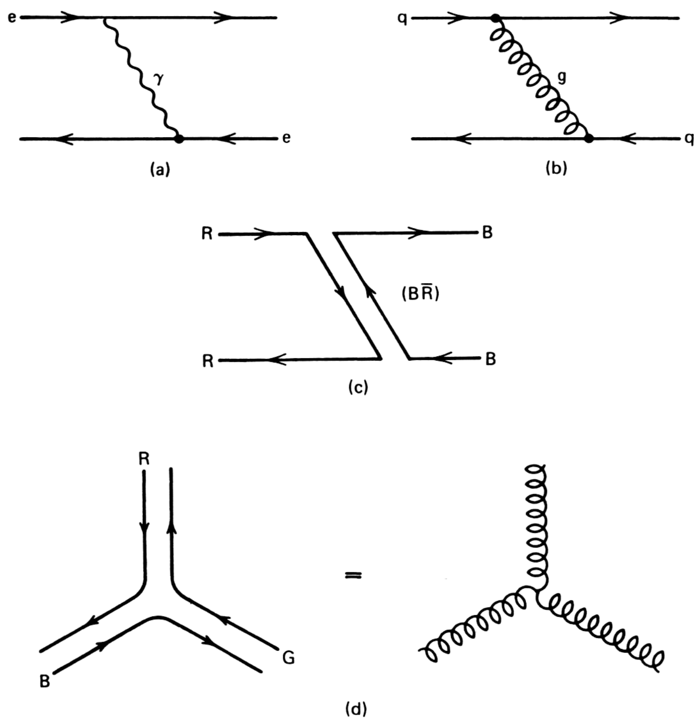


図 1·4　(a) 光子交換で引き起こされる電磁相互作用。(b) グルーオン交換による強い相互作用。(c) (b) におけるカラーの流れ。(d) グルーオンの自己結合。

縛することはできない。たとえば Δ^{++} 粒子の場合，3 つの (同じ電荷を持った) u クォークには電磁的な反発力が働くが，クォークをハドロン内に閉じ込めるためにそれ以上の "強い" 力が必要である。事実，カラー "荷" はこの強い束縛を可能にする新しいカラー場をクォークに与える。2 つのクォークは，図 1·4 (b) に示すように，仮想的な "グルーオン (膠着子)" の交換によって相互作用する。グルーオンは，カラー場の量子であり，クォークを核子内に，さらに核子を原子核内に束縛する。 図 1·4 (b) でカラーの流れを追ってみるとよい。 これを図 1·4 (c) に示す。左からやってきた赤色クォーク (R) は，右からやってきた青色クォーク (B) とカラーを交換する。クォークはカラーを交換して強い相互作用をする。ここで図 1·4 (b) と (c) を対応させてみよう。図 1·4 (b) でつる巻き線で示したグルーオンは，それ自身カラーを持っている。それは事実，

図 1·4 (c) で $(B\bar{R})$ と書いたように，２重カラー状態である。図 1·4 との類似性に基づいて，量子化された Maxwell 理論 (量子電気力学，QED と略記する) を手本にして，カラー力，強い力，核力——どう呼んでもいいが——の理論を作ることができる。こうして得られた理論は，量子色力学 (quantum chromodynamics，QCD と略記) と呼ばれる (第 10 章, 11 章参照)。

この理論は幸いなことに，QED と同じく，くり込み可能な (計算できる) ゲージ理論という特別な性質を共有している。その詳しい説明は第 14 章にゆずるとして，QCD の説明にあたり，もっと別の性質を述べておくべきだろう。また QCD の強い力の働き方は QED とは非常に違っていることも幸いしている。まず，図 1·4 (c) に示すように，９つの２重カラー状態が存在する：$R\bar{R}, R\bar{G}, R\bar{B}, G\bar{R}, G\bar{G}, G\bar{B}, B\bar{R}, B\bar{G}, B\bar{B}$. グルーオンは $B\bar{R}$ と表されており，BR でないことに注意。第 3 章でこれらの図について計算してみると，次の点が明らかになる：図 1·4 (c) で量子のカラー線の矢印が逆になっているのは，それがカラー・反カラーの組み合わせであることを示す。９つの組み合わせの中で，$R\bar{R}+G\bar{G}+B\bar{B}$ はカラー１重項になる (1.2 節参照)。それは正味のカラー荷を持たないから，１つのクォークから他のクォークへカラーを運ぶというグルーオンの役割を果たさない。量子色力学は電磁気学と似ているが，1 個の場の量子 "光子" のかわりに，8 個のグルーオンを含んでいる。グルーオン自身はカラー荷を担うので，図 1·4 (d) に示すようにグルーオンが別のグルーオンと直接相互作用することもできる。光子は電荷を持たないから，電磁気学ではそのような可能性はない。場の量子が自分自身と直接作用するような理論を "非 Abel (non-Abelian) 的" と呼ぶ (第 14 章参照)。

グルーオンの直接結合 (自己結合) の存在は，驚くほど深い意味を持つ。それは，QED と QCD の荷量の遮蔽効果の対比によって明らかになる。電気力学における電荷の遮蔽を図 1·5 で説明しよう。場の量子論では，１個の電子は，ただ電子１個ではない。——つまりある瞬間，電子は光子を放出できるし，その光子は続いて電子・陽電子対に消滅する。さらにこの電子・陽電子が光を放出する……。いいかえれば，場の量子論では，１個の電子といっても，いろいろな姿をとる。その例を図 1·5 (a) に示した。はじめにあった電子は e^-e^+ 対によって囲まれており，反対電荷は引き合うので，陽電子は一層電子の近くに引き寄せられる。したがって，電子は，正電荷が電子の近くへ引きつけられて，偏極した電子雲に囲まれている。　その結果，　図 1·6 に詳しく示すように，電子の負電荷が遮蔽されることになる。試験電荷を導入し，それに及ぼす Coulomb

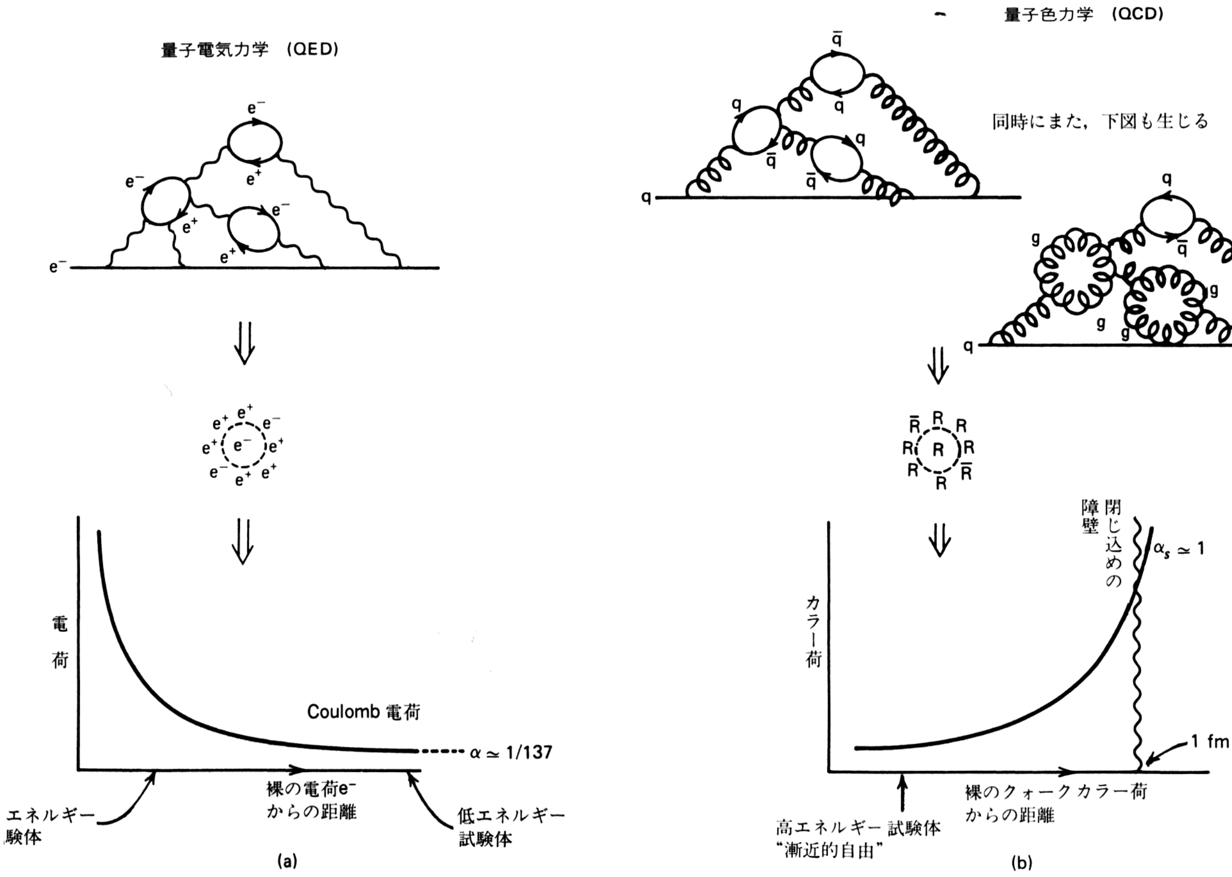


図1·5 場の量子論における遮蔽効果。(a) 電荷，(b) カラー荷

力を測定して，図1·6の中心にある電子の電荷を決定したい。結果は試験電荷をどこに置くかによって変わってくる。試験電荷を中心の電子に近づけると，電子を遮蔽していた陽電子の雲を通り抜けることになる。つまり，われわれは電子に近づくほど，大きな電荷を測定することになる。これを場の量子論では，電子のまわりの真空が偏極媒質になったと考える。この状況は誘電体中の負電荷の分極に似ている。図1·6の電子・陽電子対は，分極分子が誘電体の中で振舞うように，電子の存在に対して応答する。この効果は，電荷の遮蔽として知られている。その結果，"測定された電荷"はそれを測定する場所に依存する。これを直観的に示したのが図1·5(a)である。QEDでは電荷の変動は，電子のまわりの電荷雲の可能な配位をすべて考慮すれば計算できる。図1·5(a)にそのような配位の一例を示した(第7章参照)。

クォークのカラー荷についても，同じような計算ができる。かりに図1·5(b)の，グルーオンからグルーオン対が生じるような新しい配位がないとすれば，カラーの遮蔽は，電荷の遮蔽とまったく同じになるだろう。グルーオンは自分

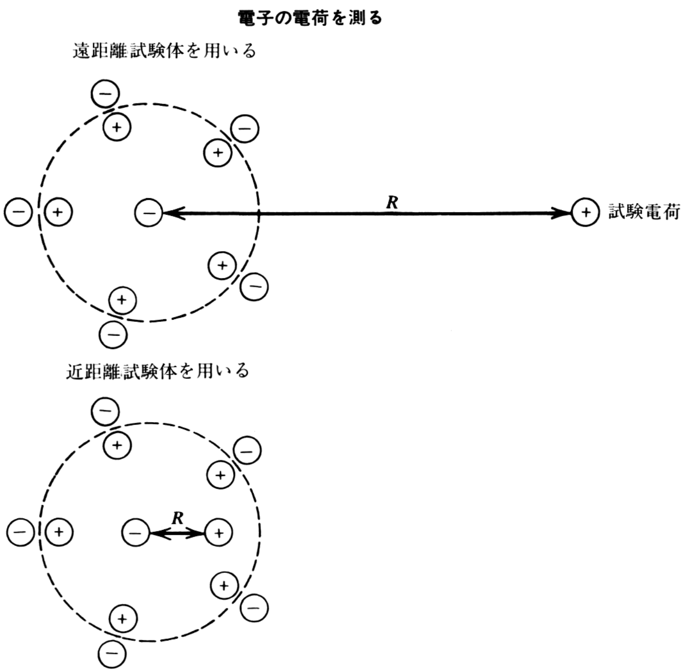


図1·6　電子の電荷を測定する。

自身がカラーを担い，クォークの有効カラー荷を広げる。つまり QCD では，上では考えなかった別の図が存在して，それによって量子電気力学のよく知られた結果が逆転する。図 1·5 (b) のように，赤のカラー荷のまわりには，赤のカラー荷が集まりやすい。そこで，図 1·6 の思考実験をカラー荷についてくり返してみる。試験体をはじめにある赤色クォークに近づけると，試験体の大半は赤カラー荷がつまった球を通りぬけていくが，中心に近づくにつれ試験体が感じる赤カラー荷の量は減少する。この結果生ずる赤カラー荷の"反遮蔽"を図 1·5 (b) に示す。これが"漸近的自由"(第 7 章参照) である。漸近的に，2 つの赤クォークは，(非常に近距離で) 弱くなったカラー場を通して相互作用し，本質的に相互作用しない自由な粒子として振舞う状態に近づく。読者は，なぜいきなりカラー理論の奇妙な性質を強調してきたか，不思議に思うかもしれない。しかし以後の議論からわかるように，QCD の定量的な計算を可能にしたのは，まさにこの漸近的自由なのである (第 10, 11 章参照)。

1.4 自然単位

ここで，これまでに進めてきた物理の議論を中断して，素粒子物理学にふさわしい単位を導入することにしよう。相対論的量子力学には，2 つの定数——Planck 定数 $\hbar$ と真空中の光速度 c ——が現れる：

$$\hbar = h/2\pi = 1.055 \times 10^{-34}\ \mathrm{J \cdot sec},$$
$$c = 2.998 \times 10^{8}\ \mathrm{m \cdot sec^{-1}}.$$

ここで，$\hbar$を作用 (ML^2/T) の単位とし，c を速度 (L/T) の単位とするような単位系をとるのが便利である。さらにエネルギー (ML^2/T^2) の単位を与えれば，単位系は完全に定義される。素粒子物理学では，エネルギーの単位として GeV ($1\mathrm{GeV} \equiv 10^9 \mathrm{eV}$) をよく用いる。陽子の静止エネルギーが約 1 GeV であることも，GeV を選んだ理由の 1 つである。

$\hbar = c = 1$ とすれば，公式の中で $\hbar$ と c を書く必要はないので，時間と労力の節約になる。公式の中に $\hbar$ と c が入っている場合，いつでも次元解析を使って計算をはっきりした形で遂行することができる。多少の怠慢は許していただいて，習慣的に質量 (m)，運動量 (mc)，エネルギー (mc^2) はすべて GeV で表し，長さ ($\hbar/mc$) と時間 ($\hbar/mc^2$) を GeV^{-1} の単位で測る。表 1-2 (a) に GeV 単位と MKS 単位を示し，表 1-2 (b) に便利な変換因子をまとめておく。

表 1-2 (a)　よく使われる質量，長さ，時間の単位と $\hbar=c=1$ のエネルギー単位で表した陽電子の電荷

	$\hbar=c=1$ 単位系	実際の単位
$1\,\text{kg}=5.61\times10^{26}\,\text{GeV}$	GeV	$\dfrac{\text{GeV}}{c^2}$
$1\,\text{m}=5.07\times10^{15}\,\text{GeV}^{-1}$	GeV^{-1}	$\dfrac{\hbar c}{\text{GeV}}$
$1\,\text{sec}=1.52\times10^{24}\,\text{GeV}^{-1}$	GeV^{-1}	$\dfrac{\hbar}{\text{GeV}}$
$e=\sqrt{4\pi\alpha}$	—	$(\hbar c)^{1/2}$

表 1-2 (b)　便利な変換因子

$1\,\text{TeV}=10^3\,\text{GeV}=10^6\,\text{MeV}=10^9\,\text{KeV}=10^{12}\,\text{eV}$
$1\,\text{fermi}\equiv1\,\text{fm}=10^{-13}\,\text{cm}=5.07\,\text{GeV}^{-1}$
$(1\,\text{fm})^2=10\,\text{mb}=10^4\,\mu\text{b}=10^7\,\text{nb}=10^{10}\,\text{pb}$
$(1\,\text{GeV})^{-2}=0.389\,\text{mb}$

問題 1.1　断面積は，しばしばミリバーン (mb) で表される。$1\,\text{mb}=10^{-3}\text{b}=10^{-27}\,\text{cm}^2$ である。GeV の単位を用いて

$$1\,\text{GeV}^{-2}=0.389\,\text{mb}$$

となることを示せ。

これまで，素電荷 e については考えなかった。e はたとえば，電子が電磁的に他とどのくらいの強さで相互作用するかを表す。この相互作用の強さを無次元量にするため，1 自然単位 $(\hbar/mc)$ だけ離れた場所にある 2 つの電子に働く静電エネルギーと，電子の静止質量エネルギーの比を考える。すなわち

$$\alpha=\frac{1}{4\pi}\frac{e^2}{(\hbar/mc)}\bigg/mc^2=\frac{e^2}{4\pi\hbar c}=\frac{1}{137}. \tag{1.3}$$

(1.3) では，電磁単位として有理 Heaviside-Lorentz 系を採用した。係数 4π は Maxwell 方程式ではなく力の表式に現れる。ε_0 は 1 とした。これは素粒子物理学では普通であり，Maxwell 方程式をもっとも単純な形にする。α の値はもちろん，すべての単位系で同じだが，e の値は異なる。

歴史的理由から，α は微細構造定数として知られている。あいにく，この名前は誤った印象を与える。すでにみてきたように，電子の電荷は厳密に一定ではなく，量子効果のために距離によって変化する。だから，α もまた変数とみな

さなければならない。1/137 という値は，図 1·5 (a) に示すように，α の漸近的な値である。

問題 1.2　$\hbar=c=1$ で電子の Compton 波長は m^{-1}，水素原子の Bohr 半径は $(\alpha m)^{-1}$，最低エネルギーの Bohr 軌道にある電子の速度は α となることを示せ。ここで，m は電子の質量，あるいは厳密には換算質量 $m_e m_p/(m_e+m_p)$ である。

問題 1.3　次の内容を説明せよ——電磁相互作用が弱い ($\alpha=1/137$) ので，水素原子はゆるい束縛状態で，広がった構造を持つ。非相対論的な Schrödinger 方程式は，原子のエネルギーレベルのおおまかな構造を記述するのに適している。

1.5　α は素粒子の相互作用に関係した唯一の荷量ではない

図 1·3 では，2 つの電荷間の電磁相互作用に対して，電磁場の量子 γ の放出・吸収という描像を与えた。いくつかのよく知られている電磁現象を，このような立場で解釈すると，その描像をいくらか定量化することができる。もし読者が，以下の議論のあいまいさを不愉快に感ずるなら，いわゆる Feynman 図の厳密な演算上の定義は，第 3 章から第 7 章までをみていただきたい。そこで Feynman 図は，その図の過程に対する確率振幅を表し，相対論的量子力学によって計算できることがわかる。最初の例として，光子の電子による Thomson 散乱を表す図 1·7 (a) の Feynman 図を考えよう。

長波長光子の場合には，断面積は

$$\sigma_{\mathrm{TH}}=\frac{8\pi}{3}\left(\frac{\alpha}{m_e}\right)^2=\frac{2}{3}\alpha^2(4\pi R_e^2) \tag{1.4}$$

で与えられる。ここで，R_e は電子の Compton 波長を自然単位で表したもので

$$R_e=\frac{\hbar}{m_e c}=\frac{1}{m_e}. \tag{1.5}$$

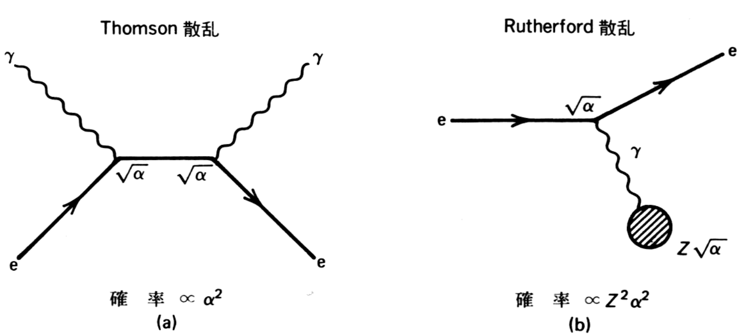


図 1·7　(a) Thomson 散乱，(b) Rutherford 散乱

Thomson 散乱の断面積が，量子電気力学と同様，古典的方法でも得られることは驚くにあたらない。事実，電子の電荷 $(-e)$ の定義に用いられるのは，この長波長極限である。それは，十分遠方から，低エネルギーの試験電荷によって探ったときの電荷 (すなわち α) の値なのである (図 1·5 (a) 参照)。

電磁相互作用のもう 1 つの例は，エネルギー E を持つ電子と電荷 Ze の原子核との Rutherford 散乱である。断面積は次の式で与えられる：

$$\frac{d\sigma_{\mathrm{R}}}{d\Omega}=\frac{Z^2\alpha^2}{4E^2}\frac{1}{\sin^4(\theta/2)}. \tag{1.6}$$

この過程を図 1·7 (b) の Feynman 図で表す。図 1·7 に示す 2 つの過程を用いて， α が電磁相互作用の強さの目安，あるいは粒子交換の言葉では，光子の吸収・放出の確率の目安である，という事実を説明しよう。Feynman 図で確率振幅を表したいと思えば，因子 e あるいは $\sqrt{\alpha}$ は電荷 e による光子の吸収・放出に関係する。図 1·7 (a), (b) を調べると，断面積 (1.4) には $(\sqrt{\alpha}\sqrt{\alpha})^2$ が，(1.6) には $(\sqrt{\alpha}Z\sqrt{\alpha})^2$ が現れていることが明らかになる。

このように考えて，Thomson 散乱にもどってみよう。ただし光子のビームを π メソンで置き換える。まず，(1.4) との類似から，陽子による長波長光子の散乱の Thomson 断面積は

$$\sigma_{\mathrm{TH}}=\frac{2}{3}\alpha^2(4\pi R_{\mathrm{p}}{}^2) \tag{1.7}$$

のようになる。ただし自然単位で $R_{\mathrm{p}}=1/m_{\mathrm{p}}$ である。アナライザーの光子ビームからみると，標的陽子の有効領域は $(4\pi R_{\mathrm{p}}{}^2)$，また α^2 は前と同様に光子の吸収・放出の確率である。係数 2/3 はここでの議論では重要ではない。それはスピン 1 の粒子に対して期待される 3 つの偏極状態のうち， 1 つが現れないという事実を反映している。

さて，光子ビームのかわりに π メソンを用いて陽子の半径の測定をくり返すと，π メソンと核子との結合 (放出・吸収) は電磁的ではありえないことがわかる (図1·8)。図 1·8 の反応過程に対し，ただちに断面積を書くことができる：

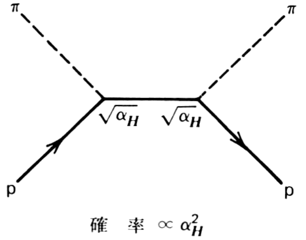


図 1·8　πp 散乱

$$\sigma_T(\pi p) = \alpha_H{}^2(4\pi R_p{}^2). \tag{1.8}$$

前と同じように，$4\pi R_p{}^2$ は標的の有効断面積，$\sigma_T(\pi p)$ の測定値は，1mb より十分大きい。この結果を，(1.7) のもっと小さな測定値 σ_{TH} と比べると，π メソンを吸収・放出する確率 α_H は，α より 2, 3 桁大きいと結論せざるをえない。すなわち

$$\alpha_H \sim (1 \sim 10). \tag{1.9}$$

πN 相互作用の断面積を説明するには，新しい "荷量" と新しい場がどうしても必要になる。それにふさわしい場の理論を作るために，多くの努力が払われた。上で述べたような解析をもっと定量的に行えば，実は核子は古典半径 $m_N{}^{-1}$ を持った単純な対象ではなく，むしろ

$$< r^2 > = \frac{1}{m_\pi{}^2}$$

の程度広がった，より複雑な構造を持つことになる。このことは長い間，π メソンが新しい荷量 (α_H) に対応した場の量子ではないか，というヒントと受けとられていた。いくつかの理由から，これらの歴史上の試みは失敗に終わった。第一に，π メソンはそれ自体，核子と同じように豊富な内部構造を持っている。したがってそれは，核相互作用における "光子" の役割にふさわしくない。さらにもう 1 つの問題は，$\alpha_H = 15$ であったことである。この結果はただちに，"量子電気力学の成功よ，もう一度" といういかなる望みをも断ち切ってしまった。量子電気力学は，摂動論に基礎をおいているが，それは α の値が小さいことを利用しており，そのことが摂動級数の収束が早いことを保証している。

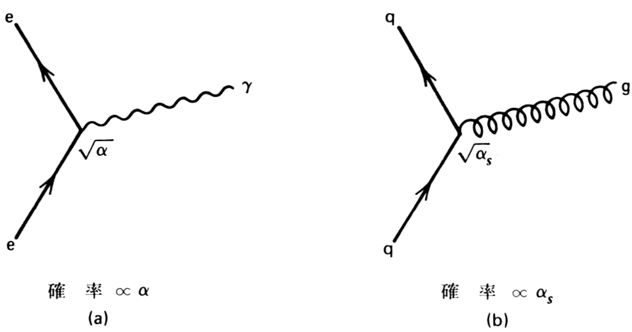


図 1·9 (a) 光子を放出する確率振幅は，e または $\sqrt{\alpha}$ に比例する。(b) グルーオン放出による確率振幅は $\sqrt{\alpha_s}$ に比例する。

今日われわれは，陽子の構造としてクォークを考える。クォークのカラー荷こそ，強い相互作用の真の荷量なのだ。グルーオンは，強い相互作用において“光子”の役割を果たす。荷電粒子による光子放出の確率が $\alpha=e^2/4\pi$ であったように，カラーを持つクォークによるグルーオン放出の確率は α_s で特徴づけられる。α_s は，まさにカラー荷の 2 乗を 4π で割ったものである (図1·9 参照)。もはや，$\alpha_{\rm H}$ は基本的な数とみなすことはできない。それは，α_s と同じように，パイオンや核子の構造を反映した“2 次的現象”に関連した数と考えられる。

低エネルギー π メソンの散乱は，ある意味で粒子の表面——典型的には，$1/m_\pi \simeq 1.4$ fm ほどの距離——に分布するカラー荷を探る。図 1·5 (b) からわかるように，たとえ $\alpha_s \gtrsim 1$ だとしても摂動論を適用するには大きすぎる。高エネルギー粒子を生成する現代の実験技術を駆使すれば，核子の奥深い場所 (α_s はより小さい) にある個々のクォークのカラー荷を調べることができる (図1·5(b) 参照)。これまで $\alpha_s \simeq 0.2$ に相当するエネルギーと距離を実現するために，さまざまな実験的手法が工夫されてきた。この場合，摂動論は有効な近似である。QCD の漸近的自由は摂動論を適用する鍵になっている (第 10, 11 章参照)。

図 1·10, 図 1·11 は，核子のクォーク構造を実験的に探る例を示している。図 1·10 (a) は，電子ビームを散乱させ，原子の構造を詳しく調べるのによく用いる手法である。図 1·10 (a) で交換する光子がほとんど運動量を運ばず，したがって比較的長波長であるような弾性散乱では，“光学”的にみれば，原子全体を照明していることになる。このような衝突では，電子雲の広がり $\langle r^2 \rangle$ が測定される。一方，電子ビームによる深非弾性散乱では，交換する光子は大きな運動量を持つ。図 1·10 (a) の光子は，高い分解能で原子を照明する短波長の試験光になっている。断面積は (1.6) の形になる。図 1·10 (c) は，α 粒子が金 (Au) の標的で散乱したときの実験結果を示す。大角度で比較的大きな断面積が観測されているのは，金原子の深部にある原子核によって α がはね飛ばされたためである。この先駆的な原子構造を調べる実験から 60 年以上たって，きわめてよく似た現象が，高エネルギー陽子・陽子散乱で観測された。今度は，断面積の増加 (図 1·10 (c)) が，陽子内部にある下部構造 (固い芯) の存在を暗示する。原子とハドロンの直接の類似性を，図 1·10 (b) が説明している。非常に高エネルギーの陽子が非弾性衝突する場合は，ビーム粒子の中の個々のクォークが，互いに“Rutherford 散乱”する。この相互作用では，核子の大きさよりもっと小さな領域にあるカラー荷が作用するので，α_s は小さく，したがって定量的予測ができる。図 1·10 (b) の Feynman 図によってデータを解析してみると，クォーク

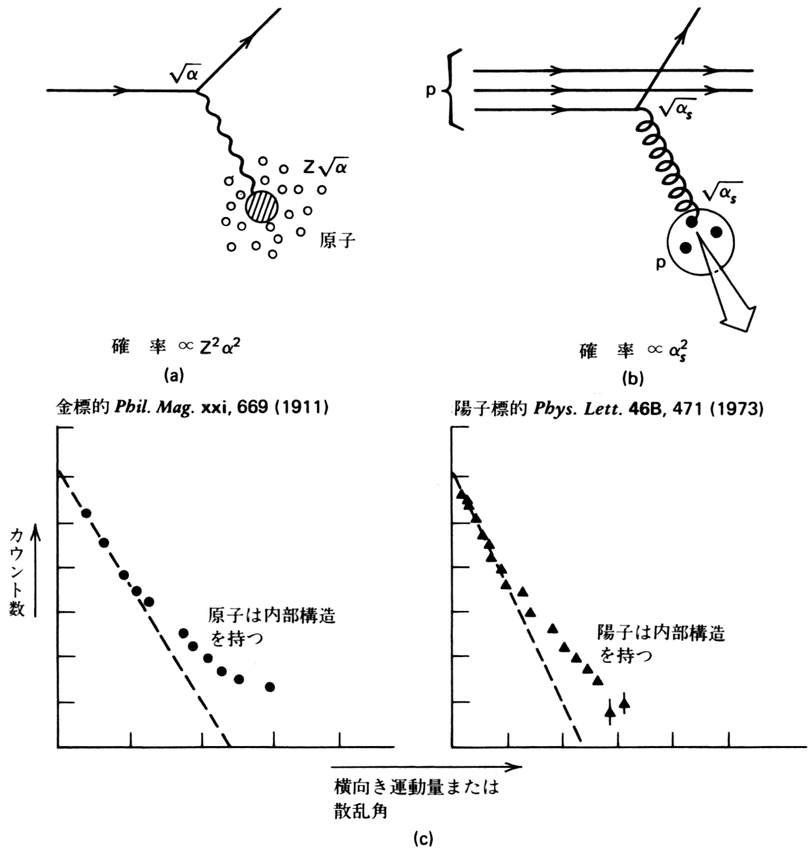


図 1·10 (a) 非弾性散乱した荷電粒子ビームによって，原子の内部構造が明らかになる。(b) 非弾性散乱する光子ビームによって，陽子標的のクォーク構造が明らかになる。(c) 実験結果

はたしかに (1.6) の Rutherford 散乱の公式に従うことがわかった：

$$d\sigma/d\Omega \sim \alpha_s{}^2/4E^2 \cdot \sin^4(\theta/2). \tag{1.10}$$

ここで $\alpha_s \simeq 0.2$. である。この場合，核子内にはグルーオンが存在することを考慮しなければならず，それが解析を難しくしている。しかし原理的には，これらの実験は完全に Rutherford 散乱に類似している。

核子内部で個々のクォークを探る実験方法は 1 つとは限らない。非常に大きな運動量，したがって小さな Compton 波長 $\lambda = 1/Q$ でハドロンを照明すると

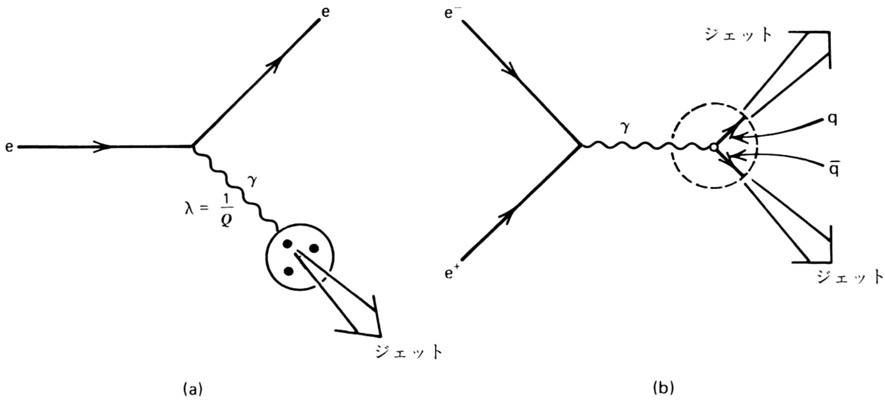


図 1·11　(a) 短波長の仮想光子によって，陽子標的内の個々のクォークをみる。(b) e^- と e^+ の消滅で生じた仮想光子は，クォーク・反クォーク対に崩壊する。

いう手法もある。原子物理学の実験に倣って，このような光子は，高エネルギー電子またはミューオンのビームと原子核標的との非弾性散乱によって作ることが多い (図 1·11 (a) 参照)。さらに，高エネルギー電子・陽電子ビームの衝突も，クォークを調べる上で，きわめて"きれいな"データを得る手法である (図 1·11 (b) 参照)。e^+ と e^- の正面衝突で作られた光子が止まって，図のように $q\bar{q}$ 対に崩壊する。その対が 1 fm ほど離れると α_s が大きくなる。つまりクォーク・反クォーク間のカラー相互作用が強くなり，この非常に強い力がクォークを減速する。減速されたクォークは，ハドロン (ほとんどが軽い π メソン) を輻射する。それはちょうど，減速された荷電粒子が制動輻射によって光子を放出するのと似ている。もとのクォークは"自由"粒子の状態では観測することはできない。π メソンや他の (カラーのない) ハドロンだけが実験家の検出器をたたく。図 1·10 (b)，図 1·11 の大きい矢印は，輻射ハドロンのシャワーあるいはジェットを示し，それはほぼ衝突で作られたクォークの方向に飛び出す。クォークはこのように"逃げ出す"。だがそれは，生成ハドロンの構成要素の 1 つとして出ていくのである。

カラー遮蔽 (図1·5 (b)) の中心的な役割は，ますます重要になってきている。ところで，クォークをハドロン内に閉じ込めるという考えは，自由クォークが観測できないことの言いわけ以上の意味があるのだろうか。答えは，この閉じ込めの描像こそ，ユニークかつドラマティックな予言を可能にするということ

だ。図 1·11 (b) で，仮想光子が作られて静止すると，クォークと反クォークは，運動量保存によって，互いに反対方向に飛び出すはずである。だから，ハドロンの 2 つの束 (ジェット) は，光子が作られる消滅点に関して互いに反対側で観測されるはずだ。この予言は実験で確認され，クォーク理論は確かな支持を得たのである。クォーク理論以前の理論はすべて，生成ハドロンの分布は一様で，等方分布をすると考えていた。実験の判定は疑う余地がない。図 1·12 は，ワイヤーチェンバーで観測した 2 ジェットイベントの例である。2 つのジェットの向きが正反対であることに注意されたい。

2 ジェットイベントのもっとも際立った (そして決して自明ではない) 点は，検出器に入るのは，制動輻射の生成物でありクォーク自身ではない，ということである。ごく定性的にではあるが，カラー理論で考えれば，この実験事実を"合理的"に説明できる。ここでもう一度，図 1·5 に示した QED と QCD

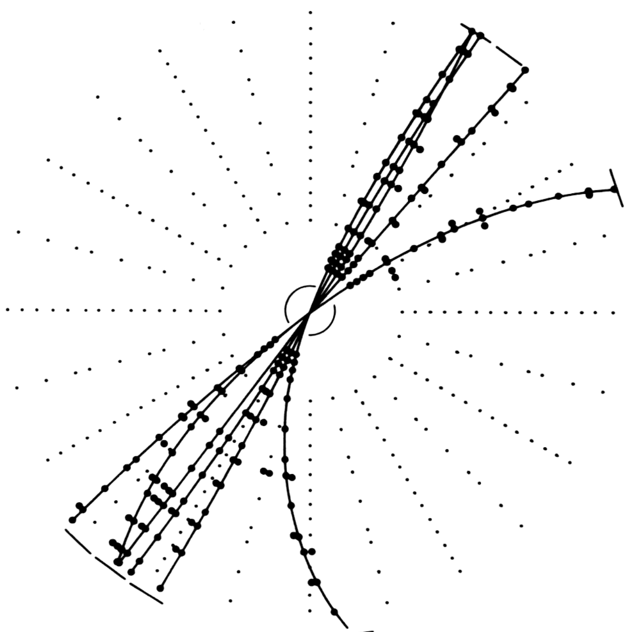


図 1·12　クォークと反クォークジェット中の荷電粒子の飛跡。PETRA における TASSO 検出器により，非常に高いエネルギーの e^-e^+ が，図の中心で正面衝突したときの生成粒子が観測される。

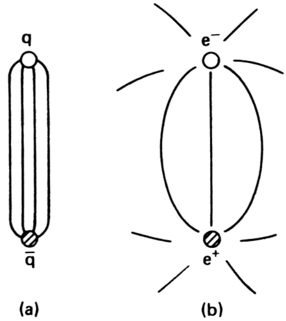


図 1·13 ポテンシャル $V(r) \sim r$ を持つ $q\bar{q}$ カラー場とポテンシャル $V(r) \sim 1/r$ の Coulomb 場

の違いを思い起こすことが重要である。クォークと反クォークが離れると，カラー相互作用は一層強くなる。グルーオンが別のグルーオンと相互作用すると，クォーク・反クォークのカラー場が作る力線は，図 1·13 (a) のように管状にしぼられる。これは，力線が妨げられずに広がっていく Coulomb 場とは対照的である。光子は自分自身を閉じ込めるような自己結合をしない。これは，QED と QCD の遮蔽の違いを直観的に示すもう 1 つの方法である。カラー管が単位長さ当り一定エネルギー密度を持っているなら，クォーク・反クォーク間のポテンシャルエネルギーは距離とともに $V(r) \sim \lambda r$ のように増加する。したがって，クォーク (およびグルーオン) は決して逃げられない。このいわゆる赤外束縛 (infrared slavery) は，クォークをカラーのないハドロン内に完全に閉じ込める原因であると信じられている。ではどのようなしくみで，クォークはハドロンジェットとして粒子になっていくのだろうか。答えは図 1·14 に示されている。$q\bar{q}$ 対の距離が大きくなり，カラー力線が延びると，ポテンシャルエネル

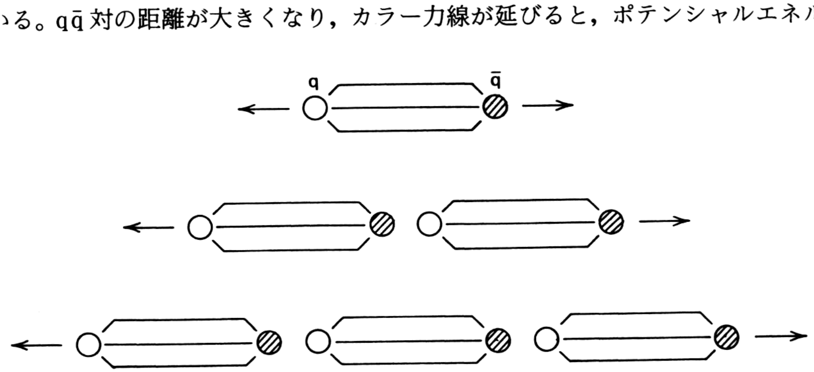


図 1·14 クォークと反クォークが分離したときのジェット生成

ギーが十分増加して，新しい $q\bar{q}$ が生成できるようになる。これは力線の端の点で起こる。力線は，$q\bar{q}$ の質量を余分に作り出すという代償を担なわなければならないが，正味のエネルギーが，もっと低い 2 つの短い管に切れる。出ていくクオークと反クォークは，さらに反対方向に運動を続け，カラー力線を伸ばす(もともとクォーク・反クォークは衝突した e^- と e^+ の運動量を担っていた)。最終的にはクォーク・反クォークの運動エネルギーが，クォークとグルーオンのクラスター生成に使われてしまうので，$q\bar{q}$ 対がどんどんできる。個々のクラスターは正味のカラー荷を持たず，内部運動量は低い。したがってカラー結合は非常に強い。このカラー結合がクォークをハドロンに転化させ，ほぼはじめのクォークと反クォークの方向に，2 ジェット状に進んでいく粒子を作り出す (図1･14 参照)。

これまでの議論をまとめておこう。クォークは電荷とともにカラー荷を持つ。その実験的証拠は動かし難い。以前に，カラーを，それとは一見無関係のように見える Fermi 統計の問題を解決するだけの理由で導入した。ここで議論したカラーは，まさにそのカラーと同じ性質のものである。また，カラー理論 (QCD) と電気力学の理論 (QED) の相互作用には類似性がある。すなわち，QCD におけるカラークォーク間の質量 0 のグルーオン交換は，QED における荷電粒子間の質量 0 の光子交換と非常によく似ている。両者の決定的な違いは，図 1･5，図 1･13 に示したように α_s と α の大きさ (それぞれの相互作用の強さ) および遮蔽効果の違いにある。

では QCD は，中性子と陽子を束縛して原子核を作る短距離核力をどこに置き去りにしてきたのだろう。そもそもこの核力が，強い相互作用を導入した動機ではなかったのか。その答えは，化学結合との類似性に一番よく現れている。化学結合は，2 つの中性原子が互いに接近したとき，その間に働く電磁力によって生じる。原子は電気的に中性であるから，電子雲が重なりはじめるまではほとんど力を感じない。van der Waals 力として知られるこの力の強さは，電子雲の重なりとともにはじめはゆっくり増大するが，やがて急激に強くなる。それが分子結合を引き起こすが，このとき，原子間に電子が交換される。この現象自身は，基本的な相互作用ではない。これは，2 つの広がった電荷間の基本的な電磁相互作用が，複雑に絡み合った結果である。同じように核子・核子力も，カラークォーク間の基本的な相互作用が複雑に作用したものとみなすことができる。カラー中性の核子は，核子内のクォークが別の核子に含まれるクォークの存在を "感じた" ときにかぎり，短距離での強い相互作用を感ずる。

1.6　弱い相互作用も存在する

カラー量子数導入に重要なヒントを与えた Δ^{++} 粒子は，Fermi らにより，π メソンと陽子の散乱実験で発見された。電荷 2 の Δ^{++} はおよそ 10^{-23} s という短い時間しか存在せず，ふたたび π^+ と陽子 (p) に崩壊する。クォークの描像で考えると，図 1·15 (a) のような崩壊機構が予想される。約 1 fm の到達距離を持つ強い相互作用が，Δ^{++} の崩壊を引き起こす。したがってその典型的な崩壊時間は，π^+ と陽子が $R=1$ fm の距離まで離れる時間と考えてよい。

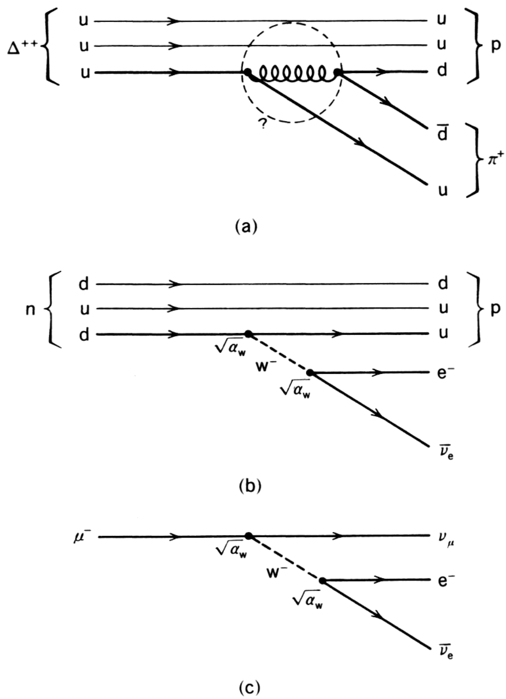


図 1·15　(a) 崩壊過程 $\Delta^{++}\to\pi^+$p. 崩壊機構は単に図式的に示されているにすぎない：この図から，Δ^{++} は強い相互作用 (作用領域は約 1 F) で崩壊することがわかる。(b) 中性子の β 崩壊は，弱い相互作用によって媒介される。重い弱ボソン W が，確率 α で放出・吸収される。(c) ミューオンの崩壊

$$\tau = \frac{R}{c} = 10^{-23}\text{sec.} \tag{1.11}$$

π メソンと陽子の散乱で作られる他のバリオン共鳴状態も，10^{-23} s 程度の寿命を持つ。これとは対照的に，陽子自身の寿命は 10^{30} 年より長いことが知られている。この特別な場合を含めようとすれば，バリオン数保存を引き合いに出さざるをえない。もし，この保存則がなければ陽子は不安定であり，たとえば，

$$p \longrightarrow e^+ + \pi^0$$

のように崩壊できるだろう。しかし，バリオン数保存則からは，この崩壊は禁止される (第 15 章参照)。事実，表 1-1 を用いて，崩壊前の全バリオン数は，陽子中の (uud) クォークに対しては $3\times1/3=1$ であり，π^0 を作っている $q, \bar{q}$ のバリオン数は互いに打ち消し合うので，崩壊後のバリオン数は 0 になることがわかる。一番軽い荷電粒子である電子は，もちろん電荷の保存によって安定である。

中性子の崩壊過程は，放射性元素の β 崩壊

$$n \longrightarrow p + e^- + \bar{\nu}$$

からよく知られている。この遷移はエネルギー的にも可能であり，バリオン数保存によっても禁止されない。だが，中性子は 15 分も生きている。これは謎だ。ある粒子が，(1.11) の寿命より長い寿命を持つことは想像できる。なぜなら，そのような粒子はもっと弱い電磁相互作用を通してのみ崩壊し，図 1･15 (a) のカラー相互作用では崩壊しないからである。電磁的に $\pi^0 \to \gamma\gamma$ によって崩壊する π^0 の寿命は，10^{-16} s である。これは，

$$\frac{\tau\,(\text{電磁相互作用})}{\tau\,(\text{強い相互作用})} \cong \left(\frac{\alpha_s}{\alpha}\right)^2 = 10^4 \sim 10^6 \tag{1.12}$$

であり，したがって電磁相互作用の崩壊寿命は，強い相互作用で崩壊する粒子の典型的な寿命 10^{-23} s より，$10^4 \sim 10^6$ 倍ほど長いはずだ。(1.12) を導くのに，図 1･15 から，ハドロン崩壊の確率が $(\sqrt{\alpha_s}\sqrt{\alpha_s})^2$ に比例するというヒントを得た。だが，2 つのスケール α と α_s を持つ世界において，10^{-16} s よりはるかに長い寿命を説明することはとてもできない。陽子と電子は保存則で "保護" されているので安定である。では，中性子が持つ 15 分という長い寿命をどう理解すればよいのだろうか。

問題は中性子だけに限らない。荷電 π^- は 10^{-12} s で $\pi^- \to e^- + \bar{\nu}$ のように崩壊し，10^{-10} s 程度の寿命で，たとえば $\Sigma^+ \to n + \pi^+$ のように崩壊する一連の "ストレンジ (奇妙な)" 粒子も存在する。$\Sigma \to n + \pi$ 崩壊はこの謎をもっとはっ

きりと示したものである。

エネルギー的には，崩壊過程 $\Sigma \to n+\pi$ は，$\Delta \to n+\pi$ とほとんど同じである。$\Sigma \to n+\pi$ の有効な位相空間は，n と π の運動エネルギー 0.12 GeV に相当し，$\Delta \to n+\pi$ のそれに近い。にもかかわらず，これらの寿命は 13 桁も違っている。われわれは新しいスケール α_W を導入し，新たに"弱い"相互作用を考えざるをえない。(1.12) と同じように議論を進めれば，

$$\frac{\tau(\Delta \to n+\pi)}{\tau(\Sigma \to n+\pi)} \simeq \frac{10^{-23}\text{sec}}{10^{-10}\text{sec}} = \left(\frac{\alpha_W}{\alpha_s}\right)^2. \tag{1.13}$$

ここで α_W は，ある"弱い量子" W を放出・吸収する確率である。こう考えると，中性子の β 崩壊は，図 1·15 (b) の Feynman 図で表される。(1.13) によれば，$\alpha_s \simeq 1$ と $\alpha \simeq 10^{-2}$ を比較したとき

$$\alpha_W \simeq 10^{-6} \tag{1.14}$$

となることがわかる。

上の議論では暗に，弱い場の量子 (グルーオンではない) は，レプトン (e, ν) とクォーク (u, d) に同じ強さ α_W で結合すると考えている (図 1·15 (b) 参照)。このことは，実験で直接支持されている。つまり β 崩壊を，$\mu^- \to e^-\bar{\nu}_e\nu_\mu$ のようなレプトンのみの弱い過程と比較するのである (図 1·15 (b) と (c) を比べよ)。弱い相互作用には，もう 1 つの新しい性質がある。すなわち d クォークを u クォークに (図 1·15 (b))，ミューオンをニュートリノに変える。これを，弱い相互作用はクォークとレプトンの"フレーバー"を変えるという。図 1·15 に示す弱い場の量子は，グルーオンや光子とは違って，中性ならびに正，負電荷を持つ (第 12, 13 章参照)。

ここで，クォーク・レプトンが相互作用するときに交換されるボソンと，それに対応する荷量をまとめると，表 1-3，表 1-4 のようになる。

放射性 β 崩壊とその他の"弱い"現象を説明するのに，新しい相互作用の導入しか考えなかった。しかしこのことは，必ずしも特別な結合の強さ α_W を持った新しい場の在存を意味するとは限らない。(1.14) に対して，もっと適切な解釈がある (第 15 章参照)。図 1·15 (b), (c) の Feynman 図をみると，実際には W の結合が強さの点で電磁的であるということができる。すると W の放出確率は，本質的に光子の確率すなわち α と同じになる。上とは違って，弱い相互作用がゆっくり進むことは，W に大きな質量を与えれば実現できる。W 交換の確率は，光子交換に比べて小さい。それは W が放出されにくいのではなく，その質量が大きいためなのである。したがって，(1.14) を次のように解釈し直す：

表 1-3　代表的な相互作用

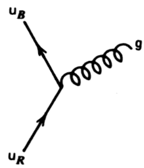
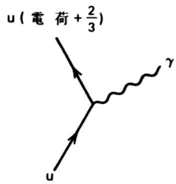
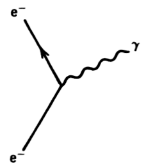
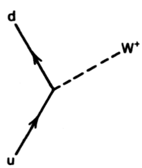
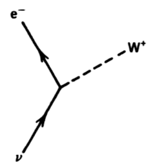
相互作用	荷　量	クォーク	レプトン
強い相互作用	カラー荷		-
電磁相互作用	電　荷 (e)		
弱い相互作用	弱　荷 (g), $u \to d$ あるいは $\nu \to e^-$ のようにフレーバーを変化させる。		

表 1-4　第 1 章のまとめ

相互作用	力の到達距離	典型的な寿命 (sec)	典型的な断面積 (mb)	典型的な結合定数 α_i
強い相互作用	$1\,\mathrm{fm} \simeq \dfrac{1}{m_\pi}$	10^{-23}	10	1
	カラー閉じ込めの距離†	たとえば $\Delta \to p\pi$	たとえば $\pi p \to \pi p$	
電磁相互作用	∞	$10^{-20} \sim 10^{-16}$ たとえば $\pi^0 \to \gamma\gamma$, $\Sigma \to \Lambda\gamma$	10^{-3} たとえば $\gamma p \to p\pi^0$	10^{-2}
弱い相互作用	$\dfrac{1}{M_W}$	10^{-12} かそれ以上	10^{-11}	10^{-6}
	$M_W \simeq 100\, m_p$	たとえば $\Sigma^- \to n\pi^-$ $\pi^- \to \mu^-\bar{\nu}$	たとえば $\nu p \to \nu p$, $\nu p \to \mu^- p \pi^+$	

† 質量のないグルーオン交換による "van der Waals 力" の現れ (1.5 節の最後を参照)。

$$\alpha_W = \frac{\alpha}{(M_W/m_p)^2} \simeq 10^{-6}. \qquad (1.15)$$

(1.15) の定性的な内容はすでに明らかである。大きな質量 M_W は弱ボソンの結合の強さ α を減少させ，与えられた大きさの "有効" 結合強度 α_W にする。次元を考えると，M_W はある基準質量で表されなければならないが，それを陽子の質量にとる。α_W の減少の割合が質量の 2 乗に比例することは，自明なことではなく，これから作る "電弱" 相互作用の理論の詳細による。第 15 章で (1.15) のような形の式を導く。$\alpha = 10^{-2}$ であるから，

$$M_W \simeq 10^2 m_p \qquad (1.16)$$

が予想される。この結果はまた，弱い相互作用が短距離力であることを暗示する。仮想 W ボソンを放出するには，少なくとも $M_W c^2$ のエネルギーを必要とする。したがって W は $\Delta t \lesssim \hbar/M_W c^2$ しか生きられず，そのあとは吸収される (図 1·3 の議論を思い出してほしい)。その時間の間に，W は最大 $c\Delta t = \hbar/M_W c \simeq 10^{-3}$ fm の距離を走ることができるが，これは強い相互作用の到達距離 1 fm よりずっと短い。ところで注目すべき点は，弱い相互作用を取り入れるのに，かならずしも新しい荷量を導入する必要はないという点である。(1.15) には電荷しか現れていない。読者は新しい荷量ではなくて，新しい質量スケールの導入を概念的に優先させたことに疑問を抱くかもしれない。第 14, 15 章の自発的対称性の破れの議論で，改めてこれを問題にする。もちろん審美的にどんなに満足すべき着想であっても，実験こそ最終的な判定者である。

これまでの議論は，もう少しなじみ深いものであるはずだ。電磁気学の Maxwell 理論もまた，2 つの相互作用，電気と磁気とを統一している。速度 v で動く荷電粒子に働く力は，

$$\boldsymbol{F} = e\boldsymbol{E} + e_M \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}$$

で表される。Maxwell 理論は，磁気相互作用を取り入れるのに新しい荷量を導入しない。$e = e_M$ とおくことによって 2 つの相互作用を "統一" している。速度が小さいとき，磁気力は非常に弱い。しかし高速度では，電気力と磁気力は同じように重要になる。2 つの力の統一は，理論の中にスケール (尺度) を導入する：それが光速度である。光速度 c は，2 つの力の相対的な強さを決めるスケールになる。弱い相互作用と電磁相互作用を統一するにも，エネルギーのスケール M_W を導入した。

1.7 Mendeleev の跡をたどる：もっとクォークとレプトンを

弱崩壊の注目すべき例を提供した，Σ のようないわゆる“ストレンジ”粒子の発見には，もっと深い意味がある。それらは，u, d クォークからなるカラーのない qqq および $q\bar{q}$ 励起状態の枠組には入らない。実験によれば，ストレンジ粒子は非ストレンジハドロンの強い相互作用によって対生成される。これは明らかに，ストレンジ粒子が新しいクォークを含むことを暗示している。図 1·16 は，一例として相互作用

$$\pi^+ + p \longrightarrow K^+ + \Sigma^+$$

を用いて，以上の点を説明してみる。中心の丸い部分は，ストレンジ粒子対が現れる前の複雑な（距離 1 fm の）カラー相互作用を表す。表 1-1 に注目し，このようなデータを検討した結果，新しいストレンジクォーク s は，d クォークと電荷（図 1·16 参照）は同じであるが，他の量子数は違っていることが結論された。ストレンジ粒子の質量の測定は，暗に s クォークが u, d クォークより重いことを示している。K $(u\bar{s})$ メソンは π $(u\bar{d})$ より，Σ (uus) は p (uud) より重い。d クォークと同類のクォークとして知られているものに，さらに重い b クォークがある。電荷 2/3 の u クォークもそれより重いパートナー c クォークを持つ。歴史的には，表 1-1 にあるクォークとレプトンの中で，電子と同類でもっと重い粒子にミューオンがある。それは電子の 200 倍の質量を持つこと以外は，すべての点で電子と同じようにみえる。現在はっきりわかっている事実によれば，表 1-1 は表 1-5 のように拡張されなければならない。

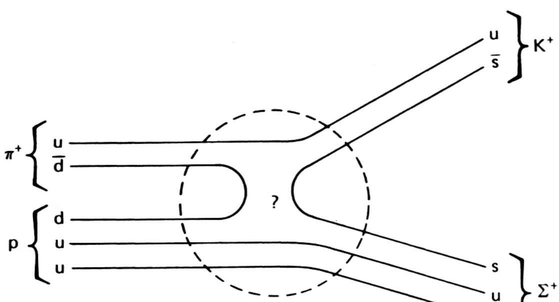


図 1·16 ストレンジ粒子の対生成

表 1-5　今日知られているクォークとレプトンの数[†]

クォーク		
u(アップ)	c(チャーム)	t(トップ)[††]
d(ダウン)	s(ストレンジ)	b(ボトム)
レプトン		
e(電　子)	μ(ミューオン)	τ(タウ)
ν_e(eニュートリノ)	ν_μ(μニュートリノ)	ν_τ(τニュートリノ)

† 質量は左から右へ増加する。一番重い t クォークについては，現在のところ確定的な証拠はない。
†† 米国 Fermi 研究所の 1800 GeV の陽子-反陽子衝突加速器で証拠が得られた (1994) 質量は 174 ±17 GeV である。

原子核，原子，分子など，いわゆるわれわれの“世界”は，表 1-5 の第 1 列の要素からなる。隣り合った粒子の性質は，質量以外はすべて同じである。なぜわれわれの世界は，2 重，3 重，…という世代構造を持つのか。これは，未解決の大問題の 1 つである。この章のはじめに，Mendeleev の周期表について述べた個所をもう一度思い出してみよう。元素の多様性と周期表の構成にみられる明らかな系統性は，もっと基本的な構成要素である下部構造の存在を強く示唆している。では，6 つのクォークとレプトンについて，さらにその下部構造にまで思いをめぐらすのは，時期尚早であろうか。

1.8　重　　力

これまで，日常生活で一番なじみ深い力，重力に言及しなかったことを読者は不思議に思うかもしれない。それは単に，重力が知られている力の中で，極端に弱いというだけのことだ。したがって，重力は原子以下の世界では，観測できるような効果を及ぼさない。重力場の量子論が可能かどうかもはっきりしていない。では，重力の存在はなぜそれほど明白なのか。それは，重力がもう 1 つの長距離相互作用，電磁力とは違って累積的であること，および，われわれが地球という天体上に生きていることによるのである。そうでなければ，重力は宇宙飛行士だけがはっきり感じるのではないだろうか。大きな物体では，通常それらの電磁力は打ち消し合って電気的に中性である。しかし 2 物体間の重力による引力は，構成物体の質量間の引力を次々に加えたもので，打ち消し合うことはない。ところで読者は，重力のゲージ理論の建設が，今日の素粒子物理学の主要な目標の 1 つになっていることを想像できるだろうか。この問題はそれほど簡単ではない。“重力子 (graviton)”は，表 1-1 に示したスピン 1 の量子と違ってスピン 2 である。しかし重力の議論は，本書の程度を越える。

1.9 素粒子：実験家の視点

真空管から放出された電子が電磁場の中に入ると，電子は，電荷 $-e$，質量 m の粒子に対して古典電磁気学が予想する軌道に従う。このことは，放射線源から放出される粒子や α 粒子にもあてはまる。だがそれらは，高エネルギー物理学者の立場からみると，空間的に広がった複雑な構造を持っている。しかし，実験物理学者の仕事の上で定義するときは，そんな構造を考えず，粒子ははっきり決まった電荷と質量を持つ点粒子とみなす。加速器や測定器の巨視的な電磁場中で，どんな実用上の目的に対してもそう考えてさしつかえない。

陰極と陽極の間の 1 V の電位差で，電子を加速することを考えよう。もし電子が真空管という "加速器" から引き出されると，それは 1 eV のエネルギーを持って出てくるだろう。ところで，高エネルギー物理学で必要とするビームエネルギーは $E \simeq 10^9$ eV，すなわち 1 GeV ほどである。つまり，われわれの "電子顕微鏡" が達成できる空間的分解能の程度は次のようになる：

$$\Delta x \sim \frac{\hbar c}{E} \sim \frac{(6.6\times 10^{-16}\mathrm{eV\cdot sec})(3\times 10^{8}\mathrm{m/sec})}{10^{9}\mathrm{eV}}$$

$$\sim 10^{-15}\mathrm{m} \quad \text{または}\ 1\,\mathrm{fm}.$$

明らかに 1 つの真空管では，こんなに高いエネルギーは得られない！ これだけ大きな電位差を発生させることはできないからである。この問題を解決するには 2 つの方法がある：まず第一は，非常に多くの電極を完全に直線上に並べる方法 (線型加速器)，第二は，いくつかの電極を円周上に並べ，電子が電極中をくり返し通過できるようにして加速を重ねる，という方法 (シンクロサイクロトロン) である。

第一の解は，スタンフォード線型加速器研究所 (SLAC, Stanford Linear Accelerator Center) で，2 マイル長の線型加速器の建設に採用された。この場合，電子のエネルギーは 20 GeV に達する。イオン源から出た電子は，一連のラジオ周波数 (rf) キャビティーで加速される。キャビティーには，電子がそれぞれのキャビティーに入ったとき，電子の速度と平行に振動電場がかけられる。したがって，電子は電場の波頭に乗り， 2 マイル加速器に沿って走る。電子ビームを直線的に保つのに，ビームを絞るための別の電磁場が必要になる。それは，レンズで光線を曲げたり絞ったりするのと同じやり方である。

円型加速器のほうは，シカゴ近郊の Fermi 研究所とスイスのジュネーブのセルン (CERN, Conceille Europeenne Recherche Nucleaire) にあるシンクロト

ロンの建設に採用された。これらの加速器は直径が 2 km で，陽子を 500 GeV まで加速することができる。加速の物理的原理は，古い型のサイクロトロンですでによく知られている (図 1·17 参照)。サイクロトロンでは磁束密度 B の中にある陽子の回転半径は

$$R=\frac{mv}{eB} \tag{1.17}$$

で，速度 v とともに大きくなる。したがって，陽子はうず巻き状に運動する (Halliday and Resnick および Omnés 参照)。相対論的な速度では，質量は

$$m=\gamma m_0=\frac{m_0}{\sqrt{1-(v^2/c^2)}}. \tag{1.18}$$

ここで m_0 は陽子の静止質量で，角速度 ω は

$$\omega=\frac{eB}{m}=\frac{eB}{m_0\gamma} \tag{1.19}$$

のように減少する。ω は，非相対論的な速度では一定であることを覚えておこう。したがって，加速を完全にするには，図 1·17 の交番電場を一定角速度 ω に合わせておけばよい。

シンクロサイクロトロンでは，円周上に並んだ一連の加速 rf キャビティーを用いる。サイクロトロンとは 2 つの点で違っている：(1) キャビティーの間に置かれた 2 重偏向電磁石が供給する B は一定ではなく，粒子を一定の軌道に保つため，連続的に変わるよう調整されている。(2) rf キャビティーで発生する振動電場の振動数は，(1.19) で与えられる陽子の角速度 ω の変化に "同期" している (これがシンクロトロンと呼ばれる理由である)。だから，ちょうどよい時間にキャビティーに入ってきた陽子のみが加速される。つまり，連続的なビームではなく，必然的に陽子の "束 (バンチ)" を加速することになる。CERN の加速器では，陽子 4600 バンチが 1 周 23 μsec で回転している。つまり，加速器は 200 MHz (2×10^8 Hz) で運転されている。1 周あたりに必要とする 500

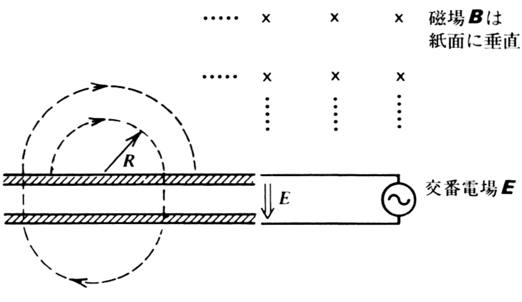


図 1·17　Lorentz 力で回転する粒子は，電場 E によってくり返し加速される。

万 V の電圧を発生するために，rf キャビティーの出力は 2 MW になる。加速を受けている 2 秒間に，粒子は 100000 回ほど加速器内を走り廻る。この間に粒子は 500000 km 走るが，軌道は 1 mm の精度に保たれる。この精度を得るため rf キャビティーと偏向 (2 重極) 電磁石の間に 4 重極収束電磁石を置く。

現在では，同一の円型加速器で，逆の電荷を持つ 2 つの粒子ビームを加速することが一般的になってきた。反対の向きに回転する 2 つのビームを決まった相互作用領域で交叉させ，激しく正面衝突させる (問題 3.3 参照)。衝突による生成粒子は，衝突点を囲む測定器によって検出される。ビームエネルギーが20 GeV までの電子・陽電子コライダーが，ハンブルクの DESY (Deutsches Elektronen-Synchrotron) と SLAC で稼動している。同じ技術が CERN の陽子・反陽子コライダーにも使われている。この場合，ビームは 270 GeV のエネルギーで回転する。より高いエネルギーを達成する構想が，CERN と Fermi 研究所で検討されている。加速器の新しい世代が目前に迫っているのだ。ヨーロッパ，アメリカ，日本，ソ連などの国々が建設を進めている†。

また，核子・核子相互作用の研究のために，電子や陽子を加速器から引き出し，外にある水素または原子核標的に導くことができる。一方，このような相互作用で生成した荷電 π メソン，K メソン，あるいは反陽子を収束させ，2 次ビームを作ることができる。それを核ターゲットに衝突させ，核子との相互作用の研究に用いる。

2 次 π^+ ビームには，飛行中に $\pi^+ \to \mu^+ + \nu$ のように崩壊するものもある。つまり，ビームはミューオン (μ) とニュートリノ (ν) で“汚れる”。このようなビームを遮蔽物質中に通すと，μ や ν と違って，π^+ 粒子は吸収体中で強い相互作用をするから，ビーム中の π^+ 成分は吸収されるだろう。このようにして ν が“混じった” μ^+ ビームが作られる。さらに遮蔽物質を増やせば，最後に弱い相互作用をする ν だけが残る。こうして，π^+ ビームは ν ビームに変わった！

ここで忘れてはならないことがある。大気中で，窒素あるいは酸素と宇宙線との衝突が観測されてきたが，その衝突エネルギーは，実験室で到達できるエネルギーより 5 桁以上も大きい。したがって，高エネルギー宇宙線のフラックスは少ないが，その相互作用の系統的な研究は，挑戦的であると同時にきわめて魅力的である。

---

†(訳注) 1994年現在 TRISTAN (電子・陽電子 60 GeV，高エネルギー物理学研究所，日本)，LEP (電子・陽電子 90 GeV，CERN，スイス)，SLC (電子・陽電子 90 GeV，SLAC，米国)，TEVATRON (陽子・反陽子 1800 GeV，Fermi 研究所，米国)，HERA (電子 30 GeV・陽子 820 GeV，DESY，ドイツ) 等の加速器が活躍している。

1.10 粒子検出器

荷電粒子の検出は，簡単な原理に基づいている：物質は荷電粒子が通るときイオン化する。これは，物質中を走る荷電粒子に伴う電場は，近傍の原子の外殻電子を加速しイオン化するからである。つまり荷電粒子は，イオン化した原子の跡を残し，それが荷電粒子の飛跡を推測するのに利用される。普通の方法は，コンデンサー電極の間に誘電体(普通はガス)を満たし，電極間に放電電圧に近い電圧をかける。そこで荷電粒子が検出器に入ると，誘電体をイオン化し，コンデンサーは放電する。これがガイガーカウンターの原理である。高エネルギー物理の実験で用いられるスパークチェンバー，ストリーマーチェンバー，フラッシュチェンバーは，基本的には，ガイガーカウンターと同類のカウンターを大量に集積したものである。いろいろな種類の検出器の中で次々に起こる放電を観測して，粒子の飛跡を再構成することができる。同じ技術が，プロポーショナルチェンバーあるいはドリフトチェンバーにも用いられている。それらは，ガイガーモード以下で作動するイオン化検出器である。すなわち，電圧は誘電体の放電電圧より低く保たれている。粒子の飛跡に沿ってできるイオン化は，そこで生じた電子を陽極ワイヤーに集めたとき発生する電気信号で観測する(図 1·18 参照)。正電荷のイオンも陰極面に移動し，電流として検出される。多数の陽極ワイヤーと陰極板を用いて，5 m×5 m ほどのカウンターを作ることも決して珍しくはない。

泡箱は，イオン化によって，荷電粒子の通った跡をみるもう 1 つの方法である。同じ手法はまた，霧箱や写真乾板(エマルジョン)にも用いられている。

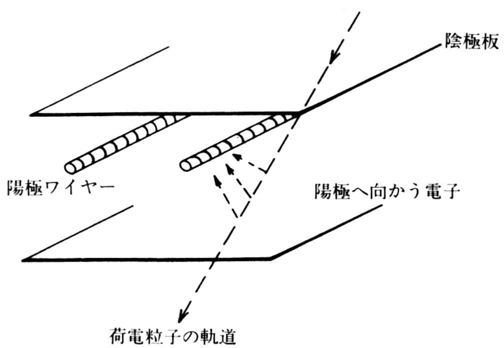


図 1·18 ドリフトチェンバーの原理

直径が数 m の大きな箱の中に，液体を約 5～20 気圧に過圧して保つ。それを突然減圧すると液体は過熱状態になり，沸騰がはじまって，粒子の飛跡に沿って泡が作られる。泡の形成をうながすのはイオン化した原子である。泡は 10 msec のあいだ成長でき，立体カメラに記録される。

ある物質では，原子が高エネルギー荷電粒子によって，イオン化されないで励起される物質もある。励起状態は光を出して崩壊し，その光は光電子増倍管で観測される。シンチレーションカウンターと呼ばれるこの種の検出器は，有機結晶シンチレーター，あるいは粒子が分子レベルを励起するような有機物質で作られている。

π メソン，K メソン，核子の質量を測定して，それらを区別できるような検出器もある。これらの実験では，粒子が光速に近い速度で走っても，その速度を決定することができる。粒子を誘電体中に通し，励起原子から発生する Čerenkov 光を観測するのである。Čerenkov 光は，粒子の速度が誘電物質中で光速度をこえたときに発生する ($v_{\mathrm{th}}=c/n$，n は屈折率)。この現象は，空気中で音速より速い飛行機が放射する衝撃波に似ている。同じ運動量で質量の異なる粒子を識別するには，速度の閾(しきい)値が利用される。

明らかに上に述べた方法では，中性粒子は観測できない。しかし，中性粒子の存在は，それらの崩壊で生ずる荷電粒子を観測すれば検出できる。たとえば π^0 は，$\pi^0 \to \gamma\gamma$，$\gamma \to e^+e^-$ を利用する。$\gamma \to e^+e^-$ はエネルギー保存則によって禁止されるが，原子核の電場中では，$\gamma N \to e^+e^-N'$ のような反応が可能になる。もし，光子や電子が原子番号 Z の大きな物質中に入ると，制動輻射と対生成がくり返し起こり，光子や電子のなだれが生成されるであろう。その数は，検出器の深さとともに指数関数的に増大し，ついにカスケードは入射粒子の全エネルギーを使い果たしてしまう。このような検出器は，カロリメーターと呼ばれる。

今日の粒子検出器は，通常，上に述べたいろいろな測定器からなる複合システムである。それには普通，粒子の飛跡を曲げて運動量を決定するための磁石が含まれている。鉄芯はハドロンを吸収し，生き残ったミューオンが検出される。検出器には，しばしば 1000 トン以上の磁化した鉄が使われる。多目的検出器や各種測定器からの情報を集めて処理する，複雑なエレクトロニクスの詳細は本書の範囲を越える。もっと詳しく知りたい読者は，たとえば Perkins (1982) の第 2 章と Kleinknecht (1982) を読まれたい。

2

対称性とクォーク

対称性と群

2.1　物理学における対称性：その一例

素粒子の質量表を一見すると，陽子と中性子の質量がきわめて近いことがわかる。核物理学者は，実はそれらが，“核子”という1個の同一粒子の2つの顔であると考えた。そのことは，電子のスピンが上向き，下向きという2つの状態を，2つではなく1つの粒子と考えることとまったく同じである。たしかに，中性子と陽子の類似性の議論に用いられる数学的な構造は，ほとんどスピンの場合のコピーであり，“アイソスピン”と呼ばれている（図2·1参照）。

この概念は非常に役に立つ。簡単な説明として，2つの粒子系の記述について考えよう。個々の粒子はスピン1/2を持つ（スピン状態を↑,↓のように示す）。そこで角運動量の合成則によれば，複合系の全スピンは $S=1$，または $S=0$ となる。以後 $\hbar=1$ の単位を用いる（1.4節参照）。スピン3重項（$S=1$）とスピン1重項（$S=0$）は次のように作られる：

$$\begin{cases} |S=1,\ Ms=1> = \uparrow\uparrow \\ |S=1,\ Ms=0> = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(\uparrow\downarrow+\downarrow\uparrow) \\ |S=1,\ Ms=-1> = \downarrow\downarrow \end{cases} \tag{2.1}$$

$$|S=0,\ Ms=0> = \frac{1}{\sqrt{2}}(\uparrow\downarrow-\downarrow\uparrow)$$

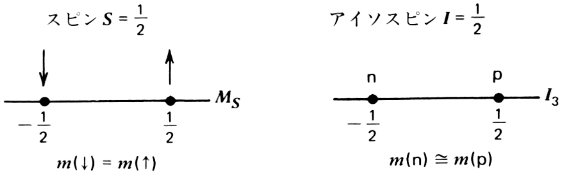


図2·1　スピンとアイソスピンの2重項

同じように個々の粒子はアイソスピン $I=1/2$ で，陽子と中性子はそれぞれ $I_3=\pm 1/2$ を持つと考える。核子・核子系の $I=1$, $I=0$ 状態は，スピンとまったく同じ方法で作ることができる：

$$\begin{cases} |I=1,\ I_3=1>=\mathrm{pp} \\ |I=1,\ I_3=0>=\dfrac{1}{\sqrt{2}}(\mathrm{pn}+\mathrm{np}) \\ |I=1,\ I_3=-1>=\mathrm{nn} \end{cases} \tag{2.2}$$

$$|I=0,\ I_3=0>=\frac{1}{\sqrt{2}}(\mathrm{pn}-\mathrm{np})$$

問題 2.1 (2.1) で示した分解を 2 つの方法で確かめよ。(1) 粒子の交換に対して，状態の対称性を考える。(2) 角運動量の "昇降" 演算子を用いる。

問題 2.2 2 つの核子が，相対的角運動量 $L=0$ の状態にあるとして，Pauli の排他原理を用いて，$S+I$ が奇数でなければならないことを示せ。

核力がアイソスピンの変換に対して不変であることを示す多くの証拠がある (たとえば，核力が (2.2) の $I=1$ 多重項に対して I_3 の値には依存しないこと)。一例として，^{6}He, ^{6}Li, ^{6}Be を考えよう。これらの原子核は，$I=0$ を持つ ^{4}He の芯に結合した nn, np, pp 状態とみなすことができる。陽子間の Coulomb 斥力と中性子・陽子の質量差の補正をした後，観測される原子核の質量を図 2·2 に示す。さらに，アイソスピンの保存は，3 つの $I=1$ 状態 ($I_3=-1, 0, 1$) のそれぞれが核物理学的にまったく同等であることを要請する。ちょうどこの事情は回転不変性によって，全角運動量 J の孤立系に属する $2J+1$ 個の状態が，厳密に同等な物理系を記述することと同じである。

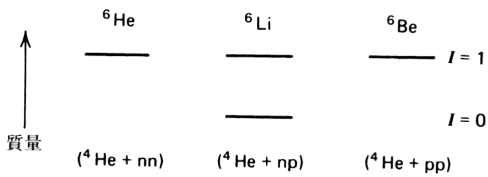


図 2·2 原子核のエネルギー準位。これらの準位は，(2.2) の状態を反映している。^{6}Li の 2 つの状態は，2 MeV ほど離れている。電磁効果を補正すると，^{6}Li の励起状態と ^{6}He および ^{6}Be の基底状態は，質量について縮退していることがわかる。

問題 2.3 アイソスピン不変性を用いて，反応断面積 σ が

$$\frac{\sigma(\mathrm{pp}\to\pi^+\mathrm{d})}{\sigma(\mathrm{np}\to\pi^0\mathrm{d})}=2$$

を満たさねばならないことを示せ。重陽子 d はアイソスピン $I=0$, π は $I=1$ を持つ。

[ヒント] 反応断面積は

$$\sigma\sim|\text{振幅}|^2\sim\sum_I|\langle I',\ I_3'|A|I,\ I_3\rangle|^2$$

と仮定してよい。ここに I, I' は，始，終状態の全アイソスピンであり，$I=I'$, $I_3=I_3'$.

2.2 節～2.9 節で，これらの考え方を拡張し，いくつかの役に立つ群論の概念を導入することにしよう。この種の議論に通じている読者は，これらの節を飛ばし，必要に応じてそれぞれの結果を参照すればよい。

2.2 対称性と群：初等的議論

群論は，対称性を扱うときの基礎となる数学の一分野である。群論の形式的な構造を知る必要はないであろうが，素粒子物理学独特の概念や用語のいくつかを導入するのが便利である。一例として，回転群を考える。

ある系の回転の集合は群を作り，個々の回転が群の要素である。回転 R_1 と R_2 を続けて行えば（"積", R_2R_1 と書く），それは1回の回転（すなわち他の群要素）に等しい。回転の集合は "積" に対して閉じている。単位元または恒等回転（回転しない）が存在する。すべての回転は，逆（元へ戻す回転）を持つ。"積" は必ずしも交換せず $R_1R_2\neq R_2R_1$ であるが，結合則 $R_3(R_2R_1)=(R_3R_2)R_1$ は常に成り立つ。回転群は連続群であるから，個々の回転は，連続的に変わるパラメター $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ の集合で表される。これらは，回転軸方向のベクトル $\boldsymbol{\alpha}$ の成分とみなすことができ，その大きさは回転角で与えられる。

回転群は Lie 群である。重要な性質は，すべての回転は，続けて行った無限小回転（恒等回転に十分近い回転）の積で表される，ということである。したがって，群は "恒等回転の近傍" で完全に定義できる。

実験結果が，測定している実験室の特別な向きに依存するようなことがあっては困る。つまり回転は，系の対称群を作らなければならない。回転は Lorentz 変換の部分群である。Lorentz 変換を系に作用させて，系を静止させることができる。定義から，物理学の内容は対称性を持った演算を施しても変わらない。とくに，これらの演算は系の遷移確率を不変に保つ。たとえば，回転 R によって系の状態が

$$|\psi> \longrightarrow |\psi'> = U|\psi> \tag{2.3}$$

のように変換されるとしよう。$|\psi>$ で記述される系が状態$|\phi>$ の中に見出される確率は，R によって不変でなければならないから

$$|<\phi|\psi>|^2 = |<\phi'|\psi'>|^2 = |<\phi|U^{\dagger}U|\psi>|^2. \tag{2.4}$$

つまり，U はユニタリー演算子でなければならない。演算子 $U(R_1), U(R_2), \cdots$ は，もとの群 $R_1, R_2, \cdots$ と厳密に同じ構造の群を作る。このとき，$U(R_1)$, $U(R_2)$, $\cdots$ は回転群のユニタリー表現を作るという。

さらに，ハミルトニアンは系の対称演算 R によって不変であり，行列要素は保存される：

$$<\phi'|H|\psi'> = <\phi|U^{\dagger}HU|\psi> = <\phi|H|\psi>.$$

したがって

$$H = U^{\dagger}HU \quad すなわち \quad [U, H] \equiv UH - HU = 0. \tag{2.5}$$

変換 U は，あからさまに時間には依存しない。運動方程式

$$i\frac{d}{dt}|\psi(t)> = H|\psi(t)> \tag{2.6}$$

は対称演算によって不変である。その結果，U の期待値は運動の定数になる：

$$i\frac{d}{dt}<\psi(t)|U|\psi(t)> = <\psi(t)|UH - HU|\psi(t)> = 0. \tag{2.7}$$

群のすべての性質は，恒等変換の近傍での無限小回転から導くことができる。一例として，3軸(z軸)のまわりの無限小角 ε の回転を考える。ε の1次までで U は

$$U = 1 - i\varepsilon J_3 \tag{2.8}$$

と書くことができる。演算子 J_3 を第3軸のまわりの回転の生成演算子とよぶ。ここに

$$\begin{aligned} 1 = U^{\dagger}U &= (1 + i\varepsilon J_3^{\dagger})(1 - i\varepsilon J_3) \\ &= 1 + i\varepsilon(J_3^{\dagger} - J_3) + O(\varepsilon^2). \end{aligned}$$

すなわち J_3 はエルミートであり，したがって(量子力学的な)観測可能量であるから，(2.8) で i を導入したのである。

観測可能量 J_3 を同定するため，系を記述する波動関数 $\psi(\boldsymbol{r})$ に対する回転の効果を考える。まず，2つの立場を区別しなければならない。すなわち，軸を回転し物理系を固定する(受動的立場)か，軸を固定し物理系を回転する(能動的立場)かのどちらかである。2つの観点は同等である。軸を θ だけ回転することは，物理系を $-\theta$ だけ回転することと同等である。ここでは能動的な立場を

とり，物理系を回転する。$\boldsymbol{r}$ における回転状態を記述する波動関数 ψ' は，$R^{-1}\boldsymbol{r}$ におけるもとの波動関数 ψ に等しい。$R^{-1}\boldsymbol{r}$ という点は，回転 R によって $\boldsymbol{r}$ へ変換される。すなわち

$$\psi'(\boldsymbol{r})=\psi(R^{-1}\boldsymbol{r}). \tag{2.9}$$

これは，ψ' と ψ の間の 1 対 1 対応を規定する。これを

$$\psi'=U\psi \tag{2.10}$$

と書いた (2.3 節参照)。z 軸のまわりの無限小回転 ε に対して，(2.9)，(2.10) は次のようになる：

$$\begin{aligned}U\psi(x,y,z)&=\psi(R^{-1}\boldsymbol{r})\simeq\psi(x+\varepsilon y,y-\varepsilon x,z)\\&\simeq\psi(x,y,z)+\varepsilon\left(y\frac{\partial\psi}{\partial x}-x\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)\\&=(1-i\varepsilon(xp_y-yp_x))\psi.\end{aligned} \tag{2.11}$$

(2.11) を (2.8)，すなわち

$$U\psi=(1-i\varepsilon J_3)\psi$$

と比較すれば，3 軸のまわりの回転の生成演算子 J_3 は，角運動量演算子の第 3 成分になっていることがわかる。(2.7) から観測可能量 J_3 の固有値は運動の定数，すなわち，保存する量子数である。つまり，系の対称性から保存則が導かれたのである。ある装置の向きを変えて行った実験が，もとと同じ物理的結果を与えるという事実 (回転対称性) から，角運動量の保存が導かれたのである。

有限角 θ の回転は，無限小回転を n 回続けて行えば実現することができる：

$$U(\theta)=(U(\varepsilon))^n=\left(1-i\frac{\theta}{n}J_3\right)^n\xrightarrow[n\to\infty]{}e^{-i\theta J_3}. \tag{2.12}$$

1 軸と 2 軸のまわりの回転につき，同じようなエルミート生成演算子 J_1, J_2 を導入することができる。生成演算子の交換子が満たす代数は

$$[J_j,\ J_k]=i\varepsilon_{jkl}J_l \tag{2.13}$$

となる (問題 2.4 参照)。ここに j,k,l を 1 2 3 の順序 (逆順) で循環するときは $\varepsilon_{jkl}=+1\ (-1)$，$j,k,l$ のどれか 2 つが等しいときは $\varepsilon_{jkl}=0$ である。(2.13) の関係が群の性質を完全に定義する。ε_{jkl} は群の構造定数と呼ばれ，J は Lie 代数を作るという。どの 2 つの J も可換ではないので，1 つの生成演算子，たとえば J_3 の固有値のみを量子数として使うことができる。

問題 2.4　4 回続けて無限小回転 (1 軸のまわりに ε，2 軸のまわりに η，1 軸のまわりに $-\varepsilon$，2 軸のまわりに $-\eta$) を行ったものは，3 軸のまわりの 2 次の回転 $\varepsilon\eta$ に等しいことを示せ。また，これから生成演算子が

$$[J_1,\ J_2]=iJ_3$$

を満たすことを示せ。

すべての生成演算子と可換な生成演算子の非線形関数を，不変量，または Casimir 演算子と呼ぶ。回転群に対しては

$$J^2=J_1{}^2+J_2{}^2+J_3{}^2 \tag{2.14}$$

が唯一の Casimir 演算子である：

$$[J^2,\ J_i]=0 \qquad i=1,2,3 \tag{2.15}$$

これから J^2 と生成演算子の 1 つ，たとえば J_3 の同時固有状態 $|jm>$ を作ることができる。(2.13) だけを用いて，

$$\begin{aligned} J^2|jm>&=j(j+1)|jm>,\\ J_3|jm>&=m|jm> \end{aligned} \tag{2.16}$$

が示される。ここに，$m=-j,-j+1,\cdots,j$，j は $0,1/2,1,3/2,\cdots$ の 1 つの値をとる。

問題 2.5 (2.16) を確かめよ。それにはいわゆる "昇降" 演算子

$$J_\pm=J_1\pm iJ_2 \tag{2.17}$$

を作るのが便利である。まず

$$J_\pm|jm>=(C-m(m\pm1))^{1/2}|j,\ \ m\pm1> \tag{2.18}$$

を示せ。すなわち $J_\pm$ は m を 1 だけ増・減させる。また $C=j(j+1)$ を示せ。

2 軸のまわりの角度 θ の回転によって，状態 $|jm>$ は $(2j+1)$ 個の状態 $|jm'>$ の 1 次結合に変換される：

$$e^{-i\theta J_2}|jm>=\sum_{m'}d^j{}_{m'm}(\theta)|jm'> \qquad m=-j,-j+1,\cdots,j \tag{2.19}$$

係数 $d^j{}_{m'm}$ はよく使う記法であり，しばしば回転行列と呼ばれている。(2.19) から，同じ j に対して許される m を持つすべての状態は，回転によってそれらの状態間だけで変換することがわかる。事実，$(2j+1)$ 個のすべての状態は，回転によって混じり合う。これらの状態は，回転群の $(2j+1)$ 次元既約表現の基底を作る。この状態の集合を多重項 (multiplet) と呼ぶ。

問題 2.6 回転行列

$$d^j{}_{m'm}(\theta)=<jm'|e^{-i\theta J_2}|jm>$$

は，次頁のようになることを示せ：

$$j=\frac{1}{2}\begin{cases} d_{++}=d_{--}=\cos\frac{1}{2}\theta \\ d_{-+}=-d_{+-}=\sin\frac{1}{2}\theta \end{cases} \tag{2.20}$$

ここで，±は $m=\pm 1/2$ を示す。$J=1$ の場合は，

$$j=1\begin{cases} d_{01}=-d_{10}=-d_{0-1}=d_{-10}=\sqrt{\frac{1}{2}}\sin\theta \\ d_{11}=d_{-1-1}=\frac{1}{2}(1+\cos\theta) \\ d_{-11}=d_{1-1}=\frac{1}{2}(1-\cos\theta) \\ d_{00}=\cos\theta \end{cases} \tag{2.21}$$

2.3　$SU(2)$ 群

回転群の中で意味のある最低次元の表現 ($j=1/2$) では，生成演算子は

$$J_i=\frac{1}{2}\sigma_i \qquad i=1,2,3 \tag{2.22}$$

と書くことができる。σ_i は Pauli 行列を表す：

$$\sigma_1=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix},\qquad \sigma_2=\begin{pmatrix}0&-i\\i&0\end{pmatrix},\qquad \sigma_3=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}. \tag{2.23}$$

この表現の基底 (あるいは基底の集合) には，普通 σ_3 の固有ベクトル，すなわち列ベクトル

$$\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\quad \text{および}\quad \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$

を選ぶ。これはスピン1/2 粒子の 3 軸へのスピン射影が，上向き ($m=+1/2$, ↑) および下向き ($m=-1/2$, ↓) であることを記述する。

Pauli 行列 σ_i はエルミート，したがって変換行列

$$U(\theta_i)=e^{-i\theta_i\sigma_i/2} \tag{2.24}$$

はユニタリーである。すべての 2 行 2 列のユニタリー行列の集合は $U(2)$ 群として知られている。生成演算子 σ_i のトレースはすべて 0 だから，$U(2)$ は行列 $U(\theta_i)$ の群より大きい。エルミートでトレース 0 の任意の行列 σ に対して，

$$\det(e^{i\sigma})=e^{i\mathrm{Tr}(\sigma)}=1 \tag{2.25}$$

を示すことができる。値が 1 の行列式は行列の掛算では保存されるから，トレース 0 の 2 行 2 列のユニタリー行列は，$U(2)$ の部分群 $SU(2)$ を作る。$SU(2)$

を 2 次元の特殊ユニタリー群と呼ぶ。したがって，変換行列 $U(\theta_i)$ の集合は $SU(2)$ 群を作る。$SU(2)$ 代数は，まさに生成演算子 J_i の代数 (2.13) である。つまり，$j=0, 1/2, 1, 3/2, \cdots$ に対応して，$SU(2)$ の $1, 2, 3, 4, \cdots$ 次元表現が存在する。2 次元表現は，もちろん σ 行列そのものである。それは $SU(2)$ の基本表現と呼ばれる。以下に示すように，その基本表現から他のすべての表現が作られる。

問題 2.7　スピン 1/2 の系を，2 軸のまわりに有限角 θ だけ回転する。これは，ユニタリー変換

$$e^{-i\theta\sigma_2/2}=\cos\frac{\theta}{2}-i\sigma_2\sin\frac{\theta}{2} \tag{2.26}$$

に対応することを示せ。

2.4　表現の合成

角運動量 j_A, j_B を持つ 2 つの系からなる合成系は，基底

$$|j_A j_B m_A m_B> \equiv |j_A m_A>|j_B m_B>$$

で記述される。一方，合成演算子

$$\boldsymbol{J}=\boldsymbol{J}_A+\boldsymbol{J}_B \tag{2.27}$$

もまた，Lie 代数 (2.13) を満たし，J^2, J_3 の固有値は $J(J+1)$，M である。それらは保存する量子数である。次元 $2j_A+1$，$2j_B+1$ を持つ 2 つの既約表現の "積" は，次元 $2J+1$ の既約表現の和に分解される。ここに

$$J=|j_A-j_B|,\ |j_A-j_B|+1,\ \cdots,\ j_A+j_B \tag{2.28}$$

であり，その基底は

$$M=m_A+m_B \tag{2.29}$$

として，$|j_A j_B JM>$ となる。(2.29) は，(2.27) の第 3 成分そのものである。1 つの基底を他の基底で

$$|j_A j_B JM> = \sum_{m_A, m_B} C(m_A m_B ; JM)|j_A j_B m_A m_B> \tag{2.30}$$

のように表すことができる。Cを Clebsch-Gordan 係数と呼ぶ。その値はたとえば，*Review of Particle Properties* (1992) に表になっている。これらの係数は昇降演算子 (2.17)

$$J_-=(J_A)_-+(J_B)_-$$

を "m が最大の状態"

$$|j_A j_B J,\ M=J>=|j_A j_B,\ m_A=j_A,\ m_B=j_B>

にくり返し適用し，必要ならば直交性を利用すれば容易に求められる。

(2.1) は，(2.30) の簡単な例である。2 つのスピン 1/2 粒子 $J_A = J_B = 1/2$ の合成系は，スピン $J = 0, 1$ を持つ。この分解を記号的に

$$2 \otimes 2 = 3 \oplus 1 \tag{2.31}$$

のように書く。ここで既約表現を区別するのに，次元(多重項の大きさ)を用いた。この手続きはただちに拡張できる。第 3 の $j = 1/2$ 状態をつけ加えると

$$\begin{aligned}(2 \otimes 2) \otimes 2 &= (3 \otimes 2) \oplus (1 \otimes 2) \\ &= 4 \oplus 2 \oplus 2.\end{aligned} \tag{2.32}$$

すなわち，3 つのスピン 1/2 粒子は，スピン3/2 の 4 重項と 2 つのスピン 1/2 2 重項に分解される。

2.5 有限対称群：P と C

有限個の要素を持つ群を有限群という。素粒子物理学では，ちょうど 2 つの要素，恒等変換 e および $g^2 = e$ を満たす要素 g を含む非常に単純な対称群に出合う。たとえば，g は空間反転あるいは粒子・反粒子共役である。変換 g に対して物理が不変ならば，g はユニタリー(反ユニタリー)演算子 $U(g)$ によって表される。$U(g)$ は次の関係を満たす (2.5 節参照)：

$$[U, H] = 0. \tag{2.33}$$

時間反転不変性は，反ユニタリー演算子を必要とする唯一の対称性である [たとえば Schiff (1968), Martin and Spearman (1970), Messiah (1962) を参照]。したがってここでは，U をユニタリーにとる。さきに述べた 2 つの要素を持つ群に対しては

$$U^2 = 1 \tag{2.34}$$

が成り立つ。U はユニタリーであるから，エルミートでもなければならない。つまり，U 自身は観測可能な保存量 (2.7 節参照) であり，その固有値は保存する量子数である。もし p が固有ベクトル $|p\rangle$ に対応する U の固有値ならば，

$$U^2 |p\rangle = p^2 |p\rangle. \tag{2.35}$$

(2.34) から，$p^2 = 1$，したがって許される固有値は $p = \pm 1$ である。対称な演算 g (たとえば，空間反転とか粒子・反粒子共役) に対して系が不変であるということは，もし系が U の固有状態 ($U = P, C$) ならば，遷移は同じ固有値を持つ固有状態間にのみ起こりうることを意味する。U の固有値は乗法的量子数となることがわかる。これとは対照的に，$SU(n)$ の可換な生成演算子の固有値は加算

的量子数である。

強い相互作用と電磁相互作用は，P と C のいずれに対しても不変であるが，弱い相互作用ではこのような対称性は成り立たない。しかし，弱い相互作用はよい近似で，積の変換 CP に対して不変である（第 12 章参照）。

2.6　アイソスピンの $SU(2)$

核子は 2 つの許される状態，陽子と中性子という内部自由度を持つとみなすことができるが，これらの状態は核相互作用では区別することができない。このことから，アイソスピンが生れた。したがって，$SU(2)$ 対称性が成り立ち，その中で (n, p) は基本表現を作る。アイソスピンは，数学的にはスピンのコピーとみなすことができるから，その生成演算子は

$$[I_j, I_k] = i\varepsilon_{jkl} I_l \tag{2.36}$$

を満たす（2.13 節参照）。基本表現では生成演算子を $I_i \equiv \tau_i/2$ と書く。ここで

$$\tau_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \tau_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \qquad \tau_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{2.37}$$

は，Pauli 行列 (2.23) のアイソスピン版になっていて，それらは陽子と中性子の状態

$$\mathrm{p} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathrm{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

に作用する。一般に，一番大きい正電荷を持つ粒子を，I_3 の最大値に対応させる。

2.7　反粒子のアイソスピン

反粒子のアイソスピン多重項を作る場合は注意を要する。それは，簡単な例でうまく説明できる。核子の 2 重項の特別なアイソスピン変換，すなわち 2 軸のまわりの 180° 回転を考えよう。(2.26) を参照して，

$$\begin{pmatrix} \mathrm{p}' \\ \mathrm{n}' \end{pmatrix} = e^{-i\pi(\tau_2/2)} \begin{pmatrix} \mathrm{p} \\ \mathrm{n} \end{pmatrix} = -i\tau_2 \begin{pmatrix} \mathrm{p} \\ \mathrm{n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{p} \\ \mathrm{n} \end{pmatrix} \tag{2.38}$$

を得る。粒子・反粒子共役演算子 C を用いて，反粒子状態を

$$C\,\mathrm{p} = \bar{\mathrm{p}}, \qquad C\mathrm{n} = \bar{\mathrm{n}} \tag{2.39}$$

と定義する。(2.38) に C を作用させれば

$$\begin{pmatrix} \bar{p}' \\ \bar{n}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{p} \\ \bar{n} \end{pmatrix} \tag{2.40}$$

となる。ここで，反粒子の 2 重項が粒子の 2 重項と厳密に同じ変換をすることを要請すると，その結果，同じ Clebsh-Gordan 係数を用いて，粒子と反粒子状態を合成できる。ただし，次の 2 点を変更しなければならない。第一に，正電荷の一番大きい状態が $I_3=1/2$ となるように 2 重項を組み変えなければならない。第二に，(2.38) と同じ行列で変換されるように，負号を導入しなければならない。すなわち

$$\begin{pmatrix} -\bar{n}' \\ \bar{p}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\bar{n} \\ \bar{p} \end{pmatrix} \tag{2.41}$$

こうすると，反粒子の 2 重項 $(-\bar{n}, \bar{p})$ は，粒子の 2 重項 (p, n) と厳密に同じ変換をする。これは，$SU(2)$ の特別な性質である。たとえば，反粒子の $SU(3)$ 3 重項は，粒子の 3 重項と同じようには変換しない。

粒子・反粒子対の合成系は，次のようなアイソスピン状態を持つ (2.2 節と比較せよ)。

$$\begin{cases} |I=1,\ I_3=1>=-p\bar{n} \\ |I=1,\ I_3=0>=\sqrt{\dfrac{1}{2}}(p\bar{p}-n\bar{n}) \\ |I=1,\ I_3=-1>=n\bar{p} \end{cases} \tag{2.42}$$
$$|I=0,\ I_3=0>=\sqrt{\frac{1}{2}}(p\bar{p}+n\bar{n})$$

2.8 $SU(3)$ 群

$\det U=1$ を持つ 3 行 3 列のユニタリー行列の集合は，群 $SU(3)$ を作る。生成演算子は，$3^2-1=8$ 個の線形独立で，トレース 0 の Hermite 行列と考えられる。これらトレース 0 の行列のうち 2 つだけが対角化できるので，互いに可換な生成演算子の数も最大 2 つとなる。この数は群のランクと呼ばれる。すなわち $SU(3)$ はランク 2，$SU(2)$ はランク 1 である。Casimir 演算子の数は，群のランクに等しいことが示される。

$SU(3)$ の基本表現は 3 重項である。1.2 節で述べたクォークのカラー荷 R, G, B は，$SU(3)$ 対称群の基本表現を作る。この表現では，生成演算子は 3 行 3 列の行列になる。それを慣習上 λ_i $(i=1,\cdots,8)$ と書くと，対角化された行列は，

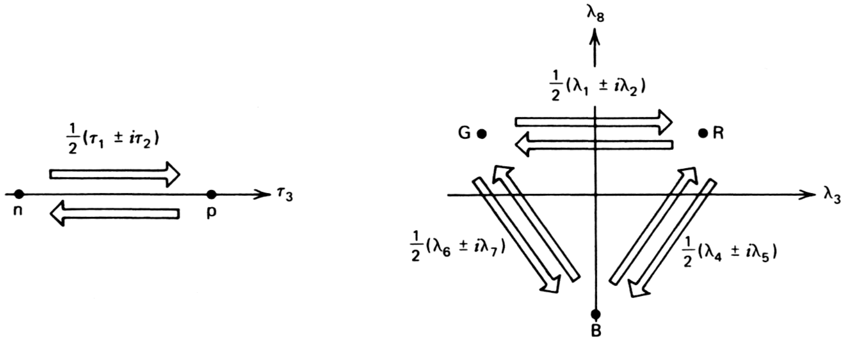


図 2·3 アイソスピン $SU(2)$ とカラー $SU(3)$ の基本表現に対する生成演算子 (τ_i と λ_i) の働き

$$\lambda_3=\begin{pmatrix}1&&\\&-1&\\&&0\end{pmatrix},\qquad \lambda_8=\sqrt{\frac{1}{3}}\begin{pmatrix}1&&\\&1&\\&&-2\end{pmatrix} \tag{2.43}$$

となり，3 つの同時固有ベクトルを

$$\mathrm{R}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\qquad \mathrm{G}=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\qquad \mathrm{B}=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

のように表す。図 2·3 に λ_3, λ_8 の固有値を用いて基底状態 R, G, B を図示した。図は，残りの 6 つの生成演算子が，$SU(2)$ の昇降演算子に類似していることを示している。λ 行列をこのように番号づけすると，$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ は 3 つの Pauli 行列に対応し，したがって明らかに $SU(3)$ の $SU(2)$ 部分群になっている。λ_i は Gell-Mann 行列として知られている。

問題 2.8 図 2·3 の λ_i の行列表示を求めよ。また

$$\left[\frac{\lambda_i}{2}, \frac{\lambda_j}{2}\right]=i\sum_k f_{ijk}\frac{\lambda_k}{2} \tag{2.44}$$

を示せ。ここに $SU(3)$ 構造定数 f_{ijk} は，任意の添字の交換に対して，完全反対称であり，0 でないものは次の通りである：

$$f_{123}=1,\qquad f_{458}=f_{678}=\sqrt{3}/2,\qquad f_{147}=f_{165}=f_{246}=f_{257}=f_{345}=f_{376}=1/2.$$

2.9 $SU(3)$ 群のもう 1 つの例：アイソスピンとストレンジネス

1947 年，パイオンが発見された。そのとき以来，核子はそれまで素粒子物理学の中で占めていた唯一ともいえる地位を失うことになった。引き続き，も

っと多くの強い相互作用をする粒子(ハドロン)が発見された。いくつかの新粒子は，強い相互作用の時間スケールに比べると，驚くほど長寿命であった。しかも，それらの質量は十分重く，電荷やバリオン数の保存則を破ることなく軽い粒子に崩壊できる。たとえば，Σ^- は強い相互作用 $\pi^- p \to K^+\Sigma^-$ で容易に生成されるが，さらに $\Sigma^- \to n\pi^-$ によって弱崩壊する。1.6 節では，典型的な強い崩壊 $\Delta \to n\pi$ との対比を強調した。Gell-Mann と西島-中野は独立に，この現象を，ストレンジネスと呼ぶ新しい加算的量子数 S の現れと考えた。かれらは個々のハドロンに，ストレンジネス S として整数値を与えた：

$$\begin{aligned} S=0: &\quad \pi, N, \Delta, \cdots \\ S=1: &\quad K^+, \cdots \\ S=-1: &\quad \Lambda, \Sigma, \cdots \end{aligned} \tag{2.45}$$

反粒子のストレンジネスは $-S$ とする。かれらは，もし S が反応の前後で保存されないなら，その反応での強・電磁相互作用は禁止されると主張した。Gell-Mann と西島の考えに従えば，Σ の強い相互作用による生成と弱い相互作用による崩壊はたちどころに説明できる。まさしく反応 $\pi^- p \to K^+\Sigma^-$ では，始状態と終状態はともに，全ストレンジネス $S=0$ である((2.45) 参照)。したがって，Σ 粒子は強い相互作用で作られる。Λ の質量は重いので，ストレンジネスを保存する崩壊 $\Sigma \to \Lambda\pi^-$ は運動学的に禁止される。もし運動学的に許されるならば，Σ は強い相互作用 $\Sigma^- \to \Lambda\pi^-$ を通して崩壊できるはずである。Σ^- の崩壊は，ストレンジネス保存を破る過程 $\Sigma^- \to n\pi^-$ を通じてのみ起こる。こうして，Σ^- の長い寿命が "説明" できる (1.6 節参照)。引き続き発見された多くのストレンジ粒子の性質を観察した結果，Gell-Mann と西島-中野の考えの正しいことが確認された。

I_3 に加えて，第二の加算的量子数 S の存在によって，アイソスピン対称性をより大きな群，すなわちランク 2 の群に拡張することは自然な試みであった。この新しい対称群は，よく似た性質を持つハドロンを多重項表現の中にうまくあてはめなければならなかった。この仕事は，アイソスピンの $SU(2)$ 群の場合は比較的容易であった。中性子と陽子は質量がほとんど等しく，$SU(2)$ 2 重項の中にうまく納まった。だが，核子に近い質量を持つストレンジ粒子は存在しないので，適当な群によって同定することは難しく，群の選択は決して自明ではない。$SU(3)$ が 1961 年にはじめて提案された。図 2·8 からわかるように，$SU(3)$ は $n, p, \Sigma^+, \Sigma^0, \Sigma^-, \Lambda, \Xi^0, \Xi^-$ を 8 次元表現に入れるが，それらの質量は約 400 MeV も広がっている。さらに，もっとも軽いメソンも 8 重項にうまく入

る。同じ表現に，K メソンとそれよりずっと軽い π メソン ($m_K>3m_\pi$!) が含まれている。明らかに，ストレンジ粒子とストレンジネスを持たない粒子を関係づけるもう 1 つの対称性は，アイソスピンよりもっと近似的なものである。$SU(3)$ 対称性が確立されたのは，ようやく 1964 年になってからのことであった。いわゆる "素粒子" の $SU(3)$ 多重項の構造は，周期表の化学元素の分類を思い出させる。周期表と同じように，$SU(3)$ の分類は，下部構造の存在を強く示唆している。アイソスピンとストレンジネスについての $SU(3)$ 群の役割は，主として歴史的な意義にあった。つまり，クォークが素粒子物理学に登場する舞台を用意したのである。

今になってわかることだが，$SU(2)$ アイソスピン対称性が成功を収めたのは，本質的に，構成子 u, d クォークの質量が等しいためである。だが，s クォークを組み入れた $SU(3)$ は，$SU(2)$ のようなよい対称性を持たない。むしろそれは，ハドロン状態を分類整理するのに使われる。これを "フレーバー $SU(3)$" と呼ぶ。u, d, s は，クォークのもっとも軽い 3 つのフレーバーである。もっと基本的で厳密な対称性 (第 14 章) であると信じられている "カラー $SU(3)$" とはなんの関係もない。

クォーク "原子"

クォーク模型によれば，すべてのハドロンは，クォークとよばれる少数のもっと基本的な要素から作られていて，その束縛のされ方は多様である。$SU(3)$ の基本表現は 3 重項であり，他のすべての多重項はそれから作られる。基本的なクォーク多重項を図 2·4 に示す。また反クォークの多重項も示してあるが，

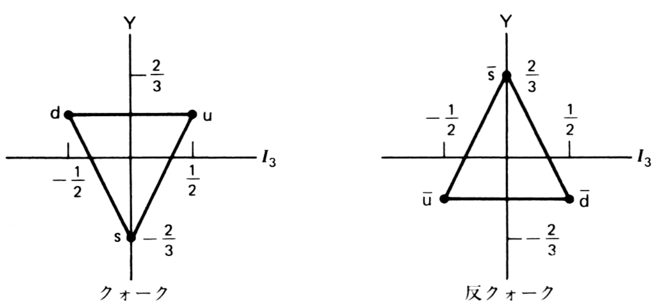


図 2·4　$SU(3)$ クォークと反クォークの多重項：$Y\equiv B+S$

その加算的量子数の符号はクォークと反対である。各クォークは，スピン 1/2，バリオン数 $B=1/3$ を持つ。バリオンはクォーク 3 個 (qqq)，メソンはクォーク・反クォーク対 ($q\bar{q}$) からなる。図 2·4 には新しい加算的量子数 "ハイパー荷"

$$Y=B+S \tag{2.46}$$

をストレンジネスのかわりに示した。とくに物理的な理由があるわけではなく，単に多重項の中心を座標の原点に一致させるためである。電荷 Qe は，

$$Q=I_3+\frac{Y}{2}$$

で表される。表 2-1 に，クォークの量子数をまとめた。バリオン数保存は，1 個のクォークを消したり作ったりできないことを意味する。しかし，クォーク・反クォーク対 (メソン) を生成・消滅させることはできる。さらに，クォークは強い相互作用と電磁相互作用に対しては，フレーバーを変えない。すなわち，$s \to u+$レプトン，$s \to u+d\bar{u}$ のような遷移は，弱い相互作用を通してのみ可能である。

表 2-1　クォークの量子数 ($Y=B+S$，$Q=I_3+Y/2$)†

クォーク	スピン	B	Q	I_3	S	Y
u	1/2	1/3	2/3	1/2	0	1/3
d	1/2	1/3	−1/3	−1/2	0	1/3
s	1/2	1/3	−1/3	0	−1	−2/3

† S はストレンジネスを表す。

2.10　クォーク・反クォーク状態：メソン

クォーク模型では，メソンはクォークと反クォークの束縛状態である。まず 2 つのフレーバー u, d からはじめよう。$q\bar{q}$ 束縛状態の波動関数は，(2.42) で，$p \to u$ および $n \to d$ の置き換えをすればただちに得られる。したがって，メソンの荷電 3 重項と 1 重項は次のようになる：

$$\begin{cases} |I=1,\ I_3=1>=-u\bar{d}, \\ |I=1,\ I_3=0>=\frac{1}{\sqrt{2}}(u\bar{u}-d\bar{d}), \\ |I=1,\ I_3=-1>=d\bar{u}, \end{cases} \tag{2.47}$$

$$|I=0,\ I_3=0>=\frac{1}{\sqrt{2}}(u\bar{u}+d\bar{d}).$$

クォークの 3 つのフレーバー u, d, s に対して，9 つの可能な $q\bar{q}$ 状態がある。

こうして作られた多重項構造を図 2·5 (b) に示す。それは，反クォーク 3 重項の重心を，クォーク 3 重項の 3 つの項点 (u, d, s) に重ねれば，ただちに作ることができる (図 2·5 (a) 参照)。9 つの状態は，$SU(3)$ 8 重項と $SU(3)$ 1 重項に分かれる。すなわち，$SU(3)$ 群の演算に対して，8 つの状態 (8 重項) はそれ自身の中で変換し，1 重項とは混じり合わない。これは $SU(2)$ のよく知られた分解 ((2.31) あるいは (2.47)) を $SU(3)$ に拡張したことに相当する。

9 つの $q\bar{q}$ 状態の中で，図 2·5 の 3 つの状態 A, B, C は $I_3 = Y = 0$ を持つことに注意する。これらは，$u\bar{u}, d\bar{d}, s\bar{s}$ 状態の 1 次結合である。1 重項 C は 3 つのフレーバーを同じ割合で含む。したがって規格化を考慮すれば

$$C = \sqrt{\frac{1}{3}}(u\bar{u} + d\bar{d} + s\bar{s}) \tag{2.48}$$

になる。状態 A は，アイソスピン 3 重項 $(d\bar{u}, A, -u\bar{d})$ の 1 つであり，

$$A = \sqrt{\frac{1}{2}}(u\bar{u} - d\bar{d}) \tag{2.49}$$

と表される ((2.47) 参照)。アイソスピン 1 重項 B は，A と C に直交するという要請から

$$B = \sqrt{\frac{1}{6}}(u\bar{u} + d\bar{d} - 2s\bar{s}) \tag{2.50}$$

となることがわかる。

他のあらゆる量子力学的な束縛状態と同じように，$q\bar{q}$ 対は回転，振動など，$q\bar{q}$ の異なる励起モードに対応するとびとびのエネルギー準位スペクトルを持つ。これらは観測されたメソン状態に対応しなければならない。クォークと反クォークを束縛するポテンシャルの知識がなくても，このモデルは非常に多くのことを予言する。クォークはスピン 1/2 を持つから，$q\bar{q}$ 対の全内部スピンは $S=0$ または 1 となる。クォークの複合系としてのメソンのスピン J は，スピン S と $q\bar{q}$ の相対軌道角運動量 L との和で与えられる。また，メソンのパリティは

$$P = -(-1)^L \tag{2.51}$$

である。ここで負号は，q と $\bar{q}$ の内部パリティが逆のためである ((5.63) 参照)。$(-1)^L$ は，$q\bar{q}$ 波動関数の角度依存項 $Y_{LM}(\theta, \phi)$ に対して，空間反転 $\theta \to \pi - \theta$, $\phi \to \phi + \pi$ を行ったとき生じる。中性 $q\bar{q}$ 系は，粒子・反粒子共役演算子 C の固有状態である。C の値は，q と $\bar{q}$ を入れ換え，さらにその位置とスピンも交換して求められる。これらの演算を組み合わせて

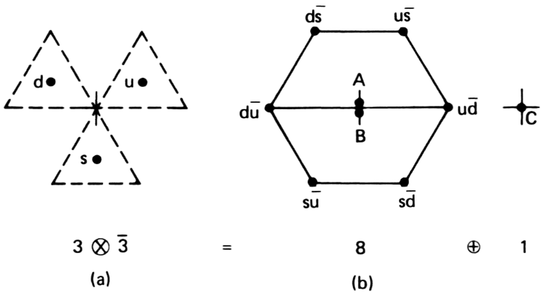


図2·5　メソン9重項に含まれるクォーク。I_3-Y 平面上での $SU(3)$ 分解を示す。

$$C=-(-1)^{S+1}(-1)^{L}=(-1)^{L+S} \tag{2.52}$$

が得られる。ここで，負号はフェルミオンの交換から，$(-1)^{S+1}$ は $q\bar{q}$ スピン状態の対称性から生ずる (2.1 節参照)。$(-1)^{L}$ は前述した通りである。S は $q\bar{q}$ 対の全内部スピンを表す。基底状態 ($L=0$) と第一励起状態 ($L=1$) の可能な量子数を，状態の候補とされているメソンとともに表 2-2 に示す。各9重項には，2つのアイソスピン2重項がある (図2·5参照)。たとえば $J^P=0^-$ 9重項には，

$$\begin{aligned} &K^0(d\bar{s}),\ K^+(u\bar{s}):\quad Y=1, \\ &K^-(s\bar{u}),\ \bar{K}^0(s\bar{d}):\quad Y=-1 \end{aligned} \tag{2.53}$$

が属している。これらの擬スカラーメソンは，$Y=0$ のアイソスピン3重項 (π^+, π^0, π^- 状態)，$I=0$ 状態 (η メソン) とともに8重項を作っている。$SU(3)$ 1重項には η' メソンをあてる (表 2-2 参照)。

1^- と 2^+ 9重項では，2つの $I=0$ 状態，すなわち中性8重項 (2.50) と1重項 (2.48) は混じり合うことがわかっている。その結果，物理的な粒子は，よい近似で，ストレンジクォークのみ，あるいは非ストレンジクォークのみから作られ

表 2-2　u, d, s クォークで作られ，観測されているメソンの量子数

$q\bar{q}$ 軌道角運動量	$q\bar{q}$ スピン	J^{PC}	観測されている9重項 $I=1$	$I=1/2$	$I=0$	代表的質量 (MeV)
$L=0$	$S=0$	0^{-+}	π	K	η, η'	500
	$S=1$	1^{--}	ρ	K^*	ω, ϕ	800
$L=1$	$S=0$	1^{+-}	B	Q_2	H, ?	1250
		2^{++}	A_2	K^*	f, f′	1400
	$S=1$	1^{++}	A_1	Q_1	D, ?	1300
		0^{++}	δ	$\varkappa$	ε, S^*	1150

る。たとえば，ベクトル (1^-) 9 重項では

$$\phi \approx s\bar{s}, \qquad \omega \approx \frac{1}{\sqrt{2}}(u\bar{u}+d\bar{d}). \tag{2.54}$$

しかし，次の点を注意しておく。一般に物理的な中性 $q\bar{q}$ 状態は，まったく同じ量子数で互いに直交する 1 重項と $I=0$ 中性 8 重項の量子力学的な重ね合わせである。たとえば η は 8 重項であるといったが，実際には 1 重項がわずかに混じっている。

表 2-2 において，L とスピン S はよい量子数として期待できそうにない。しかし，パリティ保存は，L の偶数状態と奇数状態が混じり合うことを禁止する。したがって，C 保存が多重項のスピン S を一義的に決める。つまり $S=1$ では，L が 2 だけ異なる状態のみが混じり合う。

表 2-2 の $L=1$ 状態は，軌道励起の一例である。励起エネルギーの典型的な大きさは約 600 MeV である。ポジトロニウムと同じように，動径励起も期待できる。たとえば，より高い質量を持つ $L=0$ の 9 重項がふたたび現れる。

表 2-2 の観測された状態にいろいろな名前がつけられているのは，多くの実験家がメソンを同定し，その量子数を決定するという困難な仕事に従事していた時代の名残りである。それにしても，クォーク模型の成功は確かに印象的であった。確立されたメソンはすべて，予期された $q\bar{q}$ 多重項に入っている。クォークの直接の証拠となる，十分高い精度を持つ良質のデータがはじめて提出されたのは 1971 年のことであったが，それ以前は，このスペクトロスコピーの検証が，クォーク仮説を受け入れる主な根拠であった。

問題 2.9 (2.54) と (2.53) を用いて，ϕ メソンの崩壊様式と分岐比を予想せよ (質量 1020 MeV)。また共鳴状態の幅について考察せよ。

問題 2.10 なぜ高エネルギーにおける反応 $\pi N \to (\pi\pi) N$ が，$\pi\pi$ チャネルに結合するメソンを同定するのに，とくにすぐれた方法であるかを説明せよ。また，これらのメソンに対して，$I+J$ は偶数でなければならないことを示せ。

ところで，強い相互作用で崩壊する粒子は，実験家の検出器の中に飛跡を残すほど長く生きてはいないことに注意すべきである。むしろそれらの粒子は，崩壊粒子の飛跡を追いかけて同定される。崩壊粒子の質量は，その静止系で測定した生成粒子の全エネルギーに等しい。寿命が短いために，質量決定の不確定さ ($\hbar/\Delta t$) は十分大きく直接観測にかかる。たとえば，Δ は πN 散乱，$\pi N \to \Delta \to \pi N$ で作られ，ただちに崩壊する。このような不安定粒子の崩壊は，指数

法則

$$|\psi(t)|^2 = |\psi(0)|^2 e^{-\Gamma t} \tag{2.55}$$

に従う。ここで，$\tau \equiv 1/\Gamma$ を状態の寿命と呼ぶ。不安定状態 $\psi(t)$ の時間依存性は崩壊因子 $\Gamma/2$ を含まなければならない。すなわち，M を崩壊粒子の静止質量とすれば

$$\psi(t) \sim e^{-iMt} e^{-\Gamma t/2}.$$

πN の重心系のエネルギー E の関数として，状態は次の Fourier 変換で記述できる。

$$\chi(E) = \int \psi(t) e^{iEt}\, dt$$

$$\sim \frac{1}{E - M + i\Gamma/2}. \tag{2.56}$$

つまり，実験家がみる πN 反応率は

$$|\chi(E)|^2 = \frac{1}{(E-M)^2 + (\Gamma/2)^2} \tag{2.57}$$

のような形をとる。この関数は，中心が $E=M$ で，幅 Γ の鋭いピークを持つ。(2.57) を Breit-Wigner の共鳴公式という。M と Γ は，共鳴状態の質量および幅である。共鳴を詳しく解析する場合には，(2.55) の式はさらに運動学的因子を含む。たとえば，閾値近くの共鳴状態の生成と崩壊は，位相体積によっておさえられる。つまり，観測される幅は，運動学的因子によって狭くなる。

2.11　3体クォーク状態：バリオン

27 の可能な (qqq) 状態をフレーバー $SU(3)$ で分解すると，メソンより多くの状態が現れる。にもかかわらず，バリオンのクォーク構成は，同じ方法でただちに求められる。はじめに 2 つのクォークを組み合わせる。図 2·6 からわか

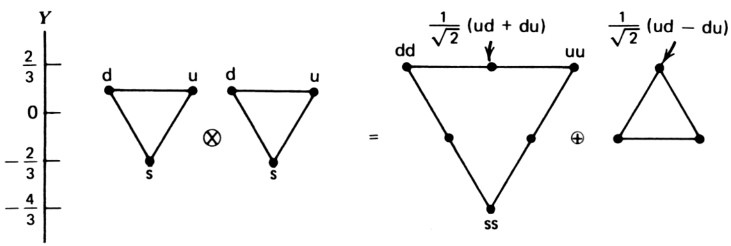


図 2·6　qq $SU(3)$ 多重項

るように，qq の組み合わせでできる 9 つの状態は，2 つの $SU(3)$ 多重項にまとめられる。すなわち

$$3\otimes 3=6\oplus\overline{3}. \tag{2.58}$$

ここで 6 は，2 つのクォークの入れ換えに対して対称，$\overline{3}$ は反対称である。ストレンジネスのない世界のクォーク構成要素は，2 つの (d, u) アイソスピン 2 重項の組み合わせから得られる。それを図 2·6 に具体的に示すが，これは (2.2) において n → d, p → u の置き換えをしたものにすぎない。まったく同じようにして，他の状態もクォークで構成することができる。たとえば，2 つの (s, d) 2 重項を組み合わせると，s と d のセクター (部分) で可能な状態が作られる。図 2·6 で，dd と ss を結ぶ線上にある状態は $(ds+sd)/\sqrt{2}$ である。この組み合わせが U スピン 2 重項であり，u と s のセクターでは V スピンが現れる。I, U, V スピンの数学はまったく同じであり，$SU(2)$ 群に基づいている。$SU(2)$ 群は普通のスピンをも記述する。事実，われわれが必要とするすべての $SU(3)$ 構造は，$SU(2)$ を次々に作用させることによって容易に得られる。

さてここで，3 番目のクォーク 3 重項をつけ加えてみよう。最終的な分解の結果は

$$\begin{aligned}3\otimes 3\otimes 3&=(6\otimes 3)\oplus(\overline{3}\otimes 3)\\&=10\oplus 8\oplus 8\oplus 1\end{aligned} \tag{2.59}$$

となり，図 2·7 に示す。たとえば，3 通りの "uud" が作られるが，図では Δ, p_S, p_A と記してある。ストレンジネスを持たない $\overline{3}$ (図 2·6) に，3 つの u クォークを組み合わせると，ただちに

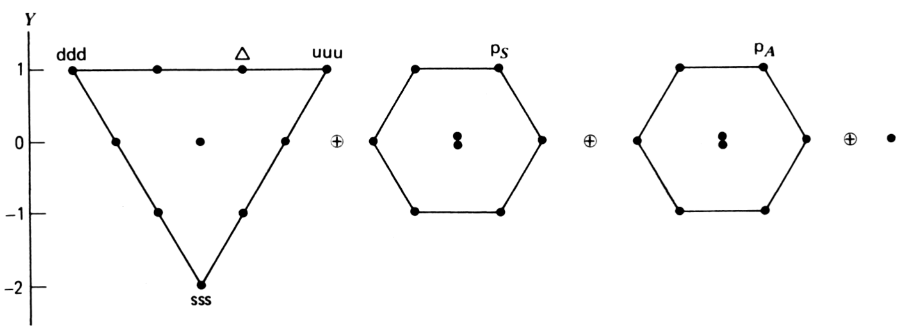


図 2·7　qqq $SU(3)$ 多重項

$$p_A = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathrm{ud}-\mathrm{du})\mathrm{u} \tag{2.60}$$

を得る。10 重項状態はクォークの交換に対して完全対称になっている。このことは，10 重項に属する (uuu),(ddd),(sss) をみれば明らかである。"uud" の対称な組み合わせは，

$$\Delta = \frac{1}{\sqrt{3}}[\mathrm{uud}+(\mathrm{ud}+\mathrm{du})\mathrm{u}] \tag{2.61}$$

となる。残る "uud" 状態が，p_A と Δ の両方に直交するという条件から

$$p_S = \frac{1}{\sqrt{6}}[(\mathrm{ud}+\mathrm{du})\mathrm{u}-2\,\mathrm{uud}] \tag{2.62}$$

を得る。p_S と p_A は混合対称である。添字 S と A は，p_S, p_A がはじめの 2 つのクォークの交換に対して，対称か反対称かを示している。他の状態のクォーク構造も，(U または V スピンを作用させて) 同じ方法で導くことができる。

問題 2.11　3 つの "dds" 状態につき，クォークの組み合わせを書け。

問題 2.12　6 つの "uds" 状態の構造を決定せよ。とくに $SU(3)$ 1 重項は，完全反対称の組み合わせ

$$(\mathrm{qqq})_{\mathrm{singlet}} = \frac{1}{\sqrt{6}}(\mathrm{uds}-\mathrm{usd}+\mathrm{sud}-\mathrm{sdu}+\mathrm{dsu}-\mathrm{dus}) \tag{2.63}$$

であることを示せ。

基底状態では，バリオンのスピンは，スピン 1/2 の角運動量を 3 つ加え合わせることによって求められる。スピン状態の多重項を用いて分解式を書けば

$$2\otimes 2\otimes 2 = (\underset{S}{3}\oplus \underset{A}{1})\otimes 2 = \underset{S}{4}\oplus \underset{M_s}{2}\oplus \underset{M_A}{2} \tag{2.64}$$

を得る ((2.32) 参照)。つまり $S=3/2, 1/2, 1/2$ を持つバリオンのスピン多重項が現れる。混合対称の 2 重項 M_S, M_A の添字は，はじめの 2 つのクォークの交換に対して，スピン状態が対称か反対称かを示す。4 つの $S=3/2$ スピン状態は，完全対称である。

(2.60)-(2.62) を導くにあたって，われわれは $SU(3)$ の中のアイソスピン $SU(2)$ の部分を問題にしてきたことを注意しておく。したがって，$\mathrm{u}\to\uparrow, \mathrm{d}\to\downarrow$ のような置き換えをすれば，上の議論をそのまま $SU(2)$ スピンに適用できる。この類似性から，3 つのスピン多重項 (S, M_S, M_A) のそれぞれに属するスピン "上向き" 状態の構造がただちに求められる。すなわち

$$\chi(S) = \frac{1}{\sqrt{3}}(\uparrow\uparrow\downarrow+\uparrow\downarrow\uparrow+\downarrow\uparrow\uparrow),$$

$$\chi(M_S)=\frac{1}{\sqrt{6}}(\uparrow\downarrow\uparrow+\downarrow\uparrow\uparrow-2\uparrow\uparrow\downarrow), \tag{2.65}$$

$$\chi(M_A)=\frac{1}{\sqrt{2}}(\uparrow\downarrow\uparrow-\downarrow\uparrow\uparrow).$$

クォーク模型から期待されるバリオンを数え上げるには，$SU(3)$ フレーバー分解 (2.59) と，$SU(2)$ スピン分解 (2.64) を組み合わせる必要がある：

$$(\underset{S}{10}+\underset{M_S}{8}+\underset{M_A}{8}+\underset{A}{1}),\qquad(\underset{S}{4}+\underset{M_S}{2}+\underset{M_A}{2}). \tag{2.66}$$

積の対称性を考えると，$(SU(3), SU(2))$ の多重項は，次のように分解できる：

$$\begin{aligned} S&:(10,4)+(8,2)\\ M_S&:(10,2)+(8,4)+(8,2)+(1,2)\\ M_A&:(10,2)+(8,4)+(8,2)+(1,2)\\ A&:(1,4)+(8,2) \end{aligned} \tag{2.67}$$

ここでたとえば，完全対称 (S) 8 重項は，

$$\frac{1}{\sqrt{2}}[(\underset{M_S}{8},\underset{M_S}{2})+(\underset{M_A}{8},\underset{M_A}{2})] \tag{2.68}$$

の組み合わせから作られる。最低質量のバリオンは，対称スピン (3/2) 10 重項 (10, 4) とスピン (1/2) 8 重項 (3, 2) の中にうまく納まる (図 2·8 参照)。

ここで，基底状態の対称性が 1 つの問題を投げかけた。たとえば，スピン 3/2 の Δ^{++} は，対称波動関数

$$u\uparrow u\uparrow u\uparrow \tag{2.69}$$

で記述される。ところで，同種フェルミオンであるクォーク交換に対しては，

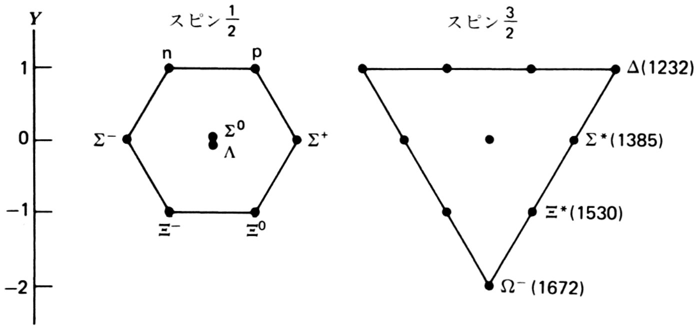


図 2·8　バリオンの基底状態：(8, 2)＋(10, 4)

反対称のはずである。この問題は，第1章でもふれたように，クォークに新しい特性，3つのカラー RGB を与えることによって解決される。クォークは $SU(3)$ カラー対称性の基本3重項を作る。それは $SU(3)$ フレーバーとは違って，厳密な対称性であると信じられている。ハドロンはすべてカラーを持たない。すなわちハドロンは，$SU(3)$ カラー群の1重項表現に属する。バリオンのカラー波動関数は，したがって

$$(\mathrm{qqq})_{\mathrm{col.singlet}}=\frac{1}{\sqrt{6}}(\mathrm{RGB}-\mathrm{RBG}+\mathrm{BRG}-\mathrm{BGR}+\mathrm{GBR}-\mathrm{GRB}) \qquad (2.70)$$

のように表される((2.63) 参照)。これで全波動関数に要求される反対称性が実現された。つまり，空間，スピン，フレーバーについては全体として対称，カラーについては反対称である。カラー構造 (2.70) は，すべてのバリオンに共通であるから，以後おもてだって書くことはしないが，空間×スピン×フレーバーに対しては全体として対称な表現のみを選ばなければならない。

具体的なクォーク模型の波動関数の一例として，スピン上向き陽子の波動関数を考えよう。(2.68) から

$$|\mathrm{p}\uparrow\rangle=\sqrt{\frac{1}{2}}(\mathrm{p}_S\chi(M_S)+\mathrm{p}_A\chi(M_A))$$

が得られる。ここで，フレーバーとスピンの成分は，(2.60)，(2.62)，(2.65) で与えられる。したがって，全体の負号は落として，次式を得る：

$$\begin{aligned}|\mathrm{p}\uparrow\rangle&=\sqrt{\frac{1}{18}}[\mathrm{uud}(\uparrow\downarrow\uparrow+\downarrow\uparrow\uparrow-2\uparrow\uparrow\downarrow)+\mathrm{udu}(\uparrow\uparrow\downarrow+\downarrow\uparrow\uparrow-2\uparrow\downarrow\uparrow)\\&\quad+\mathrm{duu}(\uparrow\downarrow\uparrow+\uparrow\uparrow\downarrow-2\downarrow\uparrow\uparrow)]\\&=\sqrt{\frac{1}{18}}[\mathrm{u}\uparrow\mathrm{u}\downarrow\mathrm{d}\uparrow+\mathrm{u}\downarrow\mathrm{u}\uparrow\mathrm{d}\uparrow-2\mathrm{u}\uparrow\mathrm{u}\uparrow\mathrm{d}\downarrow+(\mathrm{u,d}\text{ を交換した項})].\end{aligned} \qquad (2.71)$$

問題 2.13 クォーク模型により波動関数 $|\mathrm{p}\downarrow\rangle, |\mathrm{n}\uparrow\rangle, |\mathrm{n}\downarrow\rangle$ を作れ。電荷演算子を $Q=\sum_i Q_i$ で定義する。Q_i は陽子の電荷 e を単位としたクォークの電荷である。上式の和はハドロンを構成するクォークについて加える。また，次の関係を示せ。

$$\langle\mathrm{p}\uparrow|Q|\mathrm{p}\uparrow\rangle=\langle\mathrm{p}\downarrow|Q|\mathrm{p}\downarrow\rangle=1,$$
$$\langle\mathrm{n}\uparrow|Q|\mathrm{n}\uparrow\rangle=\langle\mathrm{n}\downarrow|Q|\mathrm{n}\downarrow\rangle=0.$$

問題 2.14 π^+ を構成しているクォークのスピン，フレーバー，カラーによって，π^+ の波動関数を表せ。

問題 2.15 光子は U スピンスカラー，すなわち $U=0$ であることを確かめよ。図 2·8 を調べて，もし $SU(3)$ フレーバー対称性が厳密に成り立つなら，電磁崩壊 $\Sigma^*(1385)^-\to\Sigma^-\gamma$ は禁止されるが，$\Sigma^*(1385)^+\to\Sigma^+\gamma$ は許されることを示せ。

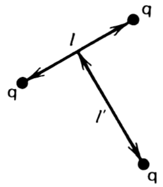


図 2·9 qq および (qq)q 系の軌道角運動量を，それぞれ l および l' とする。

3 つのクォークは，バリオンの基底状態では軌道角運動量を持たない。したがって図 2·9 において $l=l'=0$ なので，状態のパリティ $(-1)^{l+l'}$ は正になる。第一励起状態は，$l=1$，$l'=0$，または $l=0$，$l'=1$ である。事実 (2.67) の混合対称多重項を組み合わせると，完全対称な空間・スピン・フレーバー波動関数は，上の 2 つの状態の組み合わせで与えられることがわかる。すなわち，第一励起状態は，$S=1/2$ バリオンの (1+8+10) フレーバー多重項と，$S=3/2$ バリオンの 8 重項を含むことが予想される ((2.67) 参照)。これらのスピンは，軌道角運動量 $L=1$ を組み合わせて次のようになる。

$$\text{多重項}\,(1,8,10):\quad J^P=\frac{1^-}{2},\ \frac{3^-}{2}$$

$$3\text{つの}\,8\,\text{重項}:\quad J^P=\frac{1^-}{2},\ \frac{3^-}{2},\ \frac{5^-}{2}$$

これは，質量が 1600 MeV 近辺に見出されているバリオンと非常によく一致している。

問題 2.16 $Y=1$ バリオンは，πN 散乱での共鳴状態としてもっとも簡単に同定される。π と N の間の相対軌道角運動量 L' がよい量子数であり，負パリティの共鳴に対して L' が偶数であることを示せ。クォーク模型によって，第一励起状態として期待される πN状態のアイソスピン，スピンおよび L' を表にまとめよ。それらの共鳴状態を素粒子表で確かめよ。

2.12 磁気モーメント

問題 2.13 で行った電荷の計算を，ハドロンの磁気モーメントについても実行することができる。磁気モーメントの演算子は $\sum_i \mu_i(\sigma_3)_i$ で表される。i は構成子クォークについての和である。通常の方法を用いて，演算子は $M_J=+J$ を持つ 2 つの状態を用いて計算できる。電荷 e，スピン 1/2 の点状粒子の磁気モーメントは $e/2m$ である (第 5 章参照)。したがって，電荷 Q_ie，質量 m_i の構造

のないクォークの磁気モーメントは

$$\mu_i = Q_i\left(\frac{e}{2m_i}\right) \tag{2.72}$$

となる。非相対論的近似では陽子の磁気モーメントは

$$\mu_{\mathrm{p}} = \sum_{i=1}^{3} <\mathrm{p}\uparrow|\mu_i(\sigma_3)_i|\mathrm{p}\uparrow>$$

と書ける。(2.71) の具体的な波動関数を用いると次のようになる：

$$\mu_{\mathrm{p}} = \frac{1}{18}\{(\mu_{\mathrm{u}} - \mu_{\mathrm{u}} + \mu_{\mathrm{d}}) + (-\mu_{\mathrm{u}} + \mu_{\mathrm{u}} + \mu_{\mathrm{d}}) + 4(2\mu_{\mathrm{u}} - \mu_{\mathrm{d}})\} \times 3.$$

ここで 3 をかけたのは，(2.71) の“入れ換え”を考慮したからである。したがって，陽子の磁気モーメントをその構成子クォークのモーメントで表すと，

$$\mu_{\mathrm{p}} = \frac{1}{3}(4\mu_{\mathrm{u}} - \mu_{\mathrm{d}}). \tag{2.73}$$

中性子の磁気モーメントは，u と d を交換して

$$\mu_{\mathrm{n}} = \frac{1}{3}(4\mu_{\mathrm{d}} - \mu_{\mathrm{u}})$$

と求められる。$m_{\mathrm{u}} = m_{\mathrm{d}}$ の極限では，(2.72) から

$$\mu_{\mathrm{u}} = -2\mu_{\mathrm{d}} \tag{2.74}$$

となり，したがってクォークモデルの予言は，

$$\frac{\mu_{\mathrm{n}}}{\mu_{\mathrm{p}}} = -\frac{2}{3} \tag{2.75}$$

である。これは実験値と非常によく合っている：

$$\frac{\mu_{\mathrm{n}}}{\mu_{\mathrm{p}}} = -0.68497945 \pm 0.00000058.$$

問題 2.17 核子以外の $J^P = (1/2)^+$ バリオン 8 重項につき，その磁気モーメントを μ_{p} で表し，実験値と比較せよ。

問題 2.18 基底状態にあるバリオンのスピン・フレーバー波動関数は対称であり，反対称性の要請を満たすためにカラーが導入された。だが，次のように考えた人がいたことにも注意しよう。すなわち「われわれは，完全反対称な陽子の波動関数を，たとえば

$$|\mathrm{p}\uparrow> = \sqrt{\frac{1}{2}}[\mathrm{p}_A\chi(M_S) - \mathrm{p}_S\chi(M_A)]$$

のように作ることができる。だからカラーなど忘れてしまえ！」と。この波動関数を，(2.71) に相当する具体的な形に書け。また，$|\mathrm{n}\uparrow>$ を求め，

$$\frac{\mu_{\mathrm{n}}}{\mu_{\mathrm{p}}} = -2$$

を示せ。この主張は実験によってしりぞけられた。計算の過程をみると，μ_{p} が負であ

ることに気づくだろう。しかし，実験は μ_p 正を示す。カラーよ永遠なれ。

問題 2.19　$\rho^{\pm}$ メソンの磁気モーメントに対して，クォーク模型から得られる関係

$$\mu_{\rho^+} = -\mu_{\rho^-} = \mu_p$$

を示せ。

問題 2.20　クォーク模型を用いて，輻射崩壊 $\omega \to \pi^0\gamma$ の振幅を求めよ。ω と π^0 はそれぞれ 9 重項 $(J^P=1^-, S=1)$，$(J^P=0^-, S=0)$ に属する。したがって，クォークのスピン反転（磁気 2 重極）遷移を必要とする。これは，クォークの磁気モーメント演算子を含む。まず (2.54) を仮定し，$M_J=1$ の ω および π^0 に対するスピン・フレーバー波動関数を求めよ。もし z 軸を図 2·10 のように選ぶなら，必要な振幅は次のように書けることを示せ：

$$\sum_{i=1,2} \langle \pi^0 | \mu_i \boldsymbol{\sigma}_i \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_R^* | \omega(M_J=1) \rangle = -\sqrt{2} \sum_{i=1,2} \langle \pi^0 | \mu_i (\sigma_-)_i | \omega(M_J=1) \rangle$$
$$= \mu_d - \mu_u.$$

ここに，$\boldsymbol{\varepsilon}_R \equiv -\sqrt{1/2}(1, i, 0)$ は放出光子（ヘリシティー 1）の偏極ベクトル，また $\sigma_- \equiv (1/2)(\sigma_1 - i\sigma_2)$ は，クォークスピンを“1 つ下げる”，あるいは“反転する”演算子である。

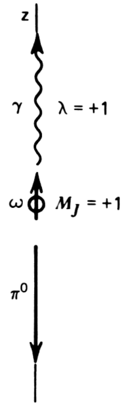


図 2·10　輻射崩壊 $\omega \to \pi^0\gamma$

問題 2.21　(2.54) を仮定して，クォーク模型では $\phi \to \pi^0\gamma$ が禁止されることを示せ。また，次の関係を導け：

$$\frac{\text{崩壊率}\ (\omega \to \pi^0\gamma)}{\text{崩壊率}\ (\rho \to \pi^0\gamma)} = \left(\frac{\mu_d - \mu_u}{\mu_d + \mu_u}\right)^2 = 9.$$

2.13　重いクォーク：チャームなど

1974 年 11 月，e^+e^- 消滅反応で，重心系エネルギー 3.1 GeV 近傍に，ψ と呼

ぶ幅の狭い共鳴状態が発見された。さらに 2 週間後，第二の狭い共鳴状態 ψ' が，3.7 GeV にみつかった。これらの発見は，まさしく“11 月革命”と呼ぶにふさわしいものであった。これとは独立に，別の実験グループは，陽子・陽子衝突反応で ψ の生成をみつけた。彼らはこれを J と呼んだ。このような事情で，論文などではしばしば，J/ψ と書かれる。

発見後ただちに，ψ と ψ' は新しいクォークと反クォークの一番低い束縛状態 $c\bar{c}$ であると解釈された。新しいチャームクォーク c は，かなり前から予言されていたものだった。第 12 章でみるように，電荷 2/3 を持つもう 1 つのクォークは，ハドロンの弱い相互作用の理論で必要とされていた† (たとえば GIM 機構)。

衝突する e^+ と e^- ビームの全エネルギーが 3.7 GeV を越えると，$e^+e^- \to$ ハドロン の断面積は，複雑な共鳴状態の振舞いを示す。図 2·13 で e^+e^- と記した列をみると，4 GeV の下あたりには 4 つの共鳴状態が同定できる。3.7 GeV より上では，共鳴状態の幅はずっと大きくなり，典型的なハドロン崩壊を示す。これは，ϕ の崩壊機構 (問題 2.9 参照) の再現である。ϕ メソンの狭い幅 (4 MeV) は，ϕ がちょうど $K\bar{K}$ の閾値のすぐ上に，$s\bar{s}$ の束縛状態として存在したからだ。K は一番軽いストレンジメソンである。ϕ の崩壊過程

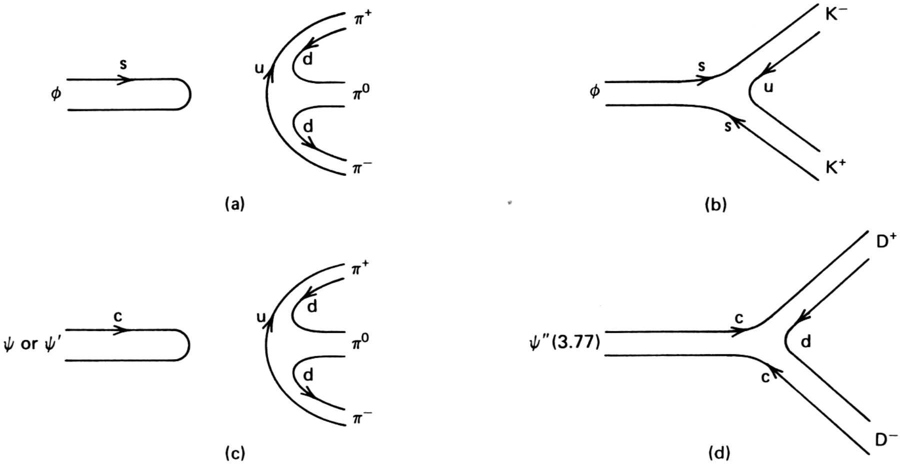


図 2·11 抑制された崩壊過程 $\phi(s\bar{s})$，$\psi(c\bar{c}) \to 3\pi$ および許容崩壊過程 $\phi \to K\bar{K}$，$\psi'' \to D\bar{D}$

† (訳註) 日本でもすでに牧 二郎，原 康夫の両氏により，それぞれ第 4 番目のクォークの存在が予言されていた。

$$\phi(s\bar{s}) \longrightarrow K(q\bar{s})+\bar{K}(\bar{q}s) \qquad (2.76)$$

は位相空間が十分でないため抑制される。ここで q=u, d である。一方，$\phi\to\pi\pi\pi$ の位相空間は十分であるが，$s\bar{s}$ 対の消滅が必要になる。にもかかわらず，ϕ の主要な崩壊様式は $\phi\to K\bar{K}$ である。図 2･11 に，この結果をクォーク線を用いて図示した。これは Zweig 則，あるいは OZI (大久保，Zweig，飯塚) 則の例である。つまり，始状態 (ϕ) と終状態 (3π) がつながっていないクォーク線図は，つながっている場合に比べて強く抑制される。同じように，ψ,ψ' の崩壊 (図 2･11 (c)) でも崩壊幅は 69.225 keV と非常に狭い。なぜなら，ψ,ψ' は，$D\bar{D}$ の閾値より低い $c\bar{c}$ 束縛状態だからである。D は一番軽いチャームメソンであり，そのハドロン崩壊は $\psi\to\pi\pi\pi$ で，$c\bar{c}$ 対の消滅が必要である (図 2･11 (c) 参照)。もっと質量の高い ψ 状態のハドロン崩壊幅はさらに大きいが，それは

$$\psi(c\bar{c}) \longrightarrow D(\bar{q}c)+\bar{D}(q\bar{c}) \qquad (2,77)$$

が許容崩壊 (図 2･11 (d)) になるからである。ここで q=u,d. つまり，$D\bar{D}$ 生成の運動学的な閾値は，$\psi'(3.68)$ と $\psi''(3.77)$ の中間にあると期待してよい。したがって，D メソンの質量は $m(D)\geq 3.7/2=1.85$ GeV と予測できる。

ストレンジネス S の導入とまったく同じように，$c,\bar{c}$ クォークに対して新しい加算的量子数 $C=\pm 1$ を与える。軽いクォーク (u, d, s) は $C=0$ である。c クォークの電荷は $Q=+2/3$，アイソスピンは $I=0$ である。ここで，表 2-1 の関係を次のように改める必要がある：

$$Y=B+S+C, \qquad Q_3=I_3+\frac{1}{2}Y. \qquad (2.78)$$

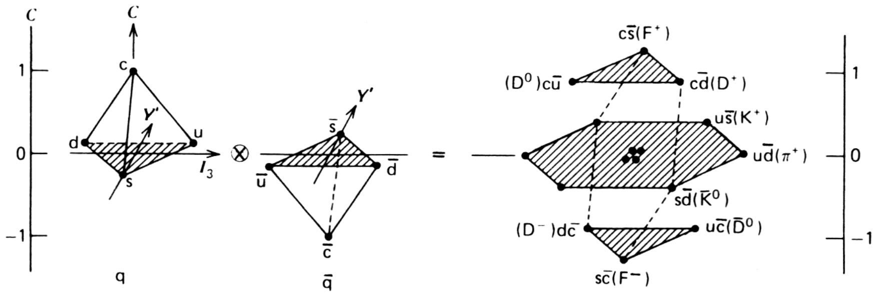


図 2･12 u, d, s, c クォークから作られる 16 個のメソン状態を (I_3, Y', C) 空間に表示した。ただし，$Y'=Y-(4/3)C$ である。$J^P=0^-$ 多重項に属するいくつかのメソンを示す。

反クォークの正四面体とともに，クォークの基本多重項を図 2·12 に示す。こうして構成要素 (四面体)ができたので，これらを組み合わせてハドロンを作ることができる。$q\bar{q}$ 状態，つまりメソンを図 2·12 のように作る。括弧内のメソンは一番低い ($J^P=0^-$) 多重項のメンバーである。チャームメソンのいくつかが観測されている。その質量は

$$m(\mathrm{D})=1.86\ \mathrm{GeV}, \qquad m(\mathrm{F})=2.03\ \mathrm{GeV}. \tag{2.79}$$

表 2-2 にある別の多重項を完成するためにも，チャームメソンは必要である。$J^P=1^-$ のチャーム状態は，$\mathrm{D}^*, \mathrm{F}^*$ と呼ぶのが自然である。観測された質量は，

$$m(\mathrm{D}^*)=2.01\ \mathrm{GeV}, \qquad m(\mathrm{F}^*)=2.14\ \mathrm{GeV}.$$

問題 2.22 弱い相互作用の理論によれば，ハドロンへの弱崩壊の主なものは，クォークの転換 $\mathrm{c} \to \mathrm{s}$，$\mathrm{u} \to \mathrm{d}$ を通して起こる (第 12 章参照)。たとえば，チャームメソンの許容崩壊は，$\mathrm{c\bar{u}} \to \mathrm{s\bar{d}(u\bar{u})}$ である。この転換のみが可能だとして，

$$\mathrm{D}^0 \longrightarrow \mathrm{K}^-\pi^+, \quad \mathrm{K}^-\pi^+\pi^+\pi^-$$

は許容崩壊であるが，

$$\mathrm{D}^0 \longrightarrow \pi^+\pi^-, \ \mathrm{K}^+\mathrm{K}^-, \ \mathrm{K}^+\pi^-, \ \mathrm{K}^+\pi^-\pi^+\pi^-$$

はすべて禁止されることを示せ。また，$\mathrm{D}^+ \to \mathrm{K}^-\pi^+\pi^-$ は許容崩壊，$\mathrm{D}^+ \to \mathrm{K}^+\pi^+\pi^-$ は禁止されることを示せ。事実 1976 年に，はじめてチャーム粒子が発見されたとき，D^+ 崩壊のこの特徴がその動かし難い証拠となった。それは "隠れた" チャーム状態 $\psi(\mathrm{c\bar{c}})$ の画期的な発見から，1 年半後のことであった。

メソンの各多重項は，"隠れた" チャーム状態 $\mathrm{c\bar{c}}$ を含む。$J^P=0^-$，1^- 多重項には，$\mathrm{c\bar{c}}$ 状態としてそれぞれ η_c (2.98) と最初に発見された $\psi(3.1)$ が対応する。$\mathrm{c\bar{c}}$ 束縛状態は，ポジトロニウム $\mathrm{e^+e^-}$ と比較することができるので，さしずめ "チャーモニウム" と呼ぶことにしよう。($\mathrm{c\bar{c}}$) は，それを調べるのにとくにきれいな系であり，メソンスペクトロスコピーに革命をもたらした。$J^{PC}=1^{--}$ は $\mathrm{e^+e^-}$ で直接生成される ($\mathrm{e^+e^-} \to$ 仮想光子 $\to \mathrm{c\bar{c}}$)。その崩壊によって，他のチャーモニウム状態を同定することができる。これまで観測されている状態を，図 2·13 に示した。ここでは分光学で普通に用いられている記法 ${}^{2S+1}L_J$ を用いた。S, L, J は $\mathrm{c\bar{c}}$ 系の全内部スピン，軌道角運動量，全角運動量を表す。これはもちろん非相対論的な分類である。c クォークの質量が大きいので，非相対論的な描像が可能になる。各状態の J^{PC} を示したが，クォーク模型の予想値との一致がよい点に注目しよう。表 2-2 にまとめてある 6 つの J^{PC} の値は，未発見の $1^{+-}({}^1P_1)$ を除いてすべて再現されている。ポジトロニウムと同じように，軌道励起とともに動径励起も期待される。事実 $2^3S, 3^3S$ 励起状態は，$\mathrm{e^+e^-} \to$ ハドロ

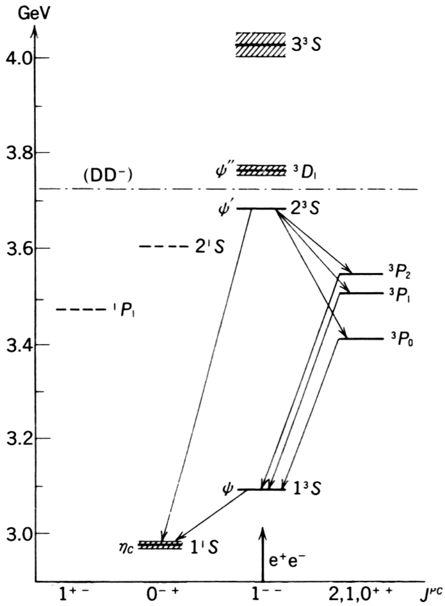


図 2・13　観測されたチャーモニウムのスペクトル。ここに示した遷移は，すべて観測されている。$^1P_1$ と 2^1S 状態はまだ発見されていない。斜線は粒子の共鳴幅を示す。一点鎖線は $D\bar{D}$ 閾値である：この線より下の状態は，チャームメソンに崩壊できない。$J^{PC}=1^{--}$ の状態は，e^+e^- 衝突で直接作られる。

ン の断面積のデータの中に，直接共鳴状態としてみられる (図 2・13)。

問題 2.23　$\psi'(3.7) \to \psi(3.1)$ ＋ハドロン が観測されている。生成されたハドロンにはどんなものがあるか。

問題 2.24　図 2・13 で準位間の可能な輻射遷移を記し，電気・磁気双極子遷移を示せ。$\psi'(3.7)$ から 3 つの χ 準位 ^3P_J $(J=2,1,0)$ への輻射遷移の割合は，$(2J+1)\,k^3$ に比例することを確かめよ。ここに k は放出光子の運動量。これから ψ' の 3 つの崩壊様式の分岐比は，ほぼ等しいことを示せ。

問題 2.25　中性ベクトルメソン ($J^{PC}=1^{--}$) のレプトン崩壊は，仮想光子を通して起こるという描像で理解できる：

$$V(q\bar{q}) \longrightarrow \gamma \longrightarrow e^+e^-. \tag{2.80}$$

この過程に対する振幅の計算法は，次章で説明する。ここでは，V-γ 結合がクォーク

の電荷に比例することに注意すれば十分である。ベクトルメソンの質量依存性を無視すると，レプトン崩壊幅の比は

$$\rho : \omega : \phi : \psi = 9 : 1 : 2 : 8$$

になることを示せ。

問題 2.26 $\psi'(3.7)$ と比較して，$^3D_1$ 状態の崩壊率を説明せよ。これら 2 つの状態は混じり合うか。

問題 2.27 η_c と $\psi(3.1)$ のハドロン崩壊幅を次の過程を用いて推定せよ。

$$\begin{aligned} \eta_c(c\bar{c}) &\longrightarrow n\mathrm{g} \longrightarrow \text{ハドロン}, \\ \psi(c\bar{c}) &\longrightarrow n'\mathrm{g} \longrightarrow \text{ハドロン}. \end{aligned} \tag{2.81}$$

ここで，g はグルーオン，n, n' は整数。これらは QED 過程 (2.80) に対応する QCD 過程である。n と n' の最小値は，それぞれ 2 および 3 であることを示せ。

c-c̄ 間のポテンシャルの性質は，チャーモニウムのスペクトルから推定できる。第 1 章で次の点を注意した。c-c̄ の距離が小さいときは，QCD は Coulomb 型のポテンシャル α_s/r を予想できる。距離 r が大きくなると，r とともに増大する閉じ込めポテンシャルが効いてくると考えられる。$1S, 2S$ および P 状態の中心値 (図 2·13) をみると，c-c̄ ポテンシャルは，Coulomb ($2S$ と P 状態は縮退) と振動ポテンシャル $V \sim r^2$ (P 状態が $1S$ と $2S$ の中間) の間にあるものと思われる。すなわち，現象論的に一応満足できる単純なポテンシャルは

$$V(r) = -\frac{4}{3}\frac{\alpha_s}{r} + ar \tag{2.82}$$

のように書けるだろう。ここで a は定数，4/3 はクォーク・グルーオン結合定数 α_s に関係するカラー因子である ((2.98) 参照)。

さて，c クォークを含むバリオンを作ろう。3 つのクォークの基本多重項を組み合わせて，(2.59) に類似した結果が得られる：

$$\underset{}{4 \otimes 4 \otimes 4} = \underset{S}{20} \oplus \underset{M_S}{20} \oplus \underset{M_A}{20} \oplus \underset{A}{\bar{4}}. \tag{2.83}$$

この段階では，このような分解を導くより，群論のもっとエレガントな方法 (Yang 図) を用いたほうがよいだろう (たとえば Close の教科書 (1979) を見よ)。(2.64) で表されるスピン状態を含めると，前と同じように 2 つの方法で，スピン・フレーバーについて対称な基底状態を作ることができる。それは (2.68) とまったく同じやり方で作られた対称なスピン 3/2 状態を持つ対称 20 次元表現か，スピン 1/2 を持つ混合対称 20 次元表現である。3 つの基本 (クォーク)四面体の重ね合わせからフレーバー多重項を取り出すと，図 2·14 (a) のバリオン基底状態が得られる。

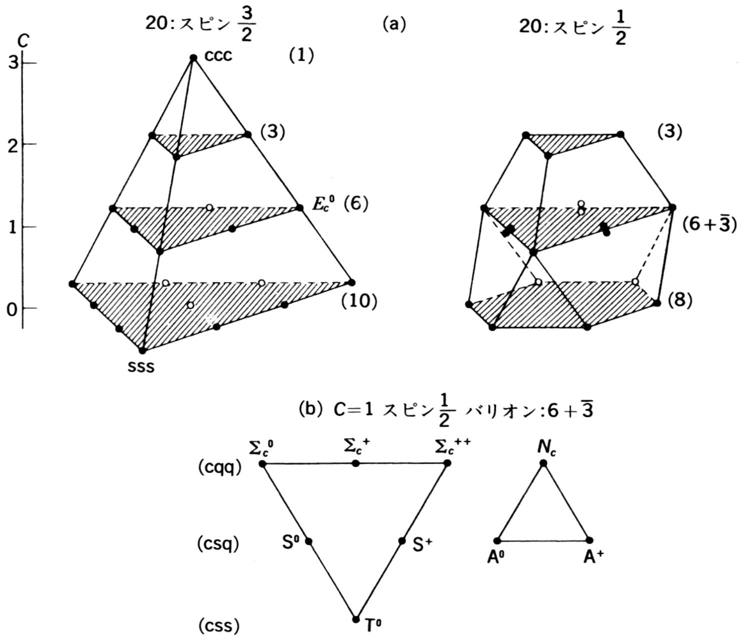


図 2·14　(a) u, d, s, c クォークから作られるスピン 1/2 および 3/2 を持つ基底状態のバリオン。$C=0,1,2,3$ 状態の $SU(3)$ 多重項を括弧内に示す。(b) $C=1$, スピン 1/2 のバリオン $(6+\bar{3})$ とそれを構成するクォーク。ここで $q=u, d$ である。

スピン 1/2 多重項は，3 つの $SU(3)$ 8 重項を互いにもたれかけさせ，第 4 番目の $SU(3)$ 8 重項の上に三辺を共有させて置いたものとみることができる。事実，これらの状態を数えるのに，群論のエレガントな手法はいらない。たとえば $C=1$, スピン 1/2 バリオンは cqq $(q=u, d, s)$ からなる。qq の分解は (2.58) により

$$3\otimes 3=6\oplus\bar{3}$$

となる。この状態を図 2·14 (b) に示す。もっとも軽いチャームバリオンは，アイソスピン 3 重項 Σ_c と Λ_c^+ である。観測されている質量は

$$m(\Lambda_c)=2.28\text{GeV},\qquad m(\Sigma_c)=2.44\text{GeV}. \tag{2.84}$$

問題 2.28　Λ_c, Σ_c バリオンのフレーバー波動関数を決定せよ。Σ_c^{++} の観測可能な崩壊系列を示せ。

c クォークは，理論的にはその存在が期待されていた。だが，b クォークはそうではない。5 番目のクォークの証拠は，10 GeV 近傍の e^+e^- 実験におけるチャーモニウム現象の再現であった。4 つの e^+-e^- 共鳴状態 $\Upsilon(1S), \Upsilon(2S), \Upsilon(3S), \Upsilon(4S)$ が，たちまち確認された。対応する質量は 9.46, 10.02, 10.35, 10.57 GeV である。はじめの 3 つの状態は幅が狭く，4 番目は非常に広い。ボトム量子数を持つ一番軽いメソン ($b\bar{u}$ または $b\bar{d}$) の質量は，$m(D_b) \sim 10.4/2 = 5.2$ GeV であると期待される ((2.77) 参照)。

2.14 ハドロンの質量

もし $SU(4)$ フレーバー対称性が厳密に成り立つなら，$SU(4)$ 多重項中のすべての粒子は同じ質量を持つはずだ。だが，明らかにそうはなっていない。たとえば，1^- メソンの多重項では次のようである：

$$\begin{aligned} m_\omega \approx m_\rho(u\bar{u}) &= 0.78 \ \text{GeV} \\ m_\phi(s\bar{s}) &= 1.02 \ \text{GeV} \\ m_{K^*}(s\bar{u}) &= 0.89 \ \text{GeV} \\ m_{D^*}(c\bar{u}) &= 2.01 \ \text{GeV} \\ m_{F^*}(c\bar{s}) &= 2.14 \ \text{GeV} \\ m_\psi(c\bar{c}) &= 3.1 \ \ \text{GeV} \end{aligned} \tag{2.85}$$

たしかに，$SU(2)$ アイソスピン多重項に属するハドロンの質量は，5 MeV の差を無視すればすべて等しい。だが，u, d, s $SU(3)$ フレーバー対称性は，100 MeV 程度の質量差を生じるほど破れている。さらに $SU(4)$ フレーバー対称性は，1 GeV よりかなり大きく破れている。もし，ハドロンの質量が単純に構成子クォークの質量の和で与えられるならば，(2.85) は次のことを暗示する：

$$\begin{aligned} &m_u \approx m_d \approx 0.39 \ \text{GeV}, \\ &m_s \approx 0.51 \ \text{GeV}, \\ &m_c \approx 1.6 \ \ \text{GeV}. \end{aligned} \tag{2.86}$$

クォークの質量を求める別の方法は，バリオンの磁気モーメントの実験値を使うことである。たとえば，m_u と m_s を推定するのに，陽子と Λ の磁気モーメントを使う。(2.73), (2.74) から

$$\mu_u = \frac{2}{3}\mu_p = \frac{2}{3}(2.79)\frac{e}{2m_p}$$

となり，(2.72) に注意して

$$m_{\mathrm{u}}=\frac{m_{\mathrm{p}}}{2.79}=0.34\ \mathrm{GeV} \tag{2.87}$$

を得る。同じようにクォーク模型の予想は

$$\mu_{\mathrm{s}}=\mu_{\Lambda}=-0.61\frac{e}{2m_{\mathrm{p}}}$$

であるから，$m_{\mathrm{s}}=0.51$ GeV となる。この結果と (2.86) との一致がよいことから，われわれはクォークが Dirac 磁気モーメントを持つ点状構成子であるという確信を深めるのである。(2.86) の質量は，(カラー1重項の) ハドロン内に束縛されているクォークの有効質量と考えられる。これは，ハドロンの構成子としてのクォークが持つ質量である。クォーク・反クォークが (2.82) のようなポテンシャルによって束縛され，観測するメソンに対応するエネルギースペクトルを持っている場合には，クォーク・反クォーク構成子質量を零点エネルギーと考えるのは有効である。チャームあるいはもっと重いクォークでは，全零点エネルギーは，一番低いメソン状態の質量と大きくは違わないと思われる。したがって，$c\bar{c}, b\bar{b}$ 状態は，本質的にクォーク・反クォークの非相対論的な束縛状態とみなすことができる。

単純なクォークの数え上げが，バリオンとメソンの質量の大まかな性質をうまく説明できたので，同じ考えで，質量スペクトルのもっと詳しい性質を理解しようと考えたくなる。たとえば，同じクォークを含みながら，なぜ Δ (スピン 3/2) は N (スピン 1/2) より重く，なぜ ρ (スピン 1) は π (スピン 0) より重いのか。中性バリオン Λ, Σ (スピン 1/2), Σ* (スピン 3/2) は u, d, s からできているのに，その質量が違うことをどのように説明するのか。それには，クォークのスピン配位が異なることが手がかりになる。QED では，力はスピンに依存している。では QCD でも，同じことを期待してはいけないのだろうか。

まずはじめに，スピン・スピン，あるいは磁気モーメントの相互作用により，水素原子 (あるいはポジトロニウム) の基底状態の超微細分岐が生ずることを思い出そう (たとえば，Bethe and Salpeter (1957) 参照)：

$$\Delta E_{hf}=-\frac{2}{3}\boldsymbol{\mu}_1\cdot\boldsymbol{\mu}_2|\psi(0)|^2=\frac{2\pi\alpha}{3}\frac{\boldsymbol{\sigma}_1\cdot\boldsymbol{\sigma}_2}{m_1m_2}|\psi(0)|^2. \tag{2.88}$$

ここで $\boldsymbol{\mu}_i=e_i\boldsymbol{\sigma}/2m_i$ は磁気モーメント，$e_1e_2=e^2=-4\pi\alpha$ である。これは接触相互作用であり，距離 0 で評価した相対波動関数の原点の値の 2 乗を含むので，$L=0$ 状態にのみ適用される。水素原子の場合，それはまさしく超微細分岐である。しかし，ポジトロニウムでは ΔE は $m_{\mathrm{p}}/m_{\mathrm{e}}$ だけ大きくなることがわかる。

問題 2.29　スピン1の準位 ($^3S_1$) はスピン0の準位 ($^1S_0$) よりエネルギーが高いことを確かめよ。

もし，電磁結合定数 e_1e_2 をカラー荷の積で置き換えれば，QED の結果 (2.88) は，そのまま QCD に持ってくることができる。つまり，メソンとバリオンに対して，次のような置き換えをする：

$$-\alpha \longrightarrow \begin{cases} -\dfrac{4}{3}\alpha_s \quad (q\bar{q}) & (2.89) \\[2ex] -\dfrac{2}{3}\alpha_s \quad (qqq) & (2.90) \end{cases}$$

4/3 と 2/3 はそれぞれ状態に特有のカラー因子である。ここで，この因子をどのように導くかを示そう。

次の 3 つの仮定をして，基底状態にあるハドロンの質量に対する模型を作ってみよう。(1) クォーク間の距離が大きいときに働くクォーク閉じ込めは，クォークのスピンと質量に依存しない。(2) クォーク間の距離が小さいとき，α_s は十分小さくなり，QCD 超微細分岐が可能になる。(3) 対称性の唯一の破れは,異なるフレーバーを持つクォークの構成子質量の差から生ずる。こう考えると，メソンとバリオンの質量は次のようになる：

$$m(q_1\bar{q}_2) = m_1 + m_2 + [a(\boldsymbol{\sigma}_1\cdot\boldsymbol{\sigma}_2)/m_1m_2], \qquad (2.91)$$

$$m(q_1q_2q_3) = m_1 + m_2 + m_3 + \left[\frac{a'}{2}\sum(\boldsymbol{\sigma}_i\cdot\boldsymbol{\sigma}_j)/m_im_j\right]. \qquad (2.92)$$

ここで，a と a' は正の定数である ((2.88)～(2.90) 参照)。

問題 2.30　π(スピン 0) と K^*(スピン 1) について，(2.91) から次式が導かれることを示せ。

$$m(\pi) = m_u + m_d - (3a/m_um_d),$$
$$m(K^*) = m_u + m_s + (a/m_um_s).$$

次の値を用いて，0^-, 1^- メソン多重項 (図 2･12) のすべてのメソンの質量を GeV 単位で計算せよ。

$$m_u = m_d = 0.31, \qquad m_s = 0.48, \qquad m_c = 1.65, \qquad a/m_u^2 = 0.16.$$

得られた結果を，素粒子表にあるメソンの質量と比較してほしい。

また次の関係を確かめよ (メソンの記号は，質量を表すものとする)：

$$(\rho + \pi) = \frac{m_s}{m_u}(K^* - K) = \frac{m_c}{m_u}(D^* - D) = \frac{m_cm_s}{m_u^2}(F^* - F).$$

問題 2.31　上記の模型では，Δ は核子より重いことを示せ。さらに，(2.91)，(2.92) で $a = a'$ なら，

$$m(\Delta) - m(N) = \frac{3}{4}[m(\rho) - m(\pi)]$$

となることを示せ。

問題 2.32 (2.92) を用いて図 2·8, 図 2·14 に示したバリオン $\Lambda, \Sigma, \Sigma^*, \Lambda_c, \Sigma_c$, $\Sigma_c{}^*$ の相対質量を調べたい。各バリオンは qqQ からなる (q=u, d, Q=s, c)。Λ と Σ バリオンに対して, qq のアイソスピンはそれぞれ $I=0, 1$, したがってスピンは $S=0, 1$ である。この結果を用いて, $\boldsymbol{S}_1\cdot\boldsymbol{S}_2$ を評価せよ。ここで $\boldsymbol{S}_i=\boldsymbol{\sigma}_i/2$. また $(\boldsymbol{S}_1+\boldsymbol{S}_2+\boldsymbol{S}_3)^2$ を考え,

$$(\boldsymbol{S}_1+\boldsymbol{S}_2)\cdot\boldsymbol{S}_3=0,\ \ -1,\ \ +\frac{1}{2} \qquad (\text{それぞれ } \Lambda, \Sigma, \Sigma^* \text{ に対する値})$$

を示せ。$m_0=2m_{\rm u}+m_{\rm Q}$ としたとき, (2.92) から次式が導かれることを示せ:

$$m(\Lambda_{\rm Q})=m_0-\frac{3a'}{2m_{\rm u}{}^2},$$

$$m(\Sigma_{\rm Q})=m_0+\frac{2a'}{m_{\rm u}{}^2}\left(\frac{1}{4}-\frac{m_{\rm u}}{m_{\rm Q}}\right),$$

$$m(\Sigma_{\rm Q}{}^*)=m_0+\frac{a'}{m_{\rm u}{}^2}\left(\frac{1}{2}+\frac{m_{\rm u}}{m_{\rm Q}}\right).$$

また, 次の結果を確かめよ ((2.84) 参照):

$$[m(\Sigma_{\rm c})-m(\Lambda_c)]=\frac{m_{\rm s}(m_{\rm c}-m_{\rm u})}{m_{\rm c}(m_{\rm s}-m_{\rm u})}[m(\Sigma)-m(\Lambda)]\simeq 0.16\ \text{GeV}$$

(2.92) を用いて, 他の $(1/2)^+, (3/2)^+$ バリオンの質量も, a' と クォーク質量で表すことができる。

クォークモデルの粗っぽさを考えると, 質量の予想値と実験値の定量的な一致は驚くほどである。実際, すべての観測結果は再現されている。b クォークを含むハドロンにも, この計算をそのまま拡張することができる。

2.15 カラー因子

カラーの証拠のいくつかについてはすでに述べた。N 種類のフレーバー (u, d, $\cdots$) を持つクォークのそれぞれが, R, G, B とよぶ 3 種類のカラーを持つことを信ずる十分な理由がある。もっと厳密にいうならば, クォークは $SU(3)$ カラー群の 3 重項に属している (図 2·3 参照)。$SU(N)$ フレーバー対称性とは違って, $SU(3)$ カラー対称性は, 厳密に保存すると考えられる。図 1·4 を一見すると, カラー荷間の QCD 力を媒介するグルーオンは, 8 つの異なるカラーの組み合わせで現れることがわかる:

$$\mathrm{R\overline{G}, R\overline{B}, G\overline{R}, G\overline{B}, B\overline{R}, B\overline{G}}, \sqrt{\frac{1}{2}}(\mathrm{R\overline{R}-G\overline{G}}),\ \sqrt{\frac{1}{6}}(\mathrm{R\overline{R}+G\overline{G}-2B\overline{B}}). \quad (2.93)$$

いいかえれば, グルーオンは $SU(3)$ カラー 8 重項に属する ((2.49), (2.50), 図 2·5 の $SU(3)$ フレーバーとの類似性を思い出そう)。残った組み合わせは

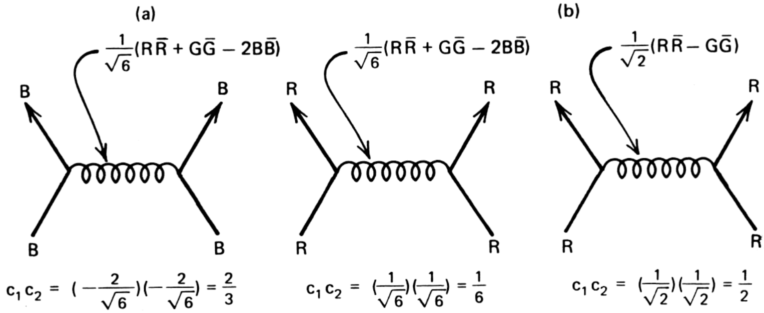


図 2·15 (a) B-B クォーク相互作用, (b) R-R クォーク相互作用 に対するカラー結合の積。

$SU(3)$ カラー 1 重項

$$\sqrt{\frac{1}{3}}(R\bar{R}+G\bar{G}+B\bar{B}) \tag{2.94}$$

であるが，これはカラーを持たず，カラー荷間の作用を媒介しない。

QED では，2 つのクォーク間の電磁結合の強さは $e_1e_2\alpha$ で表される。e_i は e の単位で測った電荷 (すなわち $e_i=+2/3$ または $-1/3$) であり，α は微細構造定数である。同じように QCD では，2 つのカラー荷間に交換される 1 個のグルーオンの (強い) 結合の大きさは $(1/2)\ c_1c_2\alpha_s$ となる。c_1, c_2 は，バーテックスにおけるカラー係数を表す。普通

$$C_F \equiv \frac{1}{2}|c_1c_2| \tag{2.95}$$

をカラー因子と呼ぶ (1/2 を強結合定数 α_s の中にくり込むように再定義し，$|c_1c_2|$ をカラー因子とするほうがより自然であろう)。

はじめの例として，同じカラー (たとえば B) を持つ 2 つのクォーク間の相互作用につき，カラー因子を計算してみよう。8 つのグルーオンの中で，$B\bar{B}$ の組み合わせを含むものだけが交換できる。したがって，積 c_1c_2 は 2/3 となる (図 2·15 (a) 参照)。ところで，カラー R を持つ 2 つのクォーク間相互作用は，2 つの異なるグルーオンにより伝えられる (図 2·15 (b) 参照)。にもかかわらず，全カラー因子 $c_1c_2=1/6+1/2=2/3$ は前と同じになるが，これは，カラー対称性から当然のことである。

では，異なるカラーを持つクォーク (たとえば R と B) 間の相互作用はどうなるだろうか。ここでもふたたび，2 つの異なるグルーオンが交換でき，それぞれが $c_1c_2=1/3$ および 1 を与える (図 2·16 参照)。これら 2 つの (区別でき

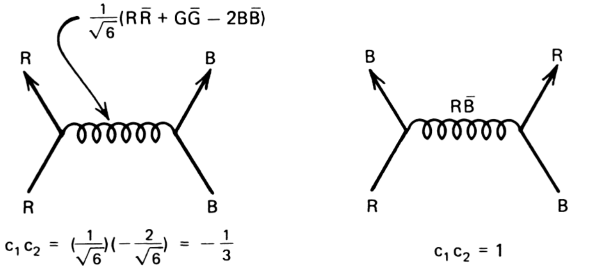


図 2·16　R-B クォーク相互作用を表す図

ない) 振幅を加えるのだろうか，引くのだろうか。答えは，クォークの交換に対するカラー波動関数の対称性による。対称 (反対称) 状態に対しては，振幅を加え (引き)，カラー因子は $+2/3(-4/3)$ になる。実際，R-R 相互作用を記述する 2 つの振幅を加えたとき，すでにこのことを使った。

これまでのすべての結果をまとめると，カラー因子は

$$c_1c_2 = P - \frac{1}{3} \tag{2.96}$$

と書ける。$P = \pm 1$ は，2 つのクォークがカラー対称状態のとき＋，反対称状態のとき－である。

カラー 1 重項

$$\sqrt{\frac{1}{3}}(R\bar{R}+G\bar{G}+B\bar{B}) \tag{2.97}$$

にあるクォークと反クォーク間のグルーオン交換に対して，カラー因子を計算しておくことが必要になる。つまり，これはメソン内の $q\bar{q}$ 対間のグルーオン交換である。ここでは，すべてのカラーは同じ資格で現れる。したがって，そのうちの 1 つ，たとえば B-$\bar{\mathrm{B}}$ 相互作用だけを考えれば十分である。可能な Feyn-

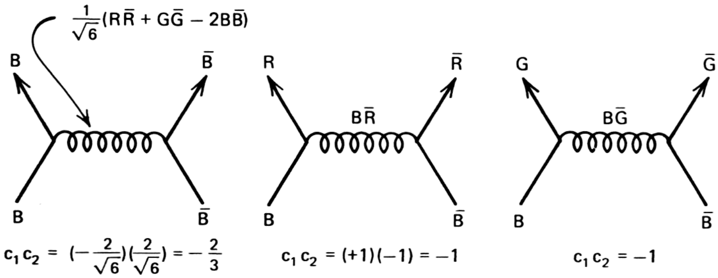


図 2·17　B-$\bar{\mathrm{B}}$ 相互作用を表す図

man 図は 3 種類ある (図 2·17 参照)。c_1c_2 の計算においては，反粒子のバーテックスに負号をつけるが，これはちょうど，QED では反粒子と粒子の電荷が逆符号を持つことに対応している。カラー 1 重項のメソンでは，図 2·17 の始状態および終状態はそれぞれ，因子 $\sqrt{1/3}$ を含む ((2.97) 参照)。1 個のグルーオン交換による $q\bar{q}$ 相互作用に対する全因子は

$$c_1c_2=3\sqrt{\frac{1}{3}}\sqrt{\frac{1}{3}}\left(-\frac{2}{3}-1-1\right)=-\frac{8}{3}$$

となる。第一の因子 3 は，$B\overline{B}$ 以外に $R\overline{R}$, $G\overline{G}$ も始状態に寄与することを示している。すなわちカラー因子は

$$C_F=4/3 \tag{2.98}$$

である。(2.89) で用いたのはこの結果であった。

(2.90) を導くこと，すなわちバリオン内でグルーオンを交換する 2 つのクォークに対して，そのカラー因子を計算しておくのは有益であろう。$3\otimes3=6\oplus\bar{3}$ を思い出すと，バリオン内のすべてのクォーク対は，カラー $\bar{3}$ を持つことがわかる。その理由は，クォーク対が第三のクォーク (カラー 3) と結合したとき，全体としてカラー 1 重項を作らなければならないからだ。一方の $6\otimes3$ は 1 重項を含まない。$\bar{3}$ は反対称カラー状態 ((2.58) と比較せよ) だから，(2.96) において $P=-1$ としなければならない。したがって必要なカラー因子 (2.90) は，

$$C_F=2/3. \tag{2.99}$$

本章で伝えるべき内容は，すべての観測されている強い相互作用をする粒子 (ハドロン) はクォークの束縛状態であるということだ。歴史的にみてこの基本的な事実の発見に導いたのは，フレーバー $SU(3)$ であった。しかし今日の素粒子物理学におけるその役割は，クォーク模型にとってかわられている。後の章では，カラー $SU(3)$ (ゲージ) 対称性に基づいて，(構成子) クォークが持つ相互作用の力学的理論を展開しよう。

(訳註) 本書はクォーク模型に至る過程の記述が物足りないので，素粒子の複合模型の背景について一言つけ加えておこう。

1955 年，坂田は p, n, Λ を基本粒子として，ハドロンはこれら基本粒子とその反粒子により複合的に作られる，という素粒子の複合模型を唱えた。これは単純ではあったが，その後の素粒子物理学に 1 つの方向を与えたといってよい。p, n, Λ の完全対称性の観点から，$U(3)$ 群により坂田模型を数学的に整備し，新しい発展の端緒を開いたのは小川 - 大貫 - 池田の定式化と山口の業績であった。このような対称性の考えに基づいて Gell-Mann と Ne'eman は，バリオンもメソンも 8 重項に分類する $SU(3)$ 対称性による八道説 (eightfold way) を提唱した。八道説の成功は，坂田模型の現実の p, n, Λ のみを基本粒子と考えることはできない，ということを明らかにした。現実のハドロンの背後に，それらとは異なる構成要素を考えなければならなくなった。対称性を担うハドロンの基本構成子として，分数荷電のクォークを Gell-Mann が導入した背景には，以上のような紆余曲折があったのである。

3
反 粒 子

量子電気力学 (QED) は，クォークとレプトンの電磁相互作用を記述する理論である。少なからぬ高エネルギー物理学者にお気に入りの QED 過程には，$e^+e^- \to \mu^+\mu^-$，$eq \to eq$，$\gamma q \to (e^+e^-)q$ などがある。q はクォークを表す。これらの反応過程は，遷移率の計算でいつも出会う次のような技術的問題を明らかにした。(1) 多粒子系に関わっている，(2) 相対論的な問題を扱う。普通，実験はきわめて相対論的な粒子ビームを用いて行われ，非相対論的取り扱いは許されないばかりか反粒子も現れる。もちろん反粒子は，非相対論的な理論では必要ない。

問題は，みかけほどやっかいではない。摂動論が救ってくれるからだ。自由なレプトン (あるいはクォーク) に対する 1 粒子波動方程式の解を求め，相互作用を摂動として扱うことにより，2 つの粒子の散乱を調べよう。

一見したところ，粒子が作られたり消滅したりする相互作用の記述に，1 粒子波動方程式が用いられることは非常に不思議である。もっとも注目すべきことは，相対論的な波動方程式は負エネルギーの解を持ち，それを利用して理論に反粒子を導入できるという点である。

最終的な形式は，1 粒子波動方程式の解だけを用いて，非相対論的摂動論をそのまま共変的に書き換えたものである。計算を実行する上では，問題にしている過程に対応する適切な “Feynman 図” を加えあわせればよい。Feynman 図は，確立された一連の規則，すなわち Feynman 則を用いて評価できる。この発見法的ではあるが，しかし非常に直観的なやり方は，Faynman に負うものであり，理論の最初の段階だけで遷移率や断面積が計算できるという実用上の利点を持っている。したがって，場の量子論の形式的な手法を展開する必要はない。しかし，ラグランジアンから最終的に Feynman 則を生み出すのは場の量子

論であった。(場の量子論の入門は，たとえば，Mandl (1966) あるいは Sakurai (1961) を参照。)

クォークとレプトンのスピンは，本来，非常に単純な Feynman のやり方をある程度そこねることになる。したがってわれわれは，"スピンのないレプトン"という非物理的な例題を用いて計算の枠組を学び (第 3, 4 章)，続いて，スピンを導入して技術的な詳細を扱う (第 5, 6 章)。第 7 章では QED について述べるが，その精度は，電子の磁気モーメントの場合，100 万分の 1 まで実験で確かめられている。

3.1 非相対論的量子力学

まずはじめに，次のことを思いおこそう。質量 m の自由粒子の Schrödinger 方程式は，古典的なエネルギー・運動量の関係

$$E=\frac{p^2}{2m} \tag{3.1}$$

に微分演算子

$$E\longrightarrow i\hbar\frac{\partial}{\partial t}, \qquad \boldsymbol{p}\longrightarrow -i\hbar\nabla \tag{3.2}$$

を代入することによって求められた。得られた演算子の関係式は，(複素数の) 波動関数 $\psi(\boldsymbol{x},t)$ に作用するものと理解する。すなわち ($\hbar\equiv1$)

$$i\frac{\partial\psi}{\partial t}+\frac{1}{2m}\nabla^2\psi=0 \tag{3.3}$$

である。ここで

$$\rho=|\psi|^2$$

を確率密度と解釈する ($|\psi|^2d^3x$ は，体積要素 d^3x の中に粒子を見出す確率を表す)。

われわれが関心があるのは，運動する粒子，たとえば 2 粒子の衝突現象である。したがって，粒子ビームの流れの密度 $\boldsymbol{j}$ が計算できなければならない。確率の保存から，ある空間領域において粒子が減少する割合は，その領域から逃げていく粒子の全流量に等しい。すなわち

$$-\frac{\partial}{\partial t}\int_V\rho\,dV=\int_S\boldsymbol{j}\cdot\hat{\boldsymbol{n}}\,dS=\int_V\nabla\cdot\boldsymbol{j}\,dV$$

である。ここで最後の等式は Gauss の定理で，$\hat{\boldsymbol{n}}$ は空間 V を囲む表面 S の要素 dS に垂直な外向き単位ベクトルである。確率と流れの密度は，"連続" の方

程式

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\nabla\cdot\boldsymbol{j}=0 \tag{3.4}$$

で関係する。流量を決定するため，まず波動方程式 (3.3) に左から $-i\psi^*$ をかけ，(3.3) の複素共役な方程式に右から $-i\psi$ をかけて引き算し，$\partial\rho/\partial t$ を作る：

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}-\frac{i}{2m}(\psi^*\nabla^2\psi-\psi\nabla^2\psi^*)=0. \tag{3.5}$$

これを (3.4) と比べると，確率流の密度として

$$\boldsymbol{j}=-\frac{i}{2m}(\psi^*\nabla\psi-\psi\nabla\psi^*) \tag{3.6}$$

を得る。(3.3) の解は，たとえば

$$\psi=Ne^{i\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x}-iEt} \tag{3.7}$$

であるが，これは全エネルギーE，運動量 $\boldsymbol{p}$ の自由粒子を記述する。ここで

$$\rho=|N|^2, \qquad \boldsymbol{j}=\frac{\boldsymbol{p}}{m}|N|^2 \tag{3.8}$$

である。

3.2 Lorentz 共変性と 4 元ベクトルの表記法

現代物理学の基礎は基本的な法則があらゆる Lorentz 系，すなわち，互いに一様な相対速度を持つ座標系において同じ形をとるということである。このとき，基本的な方程式は，Lorentz 共変であるという。特殊相対論は，あらゆる Lorentz 系で光速度は一定という前提から出発している。Lorentz 変換は，このような 2 つの系の座標を関係づける。基本的な不変量は，$c^2t^2-\boldsymbol{x}^2$ である。

問題 3.1 もとの座標系 (t,z) の z 軸に沿って，速度 v で動く新しい座標系（ダッシュをつけた座標系）(t',z') を考える。このような Lorentz "ブースト" に対して，

$$ct'=\cosh\theta ct-\sinh\theta z,$$
$$z'=-\sinh\theta ct+\cosh\theta z$$

が成り立つことを示せ。x, y は変化しない。ここで $\tanh\theta=v/c$. $\cos i\theta=\cosh\theta$, $\sin i\theta=i\sinh\theta$ であるから，Lorentz 変換は ict-z 平面における虚数角 $i\theta$ の回転と考えることができる。

定義により，Lorentz 変換で $(ct,\boldsymbol{x})$ と同じ変換をする 4 つの物理量の組はすべて，4 元ベクトルとよばれる。ここで次の表記を用いよう：

$$(ct,\boldsymbol{x})\equiv(x^0,x^1,x^2,x^3)\equiv x^\mu. \tag{3.9}$$

特殊相対論によれば，孤立系の全エネルギーと運動量は，4元ベクトル

$$\left(\frac{E}{c},\ \boldsymbol{p}\right) \equiv (p^0, p^1, p^2, p^3) \equiv p^\mu$$

の成分として変換する。$(E^2/c^2 - \boldsymbol{p}^2)$ は基本的な不変量である。もっとも簡単な系は自由粒子であり，それに対しては

$$\frac{E^2}{c^2} - \boldsymbol{p}^2 = m^2 c^2 \tag{3.10}$$

が成り立つ。ここで，m は粒子の静止質量。以下の議論では，$c \equiv 1$ の自然単位系を用いる (1.4 節参照)。

3次元空間の場合と同じように，2つの4元ベクトル $A^\mu \equiv (A^0, \boldsymbol{A})$，$B^\mu \equiv (B^0, \boldsymbol{B})$ のスカラー積を導入する：

$$A \cdot B \equiv A^0 B^0 - \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}.$$

これも Lorentz 変換で不変である。上式に現れる負号のため，新しいタイプの4元ベクトル $A_\mu \equiv (A^0, -\boldsymbol{A})$ を導入すると便利である。するとスカラー積は，

$$A \cdot B = A_\mu B^\mu = A^\mu B_\mu = g_{\mu\nu} A^\mu B^\nu = g^{\mu\nu} A_\mu B_\nu \tag{3.11}$$

と表せる。ここで (計量) テンソル $g_{\mu\nu}$ を導入したが，これは

$$g_{00} = 1, \qquad g_{11} = g_{22} = g_{33} = -1, \qquad \text{他の成分} = 0$$

のように定義する ($g^{\mu\nu}$ に対しても同様)。(3.11) では，同じ添字については和をとることを意味する。上つき (下つき) 添字を持つベクトルを，反変(共変) ベクトルと呼ぶ。Lorentz 不変量を作る規則は，上つき添字と下つき添字をそろえることである。ある方程式が Lorentz 共変なら，単独で現れる添字はすべて (上と下で別々に)，方程式の両辺で同じであり，またくり返して現れる添字はすべて，上つきと下つきが対になって現れることを確かめなければならない。

問題 3.2 $g_{\mu\nu} g^{\mu\nu} = 4$ を示せ。

ここで，スカラー積の例をあげよう：

$$p^\mu x_\mu \equiv p \cdot x = Et - \boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{x},$$

$$p^\mu p_\mu \equiv p \cdot p \equiv p^2 = E^2 - \boldsymbol{p}^2.$$

これらは Lorentz 不変量である。自由粒子に対しては $p^2 = m^2$ が成り立つ ((3.10) 参照)。このとき，粒子は質量殻 (mass shell) 上にあるという。

問題 3.3 質量 M を持つ2つの粒子の衝突を，大きさが等しく逆向きの運動量で正面衝突する Lorentz 系で観測する。これを "質量の重心系" (center of mass) と呼ぶ (運動量の重心系 (center of momentum) と呼ぶほうがより適切であろう)。系の全エ

ネルギーは $E_{\rm cm}$ である。Lorentz 不変量

$$s \equiv (p_1+p_2)_\mu (p_1+p_2)^\mu \equiv (p_1+p_2)^2 = E_{\rm cm}{}^2 \qquad (3.12)$$

の関係を示せ。もしこの衝突を一方の粒子が静止している“実験室系”でみるならば，その系で不変量 s を評価し，他方の粒子がエネルギー

$$E_{\rm lab} = \frac{E_{\rm cm}{}^2}{2M} - M$$

を持つことを示せ。この結果から，ある重心系の全エネルギー $\sqrt{s}$ を達成するには，衝突型加速器のほうが固定標的型加速器よりはるかに優れていることがわかる。では，固定標的型加速器の利点をあげよ。

A^μ と A_μ の空間成分はそれぞれ $\boldsymbol{A}, -\boldsymbol{A}$ であることに注意する。例外は

$$\partial^\mu = \left(\frac{\partial}{\partial t}, -\nabla\right), \qquad \partial_\mu = \left(\frac{\partial}{\partial t}, \nabla\right) \qquad (3.13)$$

であるが，$\partial^\mu, \partial_\mu$ はそれぞれ $x^\mu \equiv (t, \boldsymbol{x})$，$x_\mu \equiv (t, -\boldsymbol{x})$ と同じに変換することが示される。つまり，(3.2) の共変形は

$$p^\mu \longrightarrow i\partial^\mu \qquad (3.14)$$

となる。$\partial_\mu, \partial^\mu$ から，不変演算子 (D’Alembertian) を作ることができる：

$$\Box^2 = \partial_\mu \partial^\mu. \qquad (3.15)$$

3.3 Klein-Gordon 方程式

波動方程式 (3.3) は Lorentz 共変性を破り，相対論的に運動する粒子には不適当である。そこでもう一度 3.2 節の手続きをくり返そう。ただし今後は，相対論的なエネルギー・運動量の関係 (3.10)

$$E^2 = \boldsymbol{p}^2 + m^2$$

から出発する。演算子の置き換え (3.2) により

$$-\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} + \nabla^2 \phi = m^2 \phi \qquad (3.16)$$

を得る。これを Klein-Gordon 方程式という (しかし，より正しくは，相対論的な Schrödinger 方程式と呼んでもよいだろう)。Klein-Gordon 方程式に $-i\phi^*$ をかけ，その複素共役形に $-i\phi$ をかけて引き算すると，(3.5) の相対論的な類似形を得る：

$$\frac{\partial}{\partial t}\Bigl[\underbrace{i\Bigl(\phi^* \frac{\partial \phi}{\partial t} - \phi \frac{\partial \phi^*}{\partial t}\Bigr)}_{\rho}\Bigr] + \nabla \cdot [\underbrace{-i(\phi^* \nabla \phi - \phi \nabla \phi^*)}_{\boldsymbol{j}}] = 0. \qquad (3.17)$$

(3.4) と比べると，括弧の中の各項は確率密度 ρ，流れの密度 $\boldsymbol{j}$ と同定できる。

たとえば，エネルギーE，運動量$\boldsymbol{p}$を持ち，Klein-Gordon 方程式の解

$$\phi = Ne^{i\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x} - iEt}$$

で記述される自由粒子に対して，(3,17) から次の関係が得られる ((3.8)参照)：

$$\begin{aligned} \rho &= i(-2iE)|N|^2 = 2E|N|^2, \\ \boldsymbol{j} &= -i(2i\boldsymbol{p})|N|^2 = 2\boldsymbol{p}|N|^2. \end{aligned} \tag{3.18}$$

確率密度は粒子の相対論的エネルギーEに比例することがわかる。

これらの結果は4元ベクトルで表すのが便利である。簡潔であるばかりか，共変性がすぐにわかる。D′Alember 演算子 (D′Alembertian) (3.15) を用いると，Klein-Gordon 方程式は

$$(\Box^2 + m^2)\phi = 0 \tag{3.19}$$

となる。さらに，確率密度，流れの密度は，4元ベクトル

$$j^\mu = (\rho,\ \boldsymbol{j}) = i(\phi^* \partial^\mu \phi - \phi \partial^\mu \phi^*) \tag{3.20}$$

を作る。j^μ は (共変的な) 連続の関係

$$\partial_\mu j^\mu = 0 \tag{3.21}$$

を満たす。自由粒子の解

$$\phi = Ne^{-ip\cdot x} \tag{3.22}$$

を用いると，

$$j^\mu = 2p^\mu |N|^2 \tag{3.23}$$

を得る ((3.18) 参照)。

確率密度ρは，4元ベクトルの時間成分である点に注意する。ρがEに比例することは，次の考察から予想されよう。速度$\boldsymbol{v}$の Lorentz ブーストを行うと，体積要素は Lorentz 収縮 $d^3x \to d^3x\sqrt{1-v^2}$ を受ける。したがって $\rho d^3\boldsymbol{x}$ を不変に保つためには，ρ は4元ベクトルの時間成分と同じように $\rho \to \rho/\sqrt{1-v^2}$ と変換しなければならない。

これまでのところはうまくいっている。では，Klein-Gordon 方程式のエネルギー固有値はどうなっているのだろうか。(3.22) を (3.19) に代入すると

$$E = \pm(\boldsymbol{p}^2 + m^2)^{1/2} \tag{3.24}$$

を得る。すなわち，許される正エネルギー ($E>0$) の解に加えて，負エネルギー ($E<0$) の解も現れている。はじめこのことは，決定的な欠陥と思われていた。なぜなら，どんどん低い (負の) エネルギーへの遷移が起こりうるからである。第二の問題は，(3.18) からわかるように，$E<0$ の解は負の確率密度に対応する

ことである。すなわち困難は，

$$\boxed{\rho<0 \text{ を持つ } E<0 \text{ の解}}$$

ということである。この問題が簡単に無視できないことは明らかである。われわれは，完全系を用いて議論しなければならないから，負エネルギーの解を簡単に捨てることはできない。しかし，そうすると，必然的にこの望ましくない状態を取り込むことになる。

3.4　歴史のエピソード

1927年，Dirac は，これらの困難を避けるために，$\partial/\partial t$ と ∇ について線形な相対論的波動方程式を案出した。これによって彼は，負の確率密度の問題を解決することに成功し，同時に，方程式がスピン 1/2 粒子を記述するという予期しなかったボーナスを手にした。だが，図 3·1 に描いた自由な Dirac 電子のエネルギースペクトルからわかるように，負エネルギーの解は依然として現れる。Dirac は，排他原理を持ち出して負エネルギー解を避けた。つまり，すべての負エネルギー状態は占有されており，真空を無限個の $E<0$ 電子の海と考えるのである。こうすれば，正エネルギーの電子は，排他原理で禁止されるので，低い（負の）エネルギーレベルには落ち込めない。図 3·1 に示したように，負エネルギーの準位 $(-E)$ から正エネルギーの状態 (E') へ電子が励起すると，海の中に孔があく。そこで電荷 $-e$，エネルギー $-E$ の電子がなくなることを，電荷 $+e$，エネルギー $+E$ の反粒子（陽電子）ができたことと考える。したがって，この励起の正味の効果は，粒子対の生成

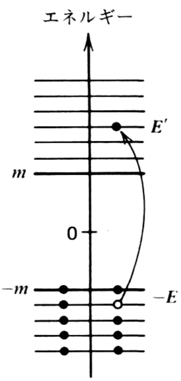


図 3·1　電子のエネルギーレベルのスペクトル。真空に関する Dirac の描像によれば，すべての負エネルギー状態は占有されている。ここでは，電子がもつ 2 つのスピン状態を説明するため，レベルごとに 2 つの状態を示してある。

$$e^-(E')+e^+(E)$$

に相当する。明らかにこれは $E+E'\geq 2m$ を必要とする (図を参照)。1934年までは，Dirac 方程式は，唯一の可能な相対論的波動方程式と考えられていた。

1934年，Pauli と Weisskopf は，Klein-Gordon 方程式を復活させた。すなわち，j^μ に電荷 $-e$ を与え

$$j^\mu=-ie(\phi^*\partial^\mu\phi-\phi\partial^\mu\phi^*) \tag{3.25}$$

を電子の電荷-電流密度と解釈したのである。すると，$\rho=j^0$ は確率密度ではなく，電荷密度を表すことになり，ρ が負であることはもはや障害にはならない。ここではっきりさせておきたいのは，$E<0$ の解は，反対電荷の粒子 (反粒子) に対する $E>0$ の解とみなすことができる，ということである。"空孔理論" とは違って，この解釈はフェルミオンばかりでなくボソンにも適用できる。Bose 粒子をつめていく場合，排他原理は働かないから，Dirac の海をボソンで充たすことはできない。反粒子の考えを発展させ，Feynman 図を導入するため，最初は電子スピンによる複雑化を避けたほうがよい。つまり，"スピンのない電子" に対する Feynman 則を求めることからはじめ，それを用いて相互作用する粒子の散乱振幅と反応断面積を計算する。その後で，現実的な物理の問題，つまり，スピン 1/2 電子の電磁相互作用に対して，もう一度 Dirac 方程式と Feynman 則にもどることにしよう。

3.5 $E<0$ の解に関する Feynman-Stückelberg の解釈

負エネルギー状態を扱う処方は，Stückelberg (1941) と Feynman (1948) によって提唱された。もっとも簡単に表現すれば，その考えは次のようである。負エネルギー解は，時間と逆向き (過去) に進む粒子，あるいはそれと同じ意味であるが，時間の向き (未来) に進む正エネルギーの反粒子状態を記述する。この考えを十分理解することが重要である。というのは，それが Feynman 図を理解する核心となるからである。このことは次のように説明すれば納得してもらえるだろう。

全エネルギー E，運動量 $\boldsymbol{p}$，電荷 $-e$ の 1 個の電子を考える。(3.22)，(3.25) から，4 元電流ベクトルは

$$j^\mu(e^-)=-2e|N|^2(E,\ \boldsymbol{p}) \tag{3.26}$$

となることがわかる。さて同じ $E,\boldsymbol{p}$ を持つ反粒子として 1 個の陽電子 (ポジ

トロン）を考える。その電荷は $+e$ であるから

$$j^{\mu}(\mathrm{e}^{+})=2e|N|^{2}(E,\boldsymbol{p})$$
$$=-2e|N|^{2}(-E,-\boldsymbol{p}) \tag{3.27}$$

を得る。これは，$-E$，$-\boldsymbol{p}$ を持った電子に対する 4 元電流 j^{μ} とまったく同じだ。つまり，1 つの系を考えるかぎり，（その系が）エネルギー E の 1 個の陽電子を放出することは，エネルギー $-E$ の 1 個の電子を吸収することと同等である。これを図示すると次のようになる：

$$\boxed{\uparrow \begin{matrix}\mathrm{e}^{+}\\ E>0\end{matrix} \quad \equiv \quad \downarrow \begin{matrix}\mathrm{e}^{-}\\ -E<0\end{matrix}} \qquad \uparrow \text{時間} \tag{3.28}$$

いいかえれば，時間と逆向きに進む**負エネルギー粒子**の解は，時間の向きに進む正エネルギー**反粒子**の解を表す。もちろん，このような同定が可能になる理由は簡単である。なぜならば

$$e^{-i(-E)(-t)}=e^{-iEt}$$

と考えてよいからである。

1 粒子（e^{-}）波動関数によって定式化すれば，反粒子ばかりでなく多粒子状態も記述できる。一例として，1 個の電子のポテンシャルによる 2 回散乱を考えてみよう。これを図にすると，図 3·2 の時空図（Feynman 図）のようになる。重要な点は，観測するものが同じでも，2 つの図が書けることだ。つまり，ポテンシャルとの相互作用には，2 つの異なる時間順序があるが，それは同じ現象として観測される。事実，2 回散乱の前後での電子の（観測される）経路は，2 つの図で同じであることに注意しよう。右の図は，反粒子の処方によっては

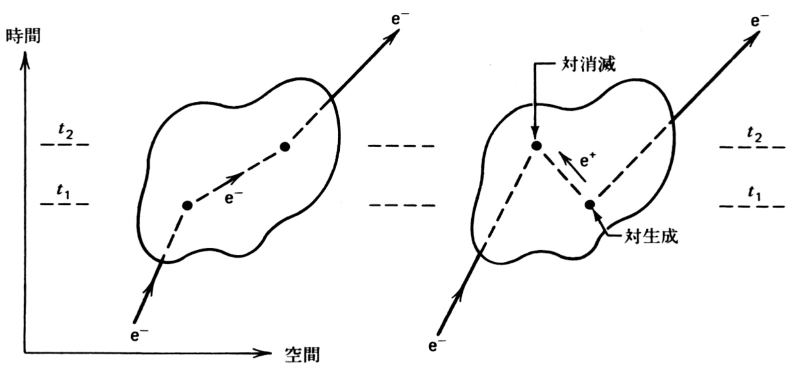


図 3·2　異なる時間順序を持つ電子の 2 重散乱

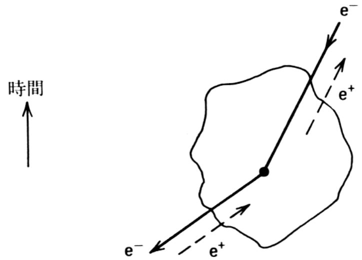


図 3·3 ポテンシャルによる陽電子の散乱

じめて可能になる。時刻 t_2 で，電子は時間と逆向き ($E<0$) に散乱される。この電子は時間の向きに進む陽電子 ($E>0$) と解釈できる。つまり，図 3·2 の Feynman 図は，次のようにみることができる。まず時刻 t_1 で，e^+e^- 対が生成される。それより後の時刻 t_2 で，e^+ は入射電子と対消滅した。したがって時刻 t_1 と t_2 の間で，図 3·2 の右図に示した電子の軌道は，3 つの粒子，すなわち始状態，終状態の電子および陽電子を記述しているのだ！

2 つの 2 回散乱では，終状態で観測される電子は同じだから，この事象の反応確率を計算するにあたって，両方の図を考慮しなければならない。注意することは，空孔理論と同じように，真空は非常に複雑な環境になったということだ。反粒子の処方によって，e^+e^- 対が真空から飛び出し，また真空に消えることができるのである！

1 粒子 (e^-) 波動関数をこのように解釈すれば， 可能な過程はすべて記述することができる。反粒子 (e^+) 状態は，まったく使われていない。たとえば，図 3·3 に示した e^+ の 1 回散乱では，はじめと終わりの状態を交換した上で，負エネルギー電子の解を使えばよい。

われわれの目的は，遷移率と断面積を計算することにある。だがこれまでは，自由粒子の波動関数のみを扱ってきた。ではどのように相互作用を取り込めばよいのか。上で述べた“1 回”散乱とか“2 回”散乱の議論から暗示されるように，摂動論が散乱振幅の計算に使えるだろう。したがって，まず，これから必要となる摂動論の主要な結果を思い出すことにしよう。

3.6 非相対論的摂動論

自由粒子に対する Schrödinger 方程式

$$H_0\phi_n = E_n\phi_n, \quad \int_V \phi_m^* \phi_n d^3x = \delta_{mn} \tag{3.29}$$

の解を知っているとしよう。ここでハミルトニアン H_0 は時間に依存しない。簡

単のために，体積 V の箱の中に1個の粒子が存在するように解を規格化する。目的は，相互作用ポテンシャル $V(\boldsymbol{x},t)$ の中で運動する1個の粒子に対して Schrödinger 方程式

$$(H_0+V(\boldsymbol{x},t))\psi=i\frac{\partial\psi}{\partial t} \tag{3.30}$$

を解くことである。(3.30) の解はすべて

$$\psi=\sum_n a_n(t)\phi_n(\boldsymbol{x})e^{-iE_nt} \tag{3.31}$$

のような形に表すことができる。未知の係数 $a_n(t)$ を求めるために，(3.31) を (3.30) に代入して

$$i\sum_n\frac{da_n}{dt}\phi_n(\boldsymbol{x})e^{-iE_nt}=\sum_n V(\boldsymbol{x},t)a_n\phi_n(\boldsymbol{x})e^{-iE_nt}$$

を得る。次に $\phi_f{}^*$ をかけ体積 V 内で積分する。規格直交関係 (3.29) を用いると，係数 a_n について次のような連立1階微分方程式が導かれる：

$$\frac{da_f}{dt}=-i\sum_n a_n(t)\int\phi_f{}^*V\phi_n d^3x e^{i(E_f-E_n)t}. \tag{3.32}$$

ポテンシャル V が作用する前には，粒子は非摂動ハミルトニアン H_0 の固有状態にあるとしよう。すなわち時間 $t=-T/2$ において，

$$\begin{aligned}&a_i(-T/2)=1,\\&a_n(-T/2)=0\qquad(n\neq i\text{ のとき})\end{aligned} \tag{3.33}$$

であり，したがって

$$\frac{da_f}{dt}=-i\int d^3x\phi_f{}^*V\phi_i e^{i(E_f-E_i)t} \tag{3.34}$$

が導かれる。もしポテンシャルが小さく，ごく短い時間だけ作用するとすれば，1次近似として，これらの初期条件がすべての時間で成り立つものと仮定できる。(3.34) を積分して

$$a_f(t)=-i\int_{-T/2}^{t}dt'\int d^3x\phi_f{}^*V\phi_i e^{i(E_f-E_i)t'} \tag{3.35}$$

を得る。とくに相互作用が終わった $t=+T/2$ において

$$T_{fi}\equiv a_f(T/2)=-i\int_{-T/2}^{T/2}dt\int d^3x[\phi_f(\boldsymbol{x})e^{-iE_ft}]^*V(\boldsymbol{x},t)[\phi(\boldsymbol{x})e^{-iE_it}] \tag{3.36}$$

が成り立つ。これを共変形に書くと次のようになるだろう：

$$T_{fi}=-i\int d^4x\phi_f{}^*(x)V(x)\phi_i(x). \tag{3.37}$$

もちろん，$a_f(t)$ の表式は，$a_f(t)\ll 1$ のときに限ってよい近似になるが，このことは，あらかじめ仮定されていた。

$|T_{fi}|^2$ は粒子が始状態 i から終状態 f に散乱される確率，と解釈したくなる。しかし，これは正しいのだろうか。$V(\boldsymbol{x},t)=V(\boldsymbol{x})$，つまり V が時間に依存しない場合を考えよう。すると (3.36) は

$$\begin{aligned}T_{fi}&=-iV_{fi}\int_{-\infty}^{+\infty}dte^{i(E_f-E_i)t}\\&=-2\pi iV_{fi}\delta(E_f-E_i)\end{aligned} \tag{3.38}$$

のように書くことができる。ここで

$$V_{fi}\equiv\int d^3x\phi_f{}^*(\boldsymbol{x})V(\boldsymbol{x})\phi_i(\boldsymbol{x}). \tag{3.39}$$

(3.38) の δ 関数は，粒子のエネルギーが，遷移 $i\to f$ で保存されるという事実を表している。このことは，不確定性原理によって，状態 i と f の時間間隔が無限に長く，したがって，$|T_{fi}|^2$ が意味のある量ではないことを示す。そこで，$|T_{fi}|^2$ のかわりに単位時間あたりの遷移確率を定義する。

$$W=\lim_{T\to\infty}\frac{|T_{fi}|^2}{T}. \tag{3.40}$$

(3.38) を 2 乗して，

$$\begin{aligned}W&=\lim_{T\to\infty}2\pi\frac{|V_{fi}|^2}{T}\delta(E_f-E_i)\int_{-T/2}^{+T/2}dte^{i(E_f-E_i)t}\\&=\lim_{T\to\infty}2\pi\frac{|V_{fi}|^2}{T}\delta(E_f-E_i)\int_{-T/2}^{+T/2}dt\\&=2\pi|V_{fi}|^2\delta(E_f-E_i)\end{aligned} \tag{3.41}$$

を得る。この式は，始状態と終状態につき積分して，はじめて物理的に意味のあるものになりうる。素粒子物理学でよく扱うのは，特別な始状態から出発し，いくつかの終状態のうちの 1 つに終わる場合である。$\rho(E_f)$ を終状態の密度とする。すなわち，$\rho(E_f)dE_f$ はエネルギー間隔 E_f と E_f+dE_f にある状態数を表す。エネルギー保存則を課して，状態密度につき積分すれば遷移率を得る。

$$\begin{aligned}W_{fi}&=2\pi\int dE_f\,\rho(E_f)|V_{fi}|^2\delta(E_f-E_i)\\&=2\pi|V_{fi}|^2\rho(E_i).\end{aligned} \tag{3.42}$$

これが，Fermi の黄金律である。(3.32) の右辺に $a_n(t)$ の結果 (3.35) を代入す

ると，上に述べた近似の精度を上げることができるのは明らかである。

$$\frac{da_f}{dt}=\cdots+(-i)^2\left[\sum_{n\neq i}V_{ni}\int_{-T/2}^{t}dt'e^{i(E_n-E_i)t'}\right]V_{fn}e^{i(E_f-E_n)t}. \tag{3.43}$$

ここで … は，第一近似を表す。T_{fi} に対する補正は，

$$T_{fi}=\cdots-\sum_{n\neq i}V_{fn}V_{ni}\int_{-\infty}^{+\infty}dte^{i(E_f-E_n)t}\int_{-\infty}^{t}dt'e^{i(E_n-E_i)t'}$$

である。dt' の積分に意味をもたせるため，指数関係の中に小さな正の量 ε を含む項を挿入しなければならない。ε は，積分

$$\int_{-\infty}^{t}dt'e^{i(E_n-E_i-i\varepsilon)t}=i\frac{e^{i(E_n-E_i-i\varepsilon)t}}{E_i-E_n+i\varepsilon}$$

を行った後で 0 に近づける。したがって，T_{fi} に対する 2 次の補正は，

$$T_{fi}=\cdots-2\pi i\sum_{n\neq i}\frac{V_{fn}V_{ni}}{E_i-E_n+i\varepsilon}\delta(E_f-E_i) \tag{3.44}$$

となる。

問題 3.4 $i\to f$ の遷移率は，(3.42) で次の置き換えによって得られることを示せ：

$$V_{fi}\longrightarrow V_{fi}+\sum_{n\neq i}V_{fn}\frac{1}{E_i-E_n+i\varepsilon}V_{ni}+\cdots. \tag{3.45}$$

また，3 次の補正項を書け。

(3.45) は，V についての 1 次，2 次，… の振幅に対する摂動項である。図 3・4 の Feynman 図は，非相対論的摂動展開のはじめの 2 項を表す。それぞれの相互作用バーテックスには，V_{ni} のような因子を与え，各中間状態の伝播には "伝播" 関数の因子として $1/(E_i-E_n)$ を対応させる。中間状態は，エネルギーが保存しない ($E_n\neq E_i$) という意味で "仮想的" である。もちろん始・終状態間では，

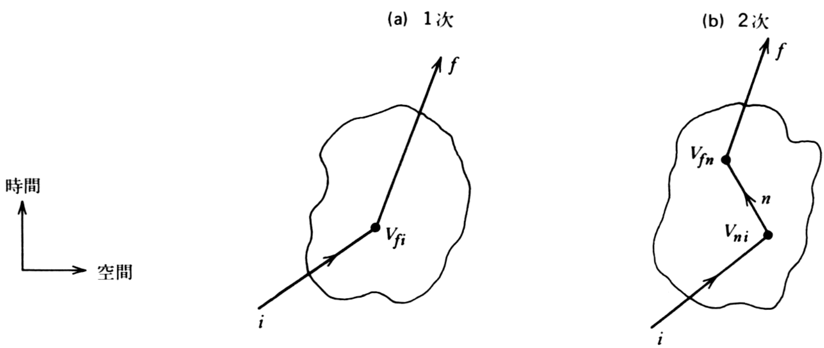


図 3・4 i → f 遷移に対する 1 次および 2 次の寄与

δ 関数 $\delta(E_f-E_i)$ が示す通り，エネルギーは保存する $(E_f=E_i)$。中心課題は，反粒子を含め相対論的粒子も扱えるように，この理論の枠を拡張することである。これが次章の内容である。

3.7 Feynman-Stückelberg 流の散乱振幅則

反粒子が時間と逆に進む負エネルギー粒子の解とみなしうるならば，反粒子を含む散乱振幅をどのように作ることができるだろうか。もちろん反粒子の処方は，エネルギー保存を満たしていなければならない。

図 3·4 の Feynman 図は，共変的な状況を表していない。それらは空間に固定した，静的ポテンシャルによる散乱に関係している。だが，われわれの興味は，粒子同士の散乱にある。このために，1 つの粒子が作る電磁ポテンシャル V の中を，もう 1 つの粒子が運動している場合を考えてみよう。第 1 章で電子間の電磁相互作用が光子の放出・吸収によるということを述べた。図 3·5 のバーテックスにおいて，エネルギー保存を考えよう。そこでは，光子が電子によって吸収されている。(共変的) 相互作用 V の形は次の章で導くが，V がエネルギー ω の入射光子に対して，時間依存性 $e^{-i\omega t}$ を持つことは明らかである。したがって，遷移振幅 T_{fi} (3.36) は

$$\int(e^{-iE_f t})^* e^{-i\omega t} e^{-iE_i t}dt=2\pi\delta(E_f-\omega-E_i)$$

に比例する。したがって，$E_f=E_i+\omega$ である。

明らかに，まったく同じ議論が図 3·6 (a) に示す反粒子 (陽電子) の散乱についてもあてはまる。ところで前にも述べたように，図3·6 (b) に示す電子状態

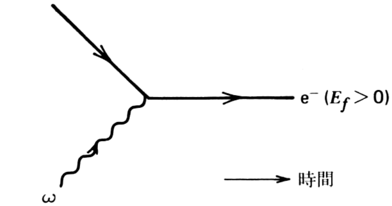


図 3·5 e⁻ 散乱。時間の向きは (上向きではなく)，左から右へとってある。

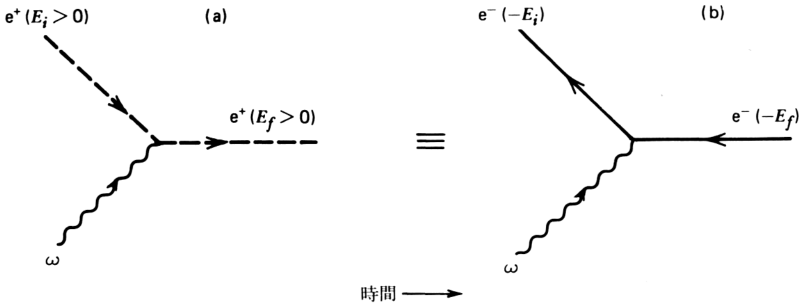


図 3·6　e^+ 散乱を，時間が逆向きで，負エネルギーをもつ e^- 散乱として表す。

のみを用いて，行列要素を定式化したい。このとき入射状態は，負エネルギー $-E_f$ の電子を表す。遷移振幅は，因子

$$\int (e^{-i(-E_i)t})^* e^{-i\omega t} e^{-i(-E_f)t} dt = 2\pi\delta(-E_i - \omega + E_f)$$

を含み，ふたたび $E_f = E_i + \omega$ が要請される。計算の規則は行列要素

$$\int \phi_{\mathrm{out}}^* V \phi_{\mathrm{in}} d^4x$$

を作ることである。ここで，入射と放出は，常に粒子（電子）線上の矢印で示す。

問題 3.5　行列要素を作る規則が，図 3·7 の (a) e^+e^- 対生成，(b) e^+e^- 消滅に対して，エネルギー保存を満足することを確かめよ。同じ考えで，行列要素の空間部分を用いて，期待されるべき 3 次元運動量保存が得られることを示せ。

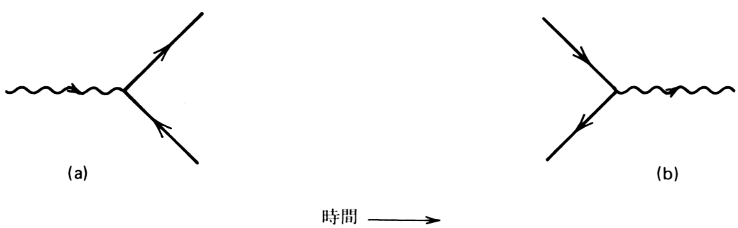


図 3·7

こうして摂動論による定式化ができあがった。これによって，また，多粒子状態も記述できるのである。次の仕事は，これらの表式を相対論的共変形式に作りあげることだ。ここで，(3.37) はすでに共変的であることを注意しておこう。

4

スピンを持たない粒子の電気力学

この章の表題については多少の説明を要する。スピンを持たないクォークやレプトンは実験で観測されていないからである。スピンを持たないハドロン(たとえば π メソン) は存在する。だがそれらは，スピン 1/2 のクォークとスピン 1 のグルーオンを含む複雑な構造を持つ。この章で現れるスピン 0 のレプトン，つまり Klein-Gordon 方程式を満たすレプトンは，完全に仮想的な対象である。この章の目標は，共変形式の摂動論をどのように使うか，その手法を見出すことにある。それを明らかにするには，粒子と相互作用を選ばなければならない。簡単のため，われわれはまずスピンのない荷電レプトンを採用するが，これはスピンの複雑さを避けて話をはじめたいからだ。相互作用としては電磁力を取り上げる。電磁相互作用は，素粒子物理学では基本的な重要性を持つ。

量子電気力学は，ただ 1 つのゲージ粒子，光子を含むという意味で，ゲージ理論のもっとも単純な例といえる。今では，ゲージ理論こそすべての相互作用を記述できる，と考えられている。色力学や弱い相互作用も QED を手本として作られたゲージ理論で記述されるが，これは第 14, 15 章で示す。この章で扱う“スピンのないレプトン”は仮想的なものであるが，相互作用はそうではない。この点の理解は，さらに先へ進む上で重要である。レプトンのスピンを考慮した場合の複雑な扱いは，第 5, 6 章で説明する。

4.1　電磁場 A^μ 内の電子

スピンを持たない自由電子は，Klein-Gordon 方程式 (3.19) を満たす：

$$(\partial_\mu \partial^\mu + m^2)\phi = 0.$$

古典電気力学では，電磁ポテンシャル $A^\mu = (A^0, \boldsymbol{A})$ 内の電荷 $-e$ を持った粒子

の運動は，

$$p^\mu \longrightarrow p^\mu + eA^\mu \tag{4.1}$$

のような置き換えによって得られる（Goldstein あるいは Jackson のような標準的教科書を参照)。したがって，対応する量子力学的な置き換えは，

$$\boxed{i\partial^\mu \longrightarrow i\partial^\mu + eA^\mu} \tag{4.2}$$

である（(3.14) 参照)。Klein-Gordon 方程式は

$$(\partial_\mu \partial^\mu + m^2)\phi = -V\phi \tag{4.3}$$

となる。ここで電磁的な摂動は

$$V = -ie(\partial_\mu A^\mu + A^\mu \partial_\mu) - e^2 A^2 \tag{4.4}$$

で与えられる。(4.3) では，Schrödinger 方程式における運動エネルギーとポテンシャルエネルギー項が正しい相対的な符号を持つように V に負号をつけた。

すべては，(4.2) に含まれている！　これこそ量子電気力学なのだ。(第 14 章では，物理学がゲージ変換，すなわち位相変換に対して不変という要請から，この基本的な処法がごく自然に導かれることがわかる。)

ポテンシャル (4.4) は，パラメター e によって特徴づけられている。(1.3) に示したように，e はまた（自然単位で）微細構造定数と

$$\alpha = \frac{e^2}{4\pi} \simeq \frac{1}{137} \tag{4.5}$$

の関係にある。電磁結合が小さいことは，α のべき乗による V の摂動展開が意味を持つことを示す。つまり，散乱振幅への（αについての）最低次の寄与がすでによい近似になっているはずである。

最低次で話を進めるので，(4.4) で e^2A^2 項を無視することにしよう。図 4･1 に示すように，スピンを持たない電子が，電磁ポテンシャル A_μ によって状態 ϕ_i から ϕ_f へ散乱する場合の振幅 (3.37) は，

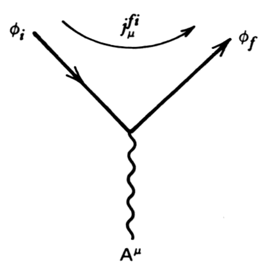


図 4･1　A^μ と相互作用する “スピンを持たない” 電子

$$T_{fi}=-i\int\phi_f{}^*(x)\,V(x)\,\phi_i(x)\,d^4x$$

$$=i\int\phi_f{}^*ie(A^\mu\partial_\mu+\partial_\mu A^\mu)\,\phi_i d^4x \tag{4.6}$$

となる。2番目の微分は A^μ と ϕ_i に作用するが，部分積分によって

$$\int\phi_f{}^*\partial_\mu(A^\mu\phi_i)\,d^4x=-\int\partial_\mu(\phi_f{}^*)A^\mu\phi_i d^4x. \tag{4.7}$$

ここで，$|\boldsymbol{x}|$，$t\to\infty$ でポテンシャルは消えるものとし，表面項を落とした。したがって，振幅 T_{fi} は電磁相互作用を暗示するような形

$$T_{fi}=-i\int j_\mu{}^{fi}A^\mu d^4x \tag{4.8}$$

に書き換えられる。ここで

$$j_\mu{}^{fi}(x)\equiv-ie(\phi_f{}^*(\partial_\mu\phi_i)-(\partial_\mu\phi_f{}^*)\phi_i) \tag{4.9}$$

は，(3.25) との比較から，$i\to f$ へ電子が遷移するときの電磁カレント(電流)とみなすことができる。スピン0の入射電子が4元運動量 p_i を持つならば，その波動関数は

$$\phi_i(x)=N_i e^{-ip_i\cdot x} \tag{4.10}$$

である。ここで N は規格化定数である。ϕ_f も同じように表せば

$$j_\mu{}^{fi}=-eN_iN_f(p_i+p_f)e^{i(p_f-p_i)\cdot x} \tag{4.11}$$

を得る。

4.2 "スピンを持たない"電子・ミューオン散乱

図4·1に示すように，電磁ポテンシャル A^μ による電子の散乱から得られた結果を用いて，電子が別の荷電粒子，たとえば電子あるいはミューオンによって散乱される場合が計算できる。同種粒子を扱うのを避けるため，ここでは電子とミューオンの散乱を考えよう。この過程に対応する Feynman 図を図4·2に示す。この図は問題をどのように考えるかを暗示している。計算は前節の拡張である。電磁ポテンシャル A^μ を，その源である"スピンのない"荷電ミューオンとして正しく同定しなければならない。これは Maxwell 方程式

$$\Box^2A^\mu=j_{(2)}{}^\mu \tag{4.12}$$

によってなされる。この式は，ミューオンによる電流 $j_{(2)}{}^\mu$ に伴う A^μ を決定する。((4.12)，すなわち Lorentz ゲージでの Maxwell 方程式の共変形式に慣れていない読者は，問題 6.9, 6.10 によって理解していただきたい。) さて (4.12) の

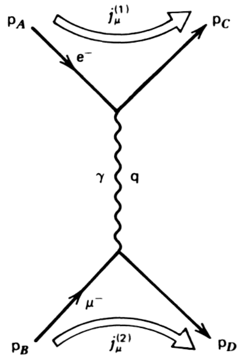


図 4·2 電子・ミューオン散乱における粒子の4元運動量

電流として，何をとればよいのだろう。ふたたび，図 4·2 が解答を暗示する。スピンのないミューオンが作る電流は，電子の電流 (4.11) と同じ形をしている。すなわち

$$j_{(2)}{}^{\mu} = -eN_{\rm B}N_{\rm D}(p_{\rm D}+p_{\rm B})^{\mu}e^{i(p_{\rm D}-p_{\rm B})x}. \tag{4.13}$$

運動量 $p_{\rm B}, p_{\rm D}$ は，図 4·2 で定義されている。

$$\Box^2 e^{iq\cdot x} = -q^2 e^{iq\cdot x} \tag{4.14}$$

であるから，(4.12) の解は，

$$A^{\mu} = -\frac{1}{q^2}j_{(2)}{}^{\mu} \qquad (q = p_{\rm D} - p_{\rm B}) \tag{4.15}$$

のようになる。このミューオンが作る場 A^{μ} を(4.8) に代入して，電子・ミューオン散乱の (最低次の) 振幅は

$$T_{fi} = -i\int j_{\mu}{}^{(1)}(x)\left(-\frac{1}{q_2}\right)j_{(2)}{}^{\mu}(x)\,d^4x \tag{4.16}$$

となる。この式に，電子電流の対応する表式 (4.11) とともに，(4.13) を代入し，x で積分して

$$T_{fi} = -iN_{\rm A}N_{\rm B}N_{\rm C}N_{\rm D}(2\pi)^4\delta^{(4)}(p_{\rm D}+p_{\rm C}-p_{\rm B}-p_{\rm A})\mathcal{M} \tag{4.17}$$

を得る。ここで

$$-i\mathcal{M} = (ie(p_{\rm A}+p_{\rm C})^{\mu})\left(-i\frac{g_{\mu\nu}}{q^2}\right)(ie(p_{\rm B}+p_{\rm D})^{\nu}) \tag{4.18}$$

である。(4.18) の結果がつじつまがあっていることは，ミューオンが電子の作る場 A_{μ} 内で動くとしても，(4.18) と同じ振幅が導かれることからわかる。(4.17) で定義される $\mathcal{M}$ は不変振幅として知られている。また (4.17) の δ 関数は，反応過程のエネルギー・運動量保存を表す。

非相対論的摂動論で T_{fi} を摂動展開したとき，各項を分類するため図 3·4 のような図を書く。さらに (3.44) で与えられるように，T_{fi} の分子と分母の因子は

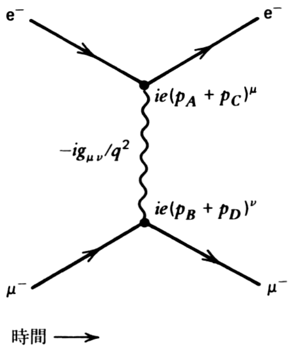


図 4·3　"スピンを持たない"電子・ミューオン散乱に対するバーテックス因子と伝播関数

図 3·4 (b) の相互作用バーテックスと粒子の伝播関数に対応している。摂動展開項の共変形式についても，同じ図を書くことは有効である。たとえば図 4·3 は，スピンのない電子・ミューオン散乱において，$e^2(\alpha)$ の次数の過程を表し，対応する振幅が (4.17), (4.18) で与えられている。これが最低次の Feynman 図である。波線はレプトン間に交換される光子を表し，それに対応する因子 $-ig_{\mu\nu}/q^2$ を，"光子伝播関数" と呼ぶ。光子はスピン 1 の粒子であるから，Lorentz 添字 μ, ν を持つ (第 6 章参照)。光子の 4 元運動量 q は，バーテックスにおける運動量保存によって決定される。$q^2 \neq 0$ であるが，このような光子を "仮想光子" または "質量殻上にない光子" と呼ぶ。Feynman 図の各バーテックスには，図 4·3 に示すような因子を与える。各バーテックスは，電磁結合の因子 e と，光子の添字を表す 4 元ベクトルの添字を含む。とくに負号や因子 i を与えたのは，高次の Feynman 図でも正しい結果が得られるように配慮したためである。3 つの量 (2 つのバーテックス因子と伝播関数) の積によって $-i\mathcal{M}$ が作られることに注意する。

Feynman 図の中にバーテックスと内線があるときはいつでも，それに対応する因子の積を作れば，振幅 $-i\mathcal{M}$ が求められる。そこでまず，量子電気力学について，Feynman 則の一覧表を作ることからはじめよう。その表が完成すれば，どんな Feynman 図でもそれに対応する振幅 $-i\mathcal{M}$ の表式をただちに書き下すことができる。一覧表は，6.17 節に与えられている。

4.3　不変振幅 $\mathcal{M}$ による断面積の表式

上で行った計算を実験から得た観測量に関係させるため，自由粒子の波動関数

$$\phi = Ne^{-ip\cdot x} \tag{4.19}$$

の規格定数 N を決めなければならない。(3.18) から ϕ で表される粒子の確率密度は

$$\rho = 2E|N|^2$$

となる。ρ が E に比例することは，ちょうど体積要素 d^3x の Lorentz 収縮をつぐなって，粒子数 ρd^3x を不変にするためであった。したがってわれわれは，体積 V の中で考えて，その中に $2E$ 個の粒子があるように規格化しよう：

$$\int \rho dV = 2E. \tag{4.20}$$

すなわち，共変的な規格化

$$N = \frac{1}{\sqrt{V}} \tag{4.21}$$

を採用する。

反応過程 A+B → C+D に対して，単位体積あたりの遷移率は

$$W_{fi} = \frac{|T_{fi}|^2}{TV}$$

である。ここで T は，相互作用している時間間隔を表す。遷移振幅 T_{fi} は

$$T_{fi} = -iN_A N_B N_C N_D (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_C + p_D - p_A - p_B)\mathcal{M}$$

で与えられる ((4.17) 参照)。T_{fi} の 2 乗を作ると，δ 関数の 1 つが残り，もう 1 つの δ 関数に $(2\pi)^4$ をかけたものが TV になる (計算は，(3.41) を導いた場合と同じである)。したがって (4.21) を用いて，遷移率は

$$W_{fi} = (2\pi)^4 \frac{\delta^{(4)}(p_C + p_D - p_A - p_B)|\mathcal{M}|^2}{V^4} \tag{4.22}$$

となる。散乱過程 AB → CD の実験結果は，通常，"断面積" という形で与えられる。断面積は，

$$\text{断面積} = \frac{W_{fi}}{(\text{入射フラックス})} \cdot (\text{終状態の数}) \tag{4.23}$$

によって遷移率と関係する。ここで，括弧で示した量は，入ってくる状態と出ていく状態の "密度" に対応するものである。まずはじめに，注意深くこれらの量を定義し，このように定義した断面積が，なぜ粒子 A, B が相互作用して C, D を生成するときの有効面積とみなせるかを示そう。

量子論によれば，1 個の粒子に対して，運動量要素 d^3p を持って，体積 V の中にある終状態の数は $Vd^3p/(2\pi)^3$ となる (問題 4.1 参照)。ところで，体積 V の中には $2E$ 個の粒子があるように規格化したから，

$$\frac{\text{終状態の数}}{\text{粒子数}}=\frac{Vd^3p}{(2\pi)^3 2E} \tag{4.24}$$

となる。したがって，運動量要素 d^3p_{C}，d^3p_{D} の中に散乱される粒子 C, D に対しては，

$$\text{終状態の数}=\frac{Vd^3p_{\mathrm{C}}}{(2\pi)^3 2E_{\mathrm{C}}}\cdot\frac{Vd^3p_{\mathrm{D}}}{(2\pi)^3 2E_{\mathrm{D}}} \tag{4.25}$$

である。

問題 4.1　体積 $V=L^3$ の箱を考える。運動量の x 成分が p_x と p_x+dp_x の間にある状態数は $(L/2\pi)dp_x$ となることを示せ。また，その空間から出ていく正味の粒子流がないためには，波動関数とその微分に周期的な境界条件を与える必要があることを確かめよ。

ここで始状態のフラックスに目を向けると，実験室系で計算するのがもっとも簡単なことがわかる。単位時間に単位面積を通過するビーム粒子の数は $|\boldsymbol{v}_{\mathrm{A}}|2E_{\mathrm{A}}/V$，単位体積中の標的粒子の数は $2E_{\mathrm{B}}/V$ である。したがって，規格化に依存しない入射粒子の "密度" を得るために，

$$\text{入射フラックス}=|\boldsymbol{v}_{\mathrm{A}}|\frac{2E_{\mathrm{A}}}{V}\frac{2E_{\mathrm{B}}}{V} \tag{4.26}$$

をとる。(4.22), (4.25), (4.26) を (4.23) に代入すると，粒子 C, D が $d^3p_{\mathrm{C}}\,d^3p_{\mathrm{D}}$ へ散乱される微分断面積 $d\sigma$ が得られる：

$$d\sigma=\frac{V^2}{|\boldsymbol{v}_{\mathrm{A}}|2E_{\mathrm{A}}2E_{\mathrm{B}}}\frac{1}{V^4}|\mathcal{M}|^2\frac{(2\pi)^4}{(2\pi)^6}\delta^{(4)}(p_{\mathrm{C}}+p_{\mathrm{D}}-p_{\mathrm{A}}-p_{\mathrm{B}})\frac{d^3p_{\mathrm{C}}}{2E_{\mathrm{C}}}\cdot\frac{d^3p_{\mathrm{D}}}{2E_{\mathrm{D}}}V^2. \tag{4.27}$$

規格化体積 V は任意だから，最終的には打ち消し合わなければならないが，事実 (4.27) ではそうなっている。以後 V を落とし，単位体積中で考えることにしよう。すなわち，($2E$ 粒子)/(単位体積) のように規格化すると，波動関数の規格化因子 (4.21) は

$$N=1 \tag{4.28}$$

となる。これが，スピンを持たない粒子の外線に関連して，$N=1$ がかかった理由である (6.17 節の Feynman 則の表を参照)。

(4.23)(および (4.27)) で定義した，断面積の物理的解釈は何であろうか。遷移率 W_{fi} に関連して，終状態の数が現れるのは周知のことだ ((3.42) 参照)。それは単位時間あたりに散乱される粒子数 n_S を表す。(4.23) でフラックスを導入したのは，反応率が特定の実験で用いられるビームや標的に含まれる粒子数によらないようにするためである。つまりわれわれは，断面積で固有の散乱確

率，すなわち相互作用 AB → CD に固有の強さを表したい。したがって (4.23) では，標的内の粒子数 (n_t) をビームのフラックス ($n_b v_b$) で割り算している。$n_b v_b$は，ビームの方向に垂直な単位面積を単位時間に通る粒子数を表す (もし標的粒子が運動しているなら，v_b はビームと標的の相対速度になる)。今まで述べたことを (4.23) を用いて表せば，

$$n_s = (n_b v_b) n_t \sigma$$

となる。計数率 n_s は，常に (ビームフラックス×標的粒子数) に比例する。物理を含むのは比例定数 σ，すなわち反応に固有の散乱確率である。σ が面積の次元を持つことは，左辺 n_s の次元が (時間)$^{-1}$，($n_b v_b$) n_t はフラックスの次元，すなわち (面積×時間)$^{-1}$ という事実から確かめられる。直観的には，σ は標的粒子からみたビームの有効面積，すなわち A, B が相互作用し，C, D を生成するための反応領域と解釈できる。

微分断面積 (4.27) は記号的に次のように書くことができる：

$$d\sigma = \frac{|\mathcal{M}|^2}{F} dQ. \tag{4.29}$$

ここで，dQ は Lorentz 不変な位相空間因子である (d Lips と書くこともある)：

$$dQ = (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_C + p_D - p_A - p_B) \frac{d^3 p_C}{(2\pi)^3 2E_C} \cdot \frac{d^3 p_D}{(2\pi)^3 2E_D}. \tag{4.30}$$

ここで $d^3 p/E$ は Lorentz 不変量である。実験室系における入射フラックスは，$\boldsymbol{v}_A = \boldsymbol{p}_A / E_A$ を用いて，

$$F = |\boldsymbol{v}_A| 2E_A \cdot 2E_B \tag{4.31}$$

である。A, B が直線的に衝突する一般の場合は，

$$\begin{aligned} F &= |\boldsymbol{v}_A - \boldsymbol{v}_B| 2E_A \cdot 2E_B \\ &= 4(|\boldsymbol{p}_A| E_B + |\boldsymbol{p}_B| E_A) \\ &= 4((p_A \cdot p_B)^2 - m_A{}^2 m_B{}^2)^{1/2} \end{aligned} \tag{4.32}$$

と書けるが，明らかに F は Lorentz 不変量になっている。

(4.29) が最終結果である。物理情報は不変振幅 $\mathcal{M}$ に含まれることがわかる。観測する計数率 $d\sigma$ を相互作用の普遍的な量 $\mathcal{M}$ に関係させるため，運動学的因子 dQ と F を含める必要がある。

問題 4.2　重心系では，反応過程 AB → CD に対して，

$$dQ = \frac{1}{4\pi^2} \frac{p_f}{4\sqrt{s}} d\Omega \tag{4.33}$$

$$F = 4 p_i \sqrt{s} \tag{4.34}$$

が成り立ち，したがって微分断面積は次のように書けることを示せ：

$$\boxed{\left.\frac{d\sigma}{d\Omega}\right|_{\mathrm{cm}}=\frac{1}{64\pi^2 s}\frac{p_f}{p_i}|\mathcal{M}|^2.} \tag{4.35}$$

以上の式で，$d\Omega$ は $\boldsymbol{p}_{\mathrm{C}}$ のまわりの立体角要素，$s=(E_{\mathrm{A}}+E_{\mathrm{B}})^2$，$|\boldsymbol{p}_{\mathrm{A}}|=|\boldsymbol{p}_{\mathrm{B}}|=p_i$，$|\boldsymbol{p}_{\mathrm{C}}|=|\boldsymbol{p}_{\mathrm{D}}|=p_f$ である。

問題 4.3　(4.18) を用いて，非常に高エネルギーのスピンを持たない電子・ミューオン散乱に対して

$$\left.\frac{d\sigma}{d\Omega}\right|_{\mathrm{cm}}=\frac{\alpha^2}{4s}\times\left(\frac{3+\cos\theta}{1-\cos\theta}\right)^2$$

を示せ。ここで θ は散乱角，$\alpha=e^2/4\pi$ である。質量は無視する。

4.4　$\mathcal{M}$ を用いた崩壊率

粒子崩壊率の表式も，同じ手法で導くことができる。崩壊過程 A → 1+2+⋯+n に対して，終状態の粒子が運動量要素 $d^3p_1, d^3p_2, \cdots, d^3p_n$ に生成する微分崩壊率は次のようになる：

$$d\Gamma=\frac{1}{2E_{\mathrm{A}}}|\mathcal{M}|^2\frac{d^3p_1}{(2\pi)^3 2E_1}\cdots\frac{d^3p_n}{(2\pi)^3 2E_n}(2\pi)^4\delta^{(4)}(p_{\mathrm{A}}-p_1-\cdots p_n). \tag{4.36}$$

これは (4.29)，(4.30) の形をしている。$2E_{\mathrm{A}}$ は単位体積あたりの崩壊粒子数，$\mathcal{M}$ は不変振幅に相当する Feynman 図から計算される。一般的な応用として，2 体崩壊 A → 1+2 の全崩壊率を計算してみよう。すべての可能な運動量 $\boldsymbol{p}_1$，$\boldsymbol{p}_2$ につき (4.36) を積分すると，A の静止系で (4.33) を用いて，

$$\Gamma(\mathrm{A}\to 1+2)=\frac{p_f}{32\pi^2 {m_{\mathrm{A}}}^2}\int|\mathcal{M}|^2 d\Omega \tag{4.37}$$

が導かれる。全崩壊率 Γ は，すべての崩壊チャネルについて崩壊率を加えたものである。明らかに全崩壊率は

$$\Gamma=-\frac{1}{N_{\mathrm{A}}}\left(\frac{dN_{\mathrm{A}}}{dt}\right) \tag{4.38}$$

と書くことができる。これから粒子の個数に対する指数関数的崩壊則を得る：

$$N_{\mathrm{A}}(t)=N_{\mathrm{A}}(0)\,e^{-\Gamma t}. \tag{4.39}$$

Γ^{-1} を粒子 A の寿命という。

4.5　“スピンを持たない”電子・電子散乱

Feynman 則を代表的な反応過程に応用してみよう。電子・電子散乱の新しい特徴は始状態と終状態に同種粒子が存在し，したがって C ↔ D（および A

↔B) の粒子交換に対して，振幅が対称でなければならないということである。その結果，図 4・4 (a) に加えて，第 2 の Feynman 図 (図 4・4 (b)) が存在する。図 4・4 (b) は，A, B, C, D の順序を (a) と同じにすると，(c) のように書ける。

電子 C が A, B のどちらから作られたのか，実験的に区別する方法はない。だから 2 つの振幅 (確率ではなく) を加えなければならない。つまり，スピンを持たない電子の散乱に対する不変振幅は，最低次では (a) と (c) の振幅の和になる：

$$i\mathcal{M}_{\mathrm{e^-e^-}} = -i\left\{-\frac{e^2(p_\mathrm{A}+p_\mathrm{C})_\mu(p_\mathrm{B}+p_\mathrm{D})^\mu}{(p_\mathrm{D}-p_\mathrm{B})^2} - \frac{e^2(p_\mathrm{A}+p_\mathrm{D})_\mu(p_\mathrm{B}+p_\mathrm{C})^\mu}{(p_\mathrm{C}-p_\mathrm{B})^2}\right\}. \quad (4.40)$$

第 1 項は (4.18) からただちに導かれる。第 2 項は，第 1 項で $p_\mathrm{C} \leftrightarrow p_\mathrm{D}$ の交換をすれば得られる。$p_\mathrm{C} \leftrightarrow p_\mathrm{D}$ に対する対称性が，$p_\mathrm{A} \leftrightarrow p_\mathrm{B}$ に対して $\mathcal{M}$ の対称性を保障していることに注意する。

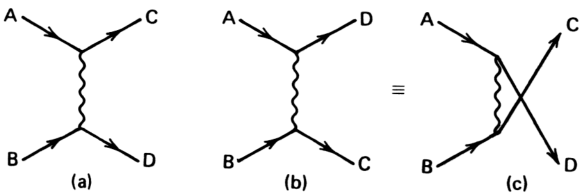


図 4・4　電子・電子散乱に対する，2 つの (最低次の) Feynman 図

4.6　電子・陽電子散乱：交叉の応用

ふたたびここで，2 つの可能な Feynman 図，図 4・5 (a), (c) について考えよう。ここでは，粒子 (電子) 状態だけを用いて話を進める。したがって，図 4・5 (a), (c) を (b), (d) のように解釈するのに，反粒子の処方 (3.28) を用いなければならない。(最低次の) $e^-e^+ \to e^-e^+$ 振幅を計算するため (上の議論および 6.17 節にまとめた) Feynman 則を用いることができる：

$$-i\mathcal{M}_{\mathrm{e^-e^+}} = -i\left(-e^2\frac{(p_\mathrm{A}+p_\mathrm{C})_\mu(-p_\mathrm{D}-p_\mathrm{B})^\mu}{(p_\mathrm{D}-p_\mathrm{B})^2} - e^2\frac{(p_\mathrm{A}-p_\mathrm{B})_\mu(-p_\mathrm{D}+p_\mathrm{C})^\mu}{(p_\mathrm{C}+p_\mathrm{D})^2}\right). \quad (4.41)$$

ここで次の点に注意しよう。図 4・4 (b) の B, D のバーテックス因子は，単に図 4・4 (a) の因子の符号を変えたものであり，それはバーテックスの電荷を $-e$ から $+e$ に変えたとき期待されるものである。さらに，$\mathcal{M}$ が $p_\mathrm{C} \leftrightarrow -p_\mathrm{B}$ の交

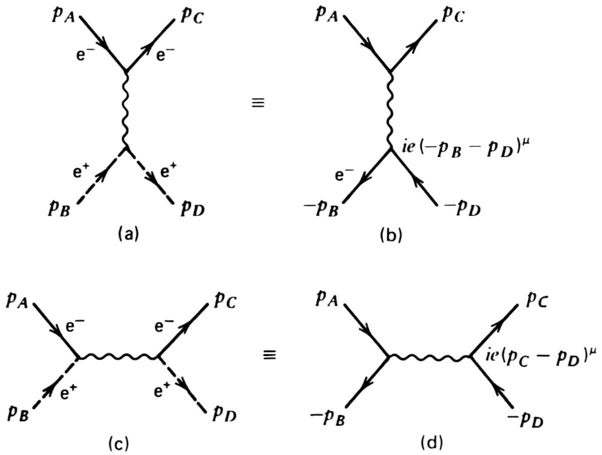


図 4·5　スピンを持たない $e^+e^- \to e^+e^-$ 散乱に対する 2 つの (最低次の) Feynman 図 (b) と (d)

換，すなわち 2 つの "出ていく" 電子の交換に対して対称であることがわかる。

だが，$\mathcal{M}_{\mathrm{e^-e^+}}$ を求めるのには，それを実行する必要はない。$\mathcal{M}_{\mathrm{e^-e^-}}$ について得た結果を，"交叉" という方法で反粒子に置き換えるだけでよい (図 4·6 参照)。こうして

$$\mathcal{M}_{\mathrm{e^-e^+\to e^-e^+}}(p_{\mathrm{A}}, p_{\mathrm{B}}, p_{\mathrm{C}}, p_{\mathrm{D}}) = \mathcal{M}_{\mathrm{e^-e^-\to e^-e^-}}(p_{\mathrm{A}}, -p_{\mathrm{D}}, p_{\mathrm{C}} - p_{\mathrm{B}}) \qquad (4.42)$$

を得る。事実，(4.41) は単に (4.40) で $p_{\mathrm{D}} \leftrightarrow -p_{\mathrm{B}}$ としたものになっていることがわかる。

問題 4.4　スピンのない反応過程 $e^-\mu^+ \to e^-\mu^+$，$e^-e^+ \to \mu^-\mu^+$ の不変振幅を求めるのに Feynman 則を用いよ。また，4.2 節に示した $e^-\mu^- \to e^-\mu^-$ の振幅を適当に交叉させることによって，答えを確かめよ。

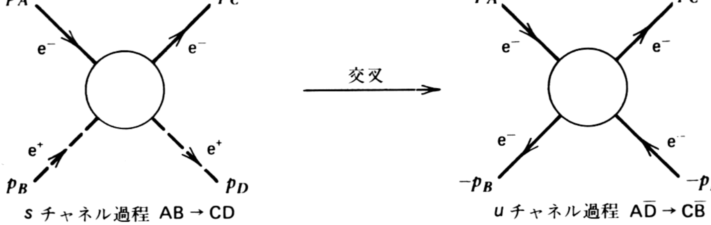


図 4·6　粒子 B と D の交叉 (すなわち反粒子と置き換え)

4.7 Lorentz 不変な変数

散乱過程 AB → CD に対して，2 つの独立な運動学的変数が期待される。たとえば，入射エネルギーと散乱角である。しかし，不変振幅 $\mathscr{M}$ を，Lorentz 変換で不変な変数で書くことができるし，またそれは望ましいことだ。われわれは，任意に粒子の 4 元運動量を選ぶことにする。そこで可能な不変変数は，スカラー積 $p_A \cdot p_B$, $p_A \cdot p_C$, $p_A \cdot p_D$ である。$p_i{}^2 = m_i{}^2$((3.10) 参照) およびエネルギー・運動量保存則 $p_A + p_B = p_C + p_D$ が成り立つので，3 つの変数の中で独立な変数は 2 つしかない。スカラー積のかわりに，それと関係のある (Mandelstam) 変数を使うのが便利である。

$$\begin{aligned} s &= (p_A + p_B)^2, \\ t &= (p_A - p_C)^2, \\ u &= (p_A - p_D)^2. \end{aligned} \tag{4.43}$$

問題 4.5 粒子 i の静止質量を m_i としたとき

$$s + t + u = m_A{}^2 + m_B{}^2 + m_C{}^2 + m_D{}^2 \tag{4.44}$$

を示せ。

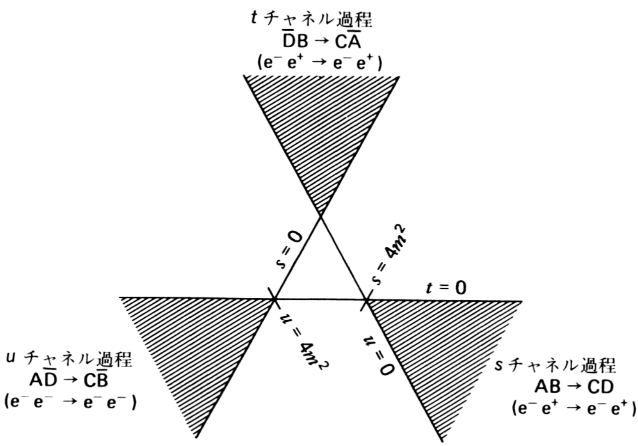


図 4·7 $e^-e^+ \to e^-e^+$ とその交叉反応の物理的領域を示す (Mandelstam) s, t, u 表示。質量が等しくない粒子の散乱では，物理的領域の境界はもっと複雑になる。しかし，3 つの重なりのない領域 (斜線の部分) についての一般的な結果は同じである (問題 4.8 参照)。

交叉によって互いに関係づけられる反応過程につき，その運動学的 (物理的) 領域を表示するため，s, t, u について対称な 2 次元プロットを作る。3 つの軸 $s, t, u=0$ を，高さが $\sum m_i^2$ の正三角形ができるように書く (図 4·7 参照)。三角形の内・外の任意の点から，3 つの軸におろした垂線の長さの和は，(s, t, u の符号を考慮すれば) 三角形の高さ $\sum m_i^2$ に等しくなる ((4.44) 参照)。

s が反応過程 $\mathrm{AB \to CD}$ に対する重心系の全エネルギーの 2 乗であることは容易に示される ((3.12) または問題 4.6 参照)。この場合，$\mathrm{AB \to CD}$ を s チャネル過程とするのが習慣である。上の例では，$e^-e^+ \to e^-e^+$ 散乱がそれにあたる。交叉反応 $\mathrm{A\overline{D} \to C\overline{B}}$, $\mathrm{\overline{D}B \to C\overline{A}}$ を，それぞれ u チャネル，t チャネルとよぶ。それは，u, t が，対応するチャネルにおける重心系の全エネルギーの 2 乗に等しいからである (問題 4.7 参照)。

問題 4.6　$e^-e^+ \to e^-e^+$ を s チャネル過程としたとき，次の関係を確かめよ：

$$
\begin{aligned}
s &= 4(k^2+m^2), \\
t &= -2k^2(1-\cos\theta), \\
u &= -2k^2(1+\cos\theta).
\end{aligned}
\tag{4.45}
$$

ここで θ は重心系における散乱角である。$k=|\boldsymbol{k}_i|=|\boldsymbol{k}_f|$ で，$\boldsymbol{k}_i, \boldsymbol{k}_f$ は入射電子と散乱電子の運動量を表す。この過程は $s \geq 4m^2$, $t \leq 0$, $u \leq 0$ ならば物理的に許されることを示せ。図 4·7 では，物理的領域は斜線で示してある。$t=0$ ($u=0$) は前方 (後方) 散乱に相当することに注意せよ。

問題 4.7　交叉反応 $\mathrm{A\overline{D} \to B\overline{C}}$$(e^-e^- \to e^-e^-)$ に対して，u は重心系における全エネルギーの 2 乗であり，この過程は異なる運動学的領域，$u \geq 4m^2$, $t \leq 0$, $s \leq 0$ で意味を持つことを示せ。(入射粒子 $\mathrm{\overline{D}}$ が $E, \boldsymbol{p}$ を持つとき，$-p_{\mathrm{D}}=(E, \boldsymbol{p})$ である点に注意。)

問題 4.8　s チャネル過程が $e^-\mu^- \to e^-\mu^-$ ならば，この反応に対する交叉チャネルの物理的領域の境界は，

$$t=0, \qquad su=(M^2-m^2)^2$$

で与えられることを示せ。ここで m と M は，それぞれ電子とミューオンの質量である。また Mandelstam 表示を作れ。

問題 4.9　交叉関係 (4.42) は次のように書けることを確かめよ：

$$\mathcal{M}_{e^-e^-}(s, t, u) = \mathcal{M}_{e^-e^-}(u, t, s). \tag{4.46}$$

問題 4.10　電子・陽電子散乱に対して，不変振幅 (4.41) は

$$\mathcal{M}_{e^-e^+}(s, t, u) = e^2\left(\frac{s-u}{t}+\frac{t-u}{s}\right) \tag{4.47}$$

と書けることを示せ。$s \leftrightarrow t$ の交換に対する $\mathcal{M}$ の対称性について述べよ。

スピンを持たない電子・電子散乱の振幅に話をもどそう。振幅 (4.40) は，も

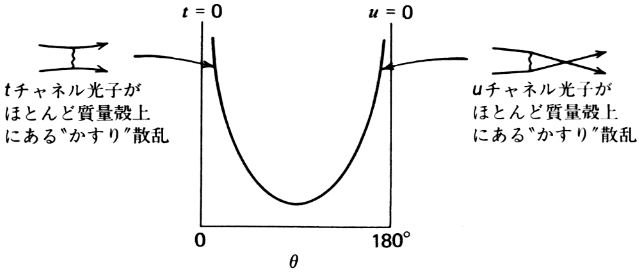


図 4·8 電子・電子散乱の微分断面積 $d\sigma/d\Omega$

ちろん反応過程 AB → CD，すなわち s チャネル過程につき導かれた。不変変数を用いて (4.40) は

$$\mathcal{M}_{e^-e^-} = e^2\{(u-s)/t+(t-s)/u\}$$

となる。この結果得られた反応断面積の概略を図 4·8 に示した。これから前・後方のピークがどのようにして生じたかがわかる。$-t$，$-u$ は図 4·4 (a), (c) で，4 元運動量移行 (実質的には 3 元運動量移行になる) の 2 乗，すなわち仮想光子が担う運動量の 2 乗である。光子が非常に小さな運動量 q^2 を持つならば，すなわちほとんど質量殻上にあれば，不確定性原理によって相互作用領域は非常に大きくなる。したがって，核子を少しだけ曲げる相互作用が，大きな断面積で現れる。

4.8 伝播関数の起源

4.2 節で，Feynman 図に現れる仮想光子線が，伝播関数 $1/q^2$ に相当することをみた。q は仮想光子が担う 4 元運動量である。たとえば，図 4·9 の消滅過程 $e^-e^+ \to e^-e^+$ では，光子伝播関数は $1/q^2$ である。q は 4 元運動量の保存から $q=p_A+p_B$ で与えられる。

一般に，スピンの複雑さを考えない場合，質量 m の粒子は，伝播関数 $1/(p^2$

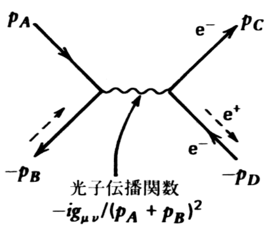


図 4·9 粒子 (電子) 線のみを用いて書いた消滅反応 $e^-e^+ \to \gamma \to e^-e^+$ の Feynman 図

$-m^2$) を持つ。Feynman(1962) は，なぜそうなるかを巧妙に説明した。たとえば，図 4·9 の光子伝播関数に対しては，2 つの相互作用バーテックスがあるから，結果は摂動展開の 2 次の項 (3.44)

$$T_{fi}^{(2)}=-i\sum_{n\neq i}V_{fn}\frac{1}{E_i-E_n}V_{ni}2\pi\delta(E_f-E_i) \tag{4.48}$$

の相対論的な一般化として解釈できるはずだ。ここでは，詳細は問題にしないで，むしろ伝播関数がどのように一般化されるかをみることにしよう (詳しい議論は Aitchison(1972) 参照)：

$$\frac{1}{E_i-E_n}\longrightarrow\frac{1}{(p_A+p_B)^2} \tag{4.49}$$

と置き換えてよいのだろうか。すなわち，エネルギー差を相対論的なエネルギーに関連させるのである。Feynman 図は，時間の順序がつけられた可能な図をすべて加えたものである。図 4·9 に相当して，2 つの時間順序のついた図が可能になる。それらを図 4·10 に示す。得られる振幅は次の形になる：

$$\mathcal{M}\sim V_{fn}\frac{1}{E_i-E_\gamma}V_{ni}+V_{fn}\frac{1}{E_i-2E_i-E_\gamma}V_{ni}=V_{fn}\frac{2E_\gamma}{E_i{}^2-E_\gamma{}^2}V_{ni}. \tag{4.50}$$

ここで，因子 $2E_\gamma$ は，規格化に関係している。このような振幅の計算法は，今ではしばしば，昔流の摂動論 (OFPT；old-fashioned perturbation theory) といわれる。OFPT では，第 3 章でも指摘したように，バーテックスにおいて運動量は保存しているが，エネルギーは保存しない (明らかに Lorentz 不変ではない)。そのうえ，粒子は質量殻上にある。伝播関数を決定するために

$$E_i{}^2=(p_A+p_B)^2+(\boldsymbol{p}_A+\boldsymbol{p}_B)^2,$$
$$E_\gamma{}^2=m_\gamma{}^2+\boldsymbol{p}^2$$

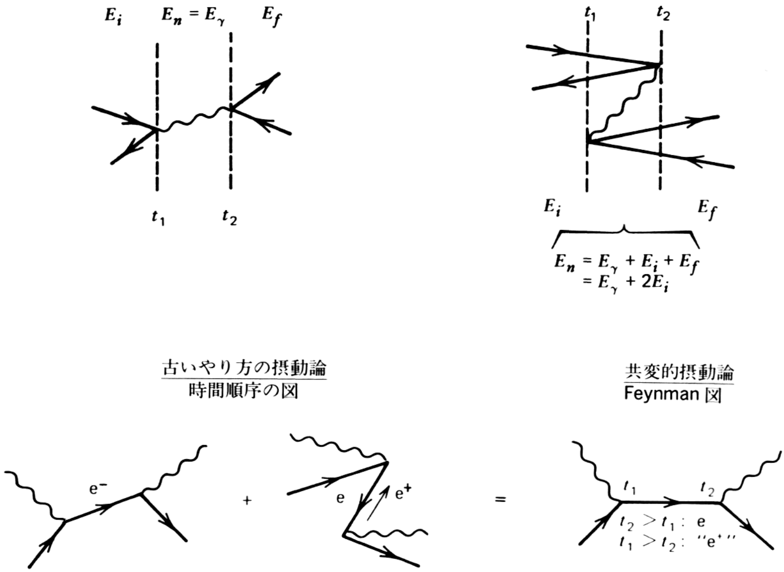
を計算する。$\boldsymbol{p}=\boldsymbol{p}_A+\boldsymbol{p}_B$ であるから，

$$\frac{1}{E_i{}^2-E_\gamma{}^2}=\frac{1}{(p_A+p_B)^2-m_\gamma{}^2}=\frac{1}{q^2} \tag{4.51}$$

を得る。ここでは，$m\neq0$ の伝播関数と比較できるように，(4.51) までは光子の質量項 ($m_\gamma=0$) を書いておいた。質量 m でスピンを持たない粒子の伝播関数を相対論的に一般化すると

$$\frac{1}{(p_A+p_B)^2-m^2}=\frac{1}{p^2-m^2} \tag{4.52}$$

となる ((4.51) 参照)。図 4·10 に示した 2 つの時間順序のついた Feynman 図は，それぞれでは不変にならない。しかし標準的な非相対論的結果に 2 番目の図を含めることによって，不変な表式を得たのである。



左辺のそれぞれの項は不変ではないが，和は不変になる。

各バーテックスで 3 元運動量は保存するが，エネルギーは保存しない。中間に飛ぶ粒子は質量殻上にある。すなわち $p^2 = m^2$.

各バーテックスで 4 元運動量は保存する ((4.15) 参照)。中間に飛ぶ粒子は質量殻上にない。すなわち $p^2 \neq m^2$.

図 4·10　$e^-e^+ \to \gamma \to e^-e^+$ の時間順序を示す Feynman 図

もう 1 つの例として，過程 $\gamma e^- \to \gamma e^-$ における電子の伝播関数を考えよう。ここでは，OFPT と共変的摂動論を図の上で比較する。1 つの Feynman 図には，中間状態が電子 ($t_2 > t_1$) または陽電子 ($t_1 > t_2$) となる可能性が含まれている。どうしてこの "魔法" が生じたのかは，6.16 節で説明することにしよう。そこではまた，$p^2 = m^2$ において伝播関数に現れる特異性をどう処理するかを議論する。

4.9 まとめ

ここでは，非相対論的摂動論をどのようにして共変形式で扱うかを示した。重要な段階は，T_{fi} についての表式 (3.37) がすでに共変的であるという事実を

利用したことだ。不変振幅 $\mathcal{M}$ は ((4.22) によって T_{fi} に関係しており)，バーテックス因子 V_{ni} と伝播関数 $1/(E_i-E_n)$ を共変形に置き換えて計算される。スピンを持たない荷電粒子の電磁相互作用に対して，その具体的な表式を求めた。また非相対論的な表式との重要な差異を忘れてはならない。それぞれのバーテックスでは，3元運動量とともにエネルギーも保存している。最後に，不変振幅を観測可能量に関係させる手順を議論した。

これで相対論的摂動論と Feynman 図の議論は終わりである。あとは技術的なことだけだ。電子，ミューオン，クォークは，スピン 1/2 を持つから，それらは Klein-Gordon 方程式ではなく Dirac 方程式を満たす。Dirac 方程式を満たす粒子に対して，本章で述べた手法をくり返すと，バーテックス因子と伝播関数は明らかに違ってくる。しかし，計算の手順は同じなのである。

5

Dirac 方程式

もしクォークとレプトンがスピン 1/2 粒子ではないとすれば，すでにわれわれは，以下の章に現れる素粒子物理学の問題を攻略するための計算技術を習得してしまったことになるだろう。つまり，Klein-Gordon 方程式を満たす波動関数 ϕ が記述する粒子 (反粒子) の Feynman 則を，すでに作りあげているのだ。これらの波動関数は，たとえば電子と陽電子のスピンを取り入れるのに必要な 2 成分構造になっていない。われわれは粒子と反粒子の両方に対して， 2 成分構造を持つような相対論的方程式を探している。Dirac の発見以前には Klein-Gordon 方程式こそ，Schrödinger 方程式の相対論的一般化の唯一のものと思われていた。Dirac の目標は，Klein-Gordon 方程式とは違って，$\partial/\partial t$ につき線形の方程式を書くことにあった。それはまた，共変的であるためには，∇ についても線形でなければならない。すなわち，一般的な形は

$$H\psi=(\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{P}+\beta m)\psi \tag{5.1}$$

のように表すことができる。ここで 4 つの係数 β と α_i $(i=1,2,3)$ は，自由粒子が相対論的なエネルギーと運動量の関係 (3.10)

$$H^2\psi=(\boldsymbol{P}^2+m^2)\psi \tag{5.2}$$

を満たすべしという要請から決められる。(5.1)，(5.2) が Dirac 方程式を表す。この方程式の解は，スピン 1/2 の粒子と反粒子を記述するのに十分豊富な内容を持っていることを示そう。

Dirac の提案の歴史的衝撃は，きわめて意義深いものであった。それは，われわれの関心の対象であるフェルミオンを記述する相対論的方程式を提供するばかりではなく，場の量子論から半導体およびさらに広い分野にわたる発展をうながした。Klein-Gordon 方程式を $\partial/\partial t$ につき線形化するという Dirac のはじめの動機は，スピンを説明するのではなく，負の確率密度を除くことにあった

点を注意しておこう。確率 (3.17) の中に $\partial/\partial t$ が現れたことが，まさしくこの "問題" の根本にあった。だが，Klein-Gordon 方程式のこのような性質は，もはや障害ではない。なぜならそれは，スピンのない粒子を扱うかぎり，反粒子を正しく処理できるという利点になったからだ！

歴史のことはさておき，(5.1) がスピンを持つレプトン (クォーク) をどのように記述するかを学ぶことにしよう。(5.1) から

$$\begin{aligned} H^2\psi &= (\alpha_i P_i+\beta m)(\alpha_j P_j+\beta m)\psi \\ &= \{\underset{\substack{\downarrow\\1}}{\alpha_i{}^2}P_i{}^2+\underbrace{(\alpha_i\alpha_j+\alpha_j\alpha_i)}_{0}P_iP_j+\underbrace{(\alpha_i\beta+\beta\alpha_i)}_{0}P_i m+\underset{\substack{\downarrow\\1}}{\beta^2}m^2\}\psi \end{aligned}$$

を得る。ここで，くり返し現れる添字 i, j については和をとる。第 2 項では，$i>j$ という条件をつける。これを (5.2) と比べると，次のことがわかる。

- $\alpha_2, \alpha_2, \alpha_3, \beta$ はすべて反交換，
- $\alpha_1{}^2=\alpha_2{}^2=\alpha_3{}^2=\beta^2=1.$ (5.3)

α_i と β は交換しないので，単なる数ではなくて，波動関数 ψ に作用する行列と考えなければならない。ψ は多成分列ベクトルである。

問題 5.1 α_i, β は，偶数次元の Hermite 行列でトレースが 0，その固有値は ± 1 となることを示せ。

これらの条件をすべて満たす最低次元の行列は 4 行 4 列である。 4 つの行列 (α, β) の選択は一義的ではない。Dirac-Pauli 表現はもっともよく用いられる：

$$\boldsymbol{\alpha}=\begin{pmatrix} 0 & \boldsymbol{\sigma} \\ \boldsymbol{\sigma} & 0 \end{pmatrix}, \quad \beta=\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}. \tag{5.4}$$

ここで，I は 2 行 2 列の単位行列 (しばしば I と書く)，σ は Pauli 行列である：

$$\sigma_1=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2=\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{5.5}$$

別の表現として Weyl 表現がある：

$$\boldsymbol{\alpha}=\begin{pmatrix} -\boldsymbol{\sigma} & 0 \\ 0 & \boldsymbol{\sigma} \end{pmatrix}, \quad \beta=\begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix}. \tag{5.6}$$

ほとんどの結論は，表現によらない。たしかに，すべての物理的な内容は，(5.3) に示した α, β の性質だけに依存する。事実，5.3 節で Dirac 方程式の解を具体的に書くとき，はじめて特定の表現を用いる。以下では，とくに断わらないかぎり，常に Dirac-Pauli 表現 (5.4) を選ぶことにする。

Dirac 方程式 (5.1) を満たす 4 成分列ベクトル ψ は，Dirac スピノールと呼ばれる。2 つの独立な解 (粒子と反粒子) を予想したくなるだろうが，そうではなく解は 4 つあるのだ！

もっと驚くことがある。われわれは方程式を線形化するとき，成分が増えた場が現れるという別の例を，少くとも 1 つは知っている。共変的な Maxwell 方程式 $\square^2 A_\mu=0$ は 2 次であるが，場の強さ $F_{\mu\nu}$ を導入して，線形な $\partial_\mu F^{\mu\nu}=0$ という形に書くことができる。$F_{\mu\nu}$ は，A_μ より多くの成分を持っている。

5.1 Dirac 方程式の共変形：Dirac の γ 行列

Dirac 方程式 (5.1) に左から β をかけると

$$i\beta\frac{\partial\psi}{\partial t}=-i\beta\boldsymbol{\alpha}\cdot\nabla\psi+m\psi$$

を得る。これはさらに

$$\boxed{(i\gamma^\mu\partial_\mu-m)\psi=0} \tag{5.7}$$

と書くことができる。ここで，4 つの Dirac の γ 行列

$$\gamma^\mu\equiv(\beta,\ \beta\boldsymbol{\alpha}) \tag{5.8}$$

を導入した。(5.7) は，Dirac 方程式の共変型と呼ばれる。4 つの 4 行 4 列の行列 $\gamma^0, \gamma^1, \gamma^2, \gamma^3$ が 4 元ベクトルとみなせることは 5.2 節で説明しよう。Dirac 方程式はまさしく 4 つの微分方程式であり，それは個々の列ベクトル ψ の 4 成分の連立方程式になっている：

$$\sum_{k=1}^{4}\left[\sum_\mu i(\gamma^\mu)_{jk}\partial_\mu-m\delta_{jk}\right]\psi_k=0.$$

(5.3) と (5.8) を用いると，Dirac の γ 行列が反交換関係

$$\gamma^\mu\gamma^\nu+\gamma^\nu\gamma^\mu=2g^{\mu\nu} \tag{5.9}$$

を満たすことが簡単に示される。さらに $\gamma^0=\beta$ であるから，

$$\gamma^{0\dagger}=\gamma^0, \qquad (\gamma^0)^2=I \tag{5.10}$$

および

$$\left.\begin{aligned}\gamma^{k\dagger}&=(\beta\alpha^k)^\dagger=\alpha^k\beta=-\gamma^k\\(\gamma^k)^2&=\beta\alpha^k\beta\alpha^k=-I\end{aligned}\right\}\qquad k=1,2,3 \tag{5.11}$$

を得る。 Hermite 共役の結果は

$$\gamma^{\mu\dagger}=\gamma^0\gamma^\mu\gamma^0$$

のように書くことができる。

5.2 保存カレントと随伴方程式

カレントを作るために，Klein-Gordon 方程式の場合と同じ手続きをとる((3.17) 参照)。ただし，行列方程式を扱うので，複素共役というよりむしろ，Hermite共役方程式を考えなければならない。Dirac 方程式

$$i\gamma_0\frac{\partial\psi}{\partial t}+i\gamma^k\frac{\partial\psi}{\partial x^k}-m\psi=0 \qquad (k=1,2,3) \tag{5.12}$$

の Hermite 共役は

$$-i\frac{\partial\psi^\dagger}{\partial t}\gamma^0-i\frac{\partial\psi^\dagger}{\partial x^k}(-\gamma^k)-m\psi^\dagger=0 \tag{5.13}$$

となる。ここで $k=1,2,3$ である。共変型を保つため，第 1 項を変えないで $-\gamma^k$ の負号を除く必要がある。それには $\gamma^0\gamma^k=-\gamma^k\gamma^0$ であるから，(5.13) に右から γ^0 をかければよい。随伴スピノール (行ベクトル)

$$\overline{\psi}\equiv\psi^\dagger\gamma^0 \tag{5.14}$$

を導入すると，共変形

$$\boxed{i\partial_\mu\overline{\psi}\gamma^\mu+m\overline{\psi}=0} \tag{5.15}$$

を得る。(5.7) に左から $\overline{\psi}$ をかけ，(5.15) に右から ψ をかけて加えると連続の方程式 $\partial_\mu j^\mu=0$ を導くことができる。すなわち

$$\overline{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi+(\partial_\mu\overline{\psi})\gamma^\mu\psi=\partial_\mu(\overline{\psi}\gamma^\mu\psi)=0.$$

これから

$$j^\mu=\overline{\psi}\gamma^\mu\psi$$

は連続の方程式を満たすことがわかる。それは j^μ を確率密度 ρ およびフラックス密度 $\boldsymbol{j}$ と同定すべきことを示している。確率密度

$$\rho\equiv j^0=\overline{\psi}\gamma^0\psi=\psi^\dagger\psi=\sum_{i=1}^{4}|\psi_i|^2 \tag{5.16}$$

は正値確定である。前に注意したように，このことが歴史的には Dirac の研究を動機づけたのだ。

一方，第 3 章で述べた Pauli-Weisskopf の処方によれば，$j^\mu=(\rho,\boldsymbol{j})$ は電荷-電流密度と同定されるべきであることがわかる。したがって j^μ に電荷 $-e$ を挿入する。

$$\boxed{j^\mu=-e\overline{\psi}\gamma^\mu\psi.} \tag{5.17}$$

以後，j_μ を電子の 4 元電流密度とみなす。$-e$ とした理由は，(陽電子ではなく)

電子を粒子とみなしたためであることを忘れないでほしい。連続の方程式 $\partial_\mu j^\mu=0$ の共変性から，j^μ は 4 元ベクトルとして変換する必要がある。実際，このことは証明できる。すなわち，4 つの Dirac 行列 γ^μ を用いて，4 元ベクトル $\bar{\psi}\gamma^\mu\psi$ を作ることができるのである(5.6 節参照)。

5.3　自由電子のスピノール

問題 5.2　(5.7) に $\gamma^\nu\partial_\nu$ を施し，ψ_i の 4 成分のそれぞれが，Klein-Gordon 方程式

$$(\Box^2+m^2)\psi_i=0$$

を満たすことを示せ。

自由粒子に対して，次の形を持つ Dirac 方程式の 4 元運動量の固有関数をみつけることができる。すなわち：

$$\psi=u(\boldsymbol{p})e^{-ip\cdot x}. \tag{5.18}$$

ここで，$u(\boldsymbol{p})$ は x に依存しない 4 成分 スピノールである。これを (5.7) に代入して，

$$(\gamma^\mu p_\mu-m)u(\boldsymbol{p})=0 \tag{5.19}$$

を得る。あるいは，任意の 4 元ベクトル A_μ に対して，$\not{A}\equiv\gamma^\mu A_\mu$ という記法を用いると

$$\boxed{(\not{p}-m)u=0} \tag{5.20}$$

と書くことができる。

われわれはエネルギーの固有ベクトルを探しているので，もとの形 (5.1) を用いるのが便利であろう：

$$Hu=(\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{p}+\beta m)u=Eu. \tag{5.21}$$

この式は，4 つの独立な解を持つ。2 つは $E>0$，残りの 2 つは $E<0$ である。このことは，$\boldsymbol{\alpha},\beta$ の Dirac-Pauli 表示を用いればきわめて容易にわかる。まず静止した粒子 $\boldsymbol{p}=0$ を考える。(5.4) を用いて，

$$Hu=\beta mu=\begin{pmatrix} mI & 0 \\ 0 & -mI \end{pmatrix}u$$

を得る。ここで，$E=m,m,-m,-m$ である。固有ベクトルは

$$\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix} \tag{5.22}$$

となる。上にも述べたように，電荷 $-e$ の電子を粒子とみなす。はじめの 2 つの解は $E>0$ の電子を記述する。$E<0$ の粒子の解は，前にふれたように $E>0$ の反粒子 (陽電子) を記述すると解釈できる (3.6 節参照)。

$\boldsymbol{p}\neq 0$ の場合，(5.4) を用いて，(5.21) は

$$Hu=\begin{pmatrix} m & \boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p} \\ \boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p} & -m\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u_{\mathrm{A}}\\u_{\mathrm{B}}\end{pmatrix}=E\begin{pmatrix}u_{\mathrm{A}}\\u_{\mathrm{B}}\end{pmatrix} \tag{5.23}$$

となる。ここで，u を 2 成分スピノール $u_{\mathrm{A}}, u_{\mathrm{B}}$ に分解した。これは (5.23) から

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p}\,u_{\mathrm{B}}&=(E-m)\,u_{\mathrm{A}},\\ \boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p}\,u_{\mathrm{A}}&=(E+m)\,u_{\mathrm{B}}\end{aligned} \tag{5.24}$$

になる。$E>0$ の 2 つの解の上の成分を $u_{\mathrm{A}}{}^{(s)}=\chi^{(s)}$ としよう。ここで

$$\chi^{(1)}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\qquad \chi^{(2)}=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \tag{5.25}$$

である。対応する u の下の成分は，(5.24) の第 2 式を用いて表せる：

$$u_{\mathrm{B}}{}^{(s)}=\frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p}}{E+m}\chi^{(s)}, \tag{5.26}$$

つまり，Dirac 方程式の正エネルギー解は

$$u^{(s)}=N\begin{pmatrix}\chi^{(s)}\\ \dfrac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p}}{E+m}\chi^{(s)}\end{pmatrix}\qquad E>0 \tag{5.27}$$

となる。ここで $s=1,2$ であり，N は規格化定数である。$E<0$ の解については，$u_{\mathrm{B}}{}^{(s)}=\chi^{(s)}$ とおき，(5.24) から

$$u_{\mathrm{A}}{}^{(s)}=\frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p}}{E-m}u_{\mathrm{B}}{}^{(s)}=-\frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p}}{|E|+m}\chi^{(s)}. \tag{5.28}$$

したがって，

$$u^{(s+2)}=N\begin{pmatrix}\dfrac{-\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p}}{|E|+m}\chi^{(s)}\\ \chi^{(s)}\end{pmatrix}\qquad E<0 \tag{5.29}$$

を得る。ある運動量 $\boldsymbol{p}$ の電子に対して，4 つの解が得られた。$u^{(1,2)}$ は正エネルギーに，$u^{(3,4)}$ は負エネルギーに対応する。4 つの解が直交していることは容易に確かめることができる：

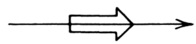
$$u^{(r)\dagger}u^{(s)}=0.\qquad (r\neq s\ :\ r, s=1,2,3,4)$$

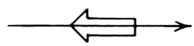
Dirac 方程式，たとえば (5.23) のもう 1 つの利点は，それが余分に二重の縮退を持つことである。このことは，H および $\boldsymbol{p}$ と交換する別の観測可能量が存在しなければならないことを意味する。その固有値によって状態を区別することができる。調べてみると，演算子

$$\Sigma\cdot\hat{\boldsymbol{p}}\equiv\begin{pmatrix}\boldsymbol{\sigma}\cdot\hat{\boldsymbol{p}} & 0 \\ 0 & \boldsymbol{\sigma}\cdot\hat{\boldsymbol{p}}\end{pmatrix} \tag{5.30}$$

は，H および $\boldsymbol{p}$ と交換することがわかる。$\hat{\boldsymbol{p}}$ は運動量 $\boldsymbol{p}$ の向きの単位ベクトル $\boldsymbol{p}/|\boldsymbol{p}|$ である。"スピン" の運動方向の成分 $\boldsymbol{\sigma}\cdot\hat{\boldsymbol{p}}/2$ は "よい" 量子数であり，解を分類するのに用いることができる。この量子数を，状態のヘリシティーと呼ぶ。ヘリシティー演算子 $\boldsymbol{\sigma}\cdot\hat{\boldsymbol{p}}/2$ の可能な固有値 λ は，

$$\lambda=\begin{cases}+\dfrac{1}{2} & \text{正のヘリシティー} \\ -\dfrac{1}{2} & \text{負のヘリシティー}\end{cases}$$





である。$\boldsymbol{\sigma}$ の他の成分に対する固有値は，よい量子数にならないことがわかる。

スピノール $\chi^{(s)}$ を (5.25) のようにとると，$\boldsymbol{p}$ は z 軸に沿って選ぶのが適当である。そこで，

$$\frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma}\cdot\hat{\boldsymbol{p}}\cdot\chi^{(s)}=\frac{1}{2}\sigma_3\chi^{(s)}=\lambda\chi^{(s)}$$

が成り立つ。ここで $s=1,2$ に対応して，$\lambda=\pm 1/2$ である。

問題 5.3 運動量 $(p\sin\theta,\ 0,\ p\cos\theta)$ の電子につき，$\lambda=+1/2$ を持つヘリシティー固有スピノールを計算せよ。

問題 5.4 Dirac 方程式が，"内部" 角運動量 (≡スピン) 1/2 の粒子を記述することを確かめよ。

[ヒント] 明らかに角運動量が問題である。したがって，軌道角運動量 $\boldsymbol{L}=\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{P}$ とハミルトニアンの交換関係を調べる必要がある。$[x_i, P_j]=i\delta_{ij}$ を用いて

$$[H,\boldsymbol{L}]=-i(\boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{P})$$

を示せ。$\boldsymbol{L}$ は保存しない！ さらに別の角運動量が必要である。

$$[H,\ \Sigma]=2i(\boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{P}),\qquad \Sigma\equiv\begin{pmatrix}\boldsymbol{\sigma} & 0 \\ 0 & \boldsymbol{\sigma}\end{pmatrix}$$

を示せ。明らかに L も Σ も保存しない。それらの組み合わせ

$$\boldsymbol{J}=\boldsymbol{L}+\frac{1}{2}\Sigma$$

は全角運動量にほかならない。$\boldsymbol{J}$ が保存するのである。すなわち

$$[H,\ \boldsymbol{J}]=0.$$

$\Sigma/2$ の固有値は $\pm 1/2$ である。

問題 5.5 速度 v の非相対論的な電子に対して，(5.24) を用いて，u_A は u_B より v/c のオーダーだけ大きいことを示せ。非相対論的な問題では，ϕ_A, ϕ_B は電子波動関数 ψ の "大" 成分，"小" 成分に相当する。

非相対論の極限では，電磁場 $A^\mu = (A^0, \boldsymbol{A})$ 内の電子 (電荷，$-e$) に対する Dirac 方程式は，Schrödinger-Pauli 方程式

$$\left(\frac{1}{2m}(\boldsymbol{P}+e\boldsymbol{A})^2+\frac{e}{2m}\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{B}-eA^0\right)\phi_A = E_{NR}\phi_A \tag{5.31}$$

に帰着することを示せ。ここで磁場は $\boldsymbol{B} = \nabla\times\boldsymbol{A}$，$E_{NR} = E - m$ である。また $|eA^0| \ll m$ と仮定する。

ヒント (5.24) を ϕ_A, ϕ_B で書き，$P^\mu \to P^\mu + eA^\mu$ の置き換えをする。ϕ_B を消去し，

$$\boldsymbol{P}\times\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{P} = -i\nabla\times\boldsymbol{A} \qquad (\boldsymbol{P} = -i\nabla)$$

を用いよ。

電磁場内の電子に対して，Dirac 方程式の非相対論的な形 (5.31) から，電子は内部 (スピン) 磁気モーメント

$$\boldsymbol{\mu} = -\frac{e}{2m}\boldsymbol{\sigma} \equiv -g\frac{e}{2m}\boldsymbol{S} \tag{5.32}$$

を持つことがわかる。回転磁気比 g は 2，またスピン角運動量演算子 $\boldsymbol{S}$ は $\boldsymbol{\sigma}/2$ である。ここで電子の Dirac モーメント $-e/2m$ についてふれておこう。実験値は $g = 2.00232$ である。予測値 $g = 2$ は，Dirac 方程式の成功を物語っている。2 からのわずかなずれについては第 7 章で議論する。

5.4 反 粒 子

Dirac 方程式のはじめの 2 つの解

$$u^{(1,2)}(\boldsymbol{p})e^{-ip\cdot x}$$

は明らかにエネルギー E，運動量 $\boldsymbol{p}$ の自由電子を表す。2 つの負エネルギーの解 $u^{(3,4)}$ は，反粒子，すなわち陽電子に相当している。3.6 節で述べた反粒子の処方を用いて，エネルギー E，運動量 $\boldsymbol{p}$ の陽電子は，$(-E, -\boldsymbol{p})$ の電子の解，すなわち

$$u^{(3,4)}(-\boldsymbol{p})e^{-i(-p)\cdot x} \equiv v^{(2,1)}(\boldsymbol{p})e^{ip\cdot x} \tag{5.33}$$

で記述される。ここに $p^0 \equiv E > 0$ である。記法の便宜上，"陽電子" スピノール v を導入した。$u(\boldsymbol{p})$ に対する Dirac 方程式は

$$(\not{p}-m)u(\boldsymbol{p}) = 0$$

であった ((5.20) 参照)。では，$v(\boldsymbol{p})$ はどんな方程式を満たすのだろうか。エネルギー $-E$，運動量 $-\boldsymbol{p}$ の電子に対しては，

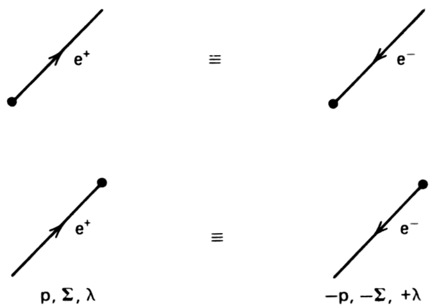
$$(-\not{p}-m)u(-\boldsymbol{p})=0$$

となるから，

$$\boxed{(\not{p}+m)v(\boldsymbol{p})=0} \tag{5.34}$$

を得る。ここで $p_0 \equiv E>0$ であることを強調しておく。

前と同じように，これからも Feynman 図を粒子 (電子) 状態のみで書くことにしよう。たとえば，エネルギー E で入射する陽電子は，エネルギー $-E$ の出ていく電子として書く ((5.35) 参照)。粒子-反粒子の対応において，唯一の新しい状況は粒子のスピンを導いた点である。(5.33) において，スピノール添字 1, 2 は，負エネルギー状態 4, 3 と同定できることに注意してほしい。このように順序が逆転することは，次の点に注目すれば予想できる。静止系において，ある軸に沿った上向きスピンの粒子がなくなることは，その軸に沿ったスピン下向き粒子が現れることと同等である。詳しい関係は問題 5.6 で扱う。スピンと運動量を両方同時に反転するので，ヘリシティー $\boldsymbol{\sigma}\cdot\hat{\boldsymbol{p}}/2$ は変わらない。この結果を，次のようにまとめておこう。



(5.35)

電磁場内の電子 (電荷 $-e$) に対する Dirac 方程式は

$$[\gamma^\mu(i\partial_\mu+eA_\mu)-m]\psi=0 \tag{5.36}$$

である ((4.2) 参照)。陽電子 ($+e$) に対して，対応する Dirac 方程式は

$$[\gamma^\mu(i\partial_\mu-eA_\mu)-m]\psi_C=0 \tag{5.37}$$

となるはずである。ψ_C と ψ の間には 1 対 1 の対応がなければならない。ψ_c と ψ の関係をみるために，まず (5.36) の複素共役をとる：

$$[-\gamma^{\mu*}(i\partial_\mu-eA_\mu)-m]\psi^*=0. \tag{5.38}$$

したがって，

$$-(C\gamma^0)\gamma^{\mu*}=\gamma^\mu(C\gamma^0)$$

を満たすような行列 $(C\gamma^0)$ をみつけることができれば，(5.38) を (5.37) の形に

書くことができる。すなわち

$$[\gamma^\mu(i\partial_\mu - eA_\mu) - m](c\gamma^0\psi^*) = 0$$

である。したがって，

$$\psi_C = C\gamma^0\psi^* = C\bar{\psi}^T$$

が成り立つ。添字 T は行列の転置を表す。

問題 5.6　γ 行列の表現 (5.4), (5.8) において，可能な C として

$$C\gamma^0 = i\gamma^2 = \begin{pmatrix} & & & 1 \\ & & -1 & \\ & -1 & & \\ 1 & & & \end{pmatrix}$$

が選べることを示せ。これを特定のスピノールに演算してみよ。たとえば，次式を示せ：

$$\psi_C{}^{(1)} = i\gamma^2[u^{(1)}(\boldsymbol{p})e^{-ip\cdot x}]^* = u^{(4)}(-\boldsymbol{p})e^{ip\cdot x} = v^{(1)}(\boldsymbol{p})e^{ip\cdot x}.$$

さらに，この表示において，

$$\begin{aligned} C^{-1}\gamma^\mu C &= (-\gamma^\mu)^T \\ C &= -C^{-1} = -C^\dagger = -C^T \\ \bar{\psi}_C &= -\psi^T C^{-1} \end{aligned} \tag{5.39}$$

を示せ。

電子が作る電流は

$$j^\mu = -e\bar{\psi}\gamma^\mu\psi$$

となることをみてきた。したがって，ψ の荷電共役場 ψ_C に対する電流は次のようになる ((5.39) 参照)：

$$\begin{aligned} j_C{}^\mu &= -e\bar{\psi}_C\gamma^\mu\psi_C \\ &= +e\psi^T C^{-1}\gamma^\mu C\bar{\psi}^T \\ &= -e\psi^T(\gamma^\mu)^T\bar{\psi}^T \\ &= -(-)e\bar{\psi}\gamma^\mu\psi. \end{aligned} \tag{5.40}$$

最後の式に現れた余分の負号には，重要な意味が含まれている。それは明らかに，もし $j_C{}^\mu$ が陽電子電流ならば，物理的に意味のある結果を導くのに必要である。負号は，スピンと統計の関係から生じたものである。それは場の理論では，フェルミオン場の反対称性に由来しており，演算子 C は正エネルギー電子を正エネルギー陽電子に変える。理論形式は完全に $e^+ \leftrightarrow e^-$ に対して対称である。だが，1粒子 (電子) 理論では，陽電子状態は許されない。むしろ，C は正エネルギー電子状態を負エネルギー電子状態に変えるのである。その結果，Feynman 則に次のような要請を加えなければならないことがわかる。つまり，

終状態に現れるすべての負エネルギー電子に対して，さらに余分の負号をつけるのである。電磁相互作用が C 変換で不変となることから，

$$j_\mu{}^C(A^\mu)^C=(-j_\mu)(-A^\mu)=j_\mu A^\mu$$

が導かれる。

5.5　スピノールの規格化と完全性関係

ボソンと同じように，フェルミオンについても $2E$ 粒子／単位体積という共変的規格化を選ぶ。すなわち，

$$\int_{\text{単位体積}}\rho dV=\int\psi^\dagger\psi dV=u^\dagger u=2E.$$

ここで，(5.16)，(5.18) を用いた。こうして直交関係

$$u^{(r)\dagger}u^{(s)}=2E\delta_{rs},\qquad v^{(r)\dagger}v^{(s)}=2E\delta_{rs}\qquad(r,s=1,2)\tag{5.41}$$

を得る。(5.27) を用いて，

$$u^{(s)\dagger}u^{(s)}=|N|^2\left[1+\left(\frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p}}{E+m}\right)^2\right]=|N|^2\frac{2E}{E+m}$$

が計算できる。規格化定数は

$$N=\sqrt{E+m}\tag{5.42}$$

とすればよい。$v^{(s)}$ についても同様である。

$\bar{u}\equiv u^\dagger\gamma^0$ に対する Dirac 方程式を導くには，(5.19) の Hermite 共役が必要である。

$$u^\dagger\gamma^{\mu\dagger}p_\mu-mu^\dagger=0.$$

上式に右から γ^0 をかけ，(5.9)－(5.11) から得られる関係

$$\gamma^{\mu\dagger}\gamma^0=\gamma^0\gamma^\mu\tag{5.43}$$

に注意して，

$$\bar{u}(\not{p}-m)=0\tag{5.44}$$

を得る。同様に，(5.34) から

$$\bar{v}(\not{p}+m)=0\tag{5.45}$$

が導かれる。

問題 5.7　(5.41) を用いて

$$\bar{u}^{(s)}u^{(s)}=2m,\qquad\bar{v}^{(s)}v^{(s)}=-2m\tag{5.46}$$

を示せ。

問題 5.8　$(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p})^2=|\boldsymbol{p}|^2$ を示せ。

問題 5.9 次の完全性関係を導け：

$$\boxed{\begin{aligned}\sum_{s=1,2} u^{(s)}(p)\,\bar{u}^{(s)}(p) &= \not{p}+m,\\ \sum_{s=1,2} v^{(s)}(p)\,\bar{v}^{(s)}(p) &= \not{p}-m.\end{aligned}} \tag{5.47}$$

ここに示した 4 行 4 列の行列の関係式は，Feynman 図を評価するときによく用いられる(第 6 章参照)。

問題 5.10 $\not{p}\not{p}=p^2$ を示せ。

問題 5.11

$$\Lambda_+=\frac{\not{p}+m}{2m}, \qquad \Lambda_-=\frac{-\not{p}+m}{2m} \tag{5.48}$$

は，それぞれ，正と負のエネルギー状態を取り出す射影演算子であることを示せ。射影演算子は

$$\Lambda_\pm{}^2=\Lambda_\pm \quad および \quad \Lambda_++\Lambda_-=1$$

を満たさなければならない。

5.6 双 1 次共変形

Lorentz 共変性と矛盾しないよう，電流のもっとも一般的な形を決めるために，

$$(\bar{\psi})(4\times4)(\psi)$$

の形式で表せる双 1 次量をまとめておこう。これは Lorentz 変換に対して，ある決まった変換性を持つ。ここで 4 行 4 列の行列は，γ 行列の積を示す。記法を簡単にするため

$$\gamma^5\equiv i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 \tag{5.49}$$

を導入する。γ^5 は次の関係式を満たす：

$$\gamma^{5\dagger}=\gamma^5, \qquad (\gamma^5)^2=I, \qquad \gamma^5\gamma^\mu+\gamma^\mu\gamma^5=0. \tag{5.50}$$

Dirac-Pauli 表示では，(5.4) は

$$\gamma^0=\begin{pmatrix} I & 0\\ 0 & -I\end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\gamma}=\begin{pmatrix} 0 & \boldsymbol{\sigma}\\ -\boldsymbol{\sigma} & 0\end{pmatrix}, \quad \gamma^5=\begin{pmatrix} 0 & I\\ I & 0\end{pmatrix}. \tag{5.51}$$

われわれに興味があるのは，本義 Lorentz 変換 (回転，ブースト) と空間反転 (パリティ演算) に対する双 1 次量の振舞いである。可能な表式をもれなく書くと，次のようになる：

		成分の数	空間反転 P に対する変換性
スカラー	$\bar{\psi}\psi$	1	+
ベクトル	$\bar{\psi}\gamma^\mu\psi$	4	空間成分：−
テンソル	$\bar{\psi}\sigma^{\mu\nu}\psi$	6	(5.52)

軸性ベクトル	$\bar{\psi}\gamma^5\gamma^\mu\psi$	4	空間成分：＋
擬スカラー	$\bar{\psi}\gamma^5\psi$	1	−

反交換関係 (5.9) によって，テンソルは反対称になる：

$$\sigma^{\mu\nu}=\frac{i}{2}(\gamma^\mu\gamma^\nu-\gamma^\nu\gamma^\mu). \tag{5.53}$$

上の表は，$\bar{\psi}$ と ψ ではさまれている γ^μ 行列の数の順に，上から下へ並べてある。擬スカラーは (5.49) のように，4つの行列の積である。かりに5つの行列が並べば，少なくともその中の2つは同じであるから，3つの行列の積に帰着し，それはすでに軸性ベクトルの中に含まれていることになる。

上記の性質がどのようにして確立したかをみることは有益だろう。そのために，Lorentz 変換 Λ で関係する2つの系 (x と x') でDirac 方程式を考察する必要がある。(5.7) から

$$i\gamma^\mu\frac{\partial\psi(x)}{\partial x^\mu}-m\psi(x)=0, \tag{5.54}$$

$$i\gamma^\mu\frac{\partial\psi'(x')}{\partial x'^\mu}-m\psi'(x')=0 \tag{5.55}$$

を得る。ここで $x'=\Lambda x$ である。また関係式

$$\psi'(x')=S\psi(x) \tag{5.56}$$

が存在しなければならない。(5.18) を考えると，S は x に依存しないでスピノール u のみに作用することは明らかである。(5.56) を (5.55) に代入し，(5.54) との整合性を要請すれば，

$$S^{-1}\gamma^\mu S=\Lambda_\nu{}^\mu\gamma^\nu \tag{5.57}$$

を得る。ここで $\partial/\partial x^\mu=\Lambda_\mu{}^\nu\partial/\partial x'^\nu$ を用いた。

問題 5.12 本義無限小 Lorentz 変換

$$\Lambda_\mu{}^\nu=\delta_\mu{}^\nu+\varepsilon_\mu{}^\nu \tag{5.58}$$

に対して，(5.57) を満たす S は

$$S_L=1-\frac{i}{4}\sigma_{\mu\nu}\varepsilon^{\mu\nu} \tag{5.59}$$

となることを示せ。次に

$$S_L{}^{-1}=\gamma^0 S_L{}^\dagger\gamma^0 \tag{5.60}$$

$$\gamma^5 S_L=S_L\gamma^5 \tag{5.61}$$

を示せ。

空間反転，すなわちパリティ演算に対しては

$$\Lambda_\mu{}^\nu = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}$$

である。すると (5.57) は

$$S_P{}^{-1}\gamma^0 S_P = \gamma^0,$$
$$S_P{}^{-1}\gamma^k S_P = -\gamma^k \qquad (k=1,2,3)$$

となり，これらの関係式は

$$S_P = \gamma^0 \tag{5.62}$$

とおくことによって満たされる。γ^0 の Dirac-Pauli 表示 (5.51) では，ψ の 4 つの成分の空間反転に対する振舞いは

$$\psi_{1,2}{}' = \psi_{1,2}, \qquad \psi_{3,4}{}' = -\psi_{3,4} \tag{5.63}$$

である。したがって "静止" 状態 (5.22) はパリティの固有状態であり，正負エネルギー状態 (つまり電子と陽電子) がそれぞれ逆の内部パリティを持つ。

S_L と S_P を用いて，双 1 次共変量に要請される性質を調べる。まず，

$$\begin{aligned} \bar{\psi}' &= \psi'^\dagger\gamma^0 = \psi^\dagger S^\dagger \gamma^0 = \psi^\dagger\gamma^0 S^{-1} \\ &= \bar{\psi} S^{-1} \end{aligned} \tag{5.64}$$

に注目する。ここで (5.56)，(5.60) を用いた。一例として，$\bar{\psi}\gamma^\mu\psi$ の性質を確定しよう。Lorentz 変換に対しては (5.64)，(5.57) を用いて，

$$\bar{\psi}'\gamma^\mu\psi' = \bar{\psi} S_L{}^{-1}\gamma^\mu S_L \psi = \Lambda^\mu{}_\nu(\bar{\psi}\gamma^\nu\psi) \tag{5.65}$$

となるが，パリティ演算に対しては

$$\bar{\psi}'\gamma^\mu\psi' = \bar{\psi} S_P{}^{-1}\gamma^\mu S_P\psi = \begin{cases} \bar{\psi}\gamma^0\psi \\ -\bar{\psi}\gamma^k\psi \end{cases} \tag{5.66}$$

を得る。ここに示した変換性は，まさに Lorentz 4 元ベクトルに期待される性質そのものである。

(5.56)，(5.64) から，ただちに $\bar{\psi}\psi$ は Lorentz スカラーであることがわかる。確率密度 $\rho = \psi^\dagger\psi$ はスカラーではなく，4 元ベクトル $\bar{\psi}\gamma^\mu\psi$ の時間成分である。

$$\gamma^5 S_P = -S_P\gamma^5 \tag{5.67}$$

が成り立つから，γ^5 によって，擬ベクトルと擬スカラーの "擬性" (pseudo-nature) が生ずる。たとえば，擬スカラーは本義 Lorentz 変換に対してスカラーとなるが，本来のスカラーとは違って空間反転で符号が変わる。

5.7 質量 0 のフェルミオン：2 成分ニュートリノ

Dirac 方程式 (5.1)

$$H\psi=(\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{p}+\beta m)\psi \tag{5.68}$$

と本章のはじめの議論にもどろう。すでに α と β が満足する代数関係を導き，それらが 4 行 4 列の行列によって満たされることをみた。しかし，質量 0 の粒子の場合には β は含まれず，

$$\alpha_i\alpha_j+\alpha_j\alpha_i=2\delta_{ij} \qquad \alpha_i=\alpha_i^{\dagger} \tag{5.69}$$

が満たされればよい点に注意する ((5.3) 参照)。この関係は，2 行 2 列の Pauli 行列によって実現できる。$\alpha_i=-\sigma_i$ および $\alpha_i=\sigma_i$ とすることができるから，質量を持たない粒子に対する Dirac 方程式は，2 成分スピノール $\chi(\boldsymbol{p})$ と $\phi(\boldsymbol{p})$ に対する 2 つの独立した方程式に分解される：

$$E\chi=-\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p}\chi, \tag{5.70}$$

$$E\phi=\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p}\phi. \tag{5.71}$$

2 つの方程式は，相対論的なエネルギー・運動量関係 $E^2=\boldsymbol{p}^2$ に基づいている。したがって一方が正エネルギー，他方は負エネルギーの解になる。

(5.70) を質量を持たないフェルミオン，すなわちニュートリノの波動方程式と考えよう。正エネルギー解は $E=|\boldsymbol{p}|$ であり，

$$\boldsymbol{\sigma}\cdot\hat{\boldsymbol{p}}\chi=-\chi \tag{5.72}$$

が成り立つ。つまり χ は，エネルギー E，運動量 $\boldsymbol{p}$ の左巻きニュートリノ (ヘリシティー $\lambda=-1/2$) を記述する。もう 1 つの解は，負エネルギーを持つ。これを解釈するのに，エネルギー $-E$，運動量 $-\boldsymbol{p}$ のニュートリノの解を考える。それは

$$\boldsymbol{\sigma}(-\hat{\boldsymbol{p}})\chi=\chi \tag{5.73}$$

を満たし，ヘリシティーは正，したがってエネルギー E，運動量 $\boldsymbol{p}$ の右巻き反ニュートリノ ($\lambda=+1/2$) を記述する。記法的には，(5.70) は $\nu_{\rm L},\bar{\nu}_{\rm R}$ を記述するといってよい。このような波動方程式は，1929 年，Weyl によってはじめて提案されたが，$\nu_{\rm L}\to\nu_{\rm R}$ となるようなパリティ演算 P に対して不変ではないという理由で捨てられてしまった。しかし，質量を持たないニュートリノに対して，この反論はあてはまらない。弱い相互作用では，パリティ保存が成り立たないからである (第 12 章参照)。第 2 の式 (5.71) は，もう 1 つのヘリシティー状態 $\nu_{\rm R}$ と $\bar{\nu}_{\rm L}$ を記述する。これらの結果を 4 成分形式

$$u=\begin{pmatrix}\chi\\ \phi\end{pmatrix},\qquad \alpha=\begin{pmatrix}-\boldsymbol{\sigma} & 0\\ 0 & \boldsymbol{\sigma}\end{pmatrix} \tag{5.74}$$

に書き直してみると，Weyl (またはカイラル) 表示 (5.6) で考えていることがわかる。この表示では，

$$\boldsymbol{\gamma}=\begin{pmatrix}0 & \boldsymbol{\sigma}\\ -\boldsymbol{\sigma} & 0\end{pmatrix},\qquad \gamma^0=\begin{pmatrix}0 & I\\ I & 0\end{pmatrix},\qquad \gamma^5=\begin{pmatrix}-I & 0\\ 0 & I\end{pmatrix} \tag{5.75}$$

である。詳しくは第 12 章で議論するが，ここで，弱い相互作用にちょっとふれておくのが適当だろう。多種多様な実験が示すように，レプトンは荷電カレント弱相互作用の中に，双 1 次共変量の 2 つの特別な組み合わせで現れる。たとえば，電子と電子のニュートリノに対して

$$J^\mu=\bar{\psi}_e\gamma^\mu\frac{1}{2}(1-\gamma^5)\psi_\nu \tag{5.76}$$

である。電磁カレント (5.17) がベクトル型であるのに対して，弱カレント J^μ は V-A 型である。$(1-\gamma_5)/2$ の存在に注目すべきだ：ベクトル (V) と擬ベクトル (A) の混合は，パリティが破れていることを，しかも最大限に破れていることを保障する。実際，(5.75) から

$$\frac{1}{2}(1-\gamma^5)u_\nu=\begin{pmatrix}I & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\chi\\ \phi\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\chi\\ 0\end{pmatrix} \tag{5.77}$$

となるから，ちょうど ν_L ($\bar{\nu}_R$) を取り出している。すなわち，左巻きニュートリノ (右巻き反ニュートリノ) のみが，弱い相互作用によって荷電レプトンに結合している。われわれが知るかぎりでは，ニュートリノは弱い相互作用しかしない。したがって，ニュートリノを観測できるのは弱い相互作用だけである。ν_R (および $\bar{\nu}_L$) が存在するという実験的な証拠はなく，実際，自然界には存在しないのだろう。もちろん，質量が厳密に 0 のときはじめて，$\nu_L(\bar{\nu}_R)$ のみが存在すると主張できる。質量があれば，Lorentz 変換によって，ν_L を ν_R に変えることができる。

問題 5.13 演算子

$$P_R\equiv\frac{1}{2}(1+\gamma^5),\qquad P_L\equiv\frac{1}{2}(1-\gamma^5)$$

は，(右巻きと左巻きの) 射影演算子が満足する性質

$$P_i^2=P_i,\qquad P_L+P_R=1,\qquad P_RP_L=0$$

を持つことを示せ。γ^5 をカイラル演算子と呼ぶ。

質量を持つフェルミオンに対して，射影 $(1\pm\gamma^5)u/2$ を，u の右巻き (左巻き) 成分と定義する(複合同順)。

問題 5.14　質量を持つフェルミオンの場合，右巻き・左巻きを表す量子数はよい量子数とはならないことを示せ。すなわち，γ_5 はハミルトニアンと交換しないことを示せ。一方，ヘリシティーは保存するが系に依存することを確かめよ。とくに，観測する系が粒子を“追い越す”とヘリシティーは逆転することを示せ。

問題 5.15　γ 行列の Dirac-Pauli 表現 (5.51) を用いて，高エネルギーでは

$$\gamma^5 u^{(s)} \simeq \begin{pmatrix} \boldsymbol{\sigma}\cdot\hat{\boldsymbol{p}} & 0 \\ 0 & \boldsymbol{\sigma}\cdot\hat{\boldsymbol{p}} \end{pmatrix} u^{(s)} \tag{5.78}$$

を示せ。$u^{(s)}$ は (5.27) の電子のスピノールである。すなわち，相対論的な極限では，カイラル演算子 (γ^5) はヘリシティー演算子に等しくなることを示せ。たとえば，$(1-\gamma^5)u/2=u_{\mathrm{L}}$ は，負のヘリシティーを持つ電子に相当する。

もちろん，高エネルギーにおいて，$(1-\gamma_5)/2$ が負ヘリシティーフェルミオンを取り出す，という事実は表現によらない。もし，スピノールをあらわに表記したければ，表現を選ぶ必要がある。Dirac-Pauli 表現の利点は，それが非相対論的な極限においてエネルギーを対角化する (γ^0 が対角化される) という点にある。一方 Weyl 表現は，相対論的な極限においてヘリシティーを対角化する (γ^5 が対角化される)。

最後にここで，ニュートリノの1つ ($\nu_e, \nu_\mu, \nu_\tau, \cdots$) が質量を持つことが確定的になったと仮定してみよう。問題 5.14 と関連して考えたとき，どのようにして質量を持つニュートリノが得られるのか，さらにまた，弱い相互作用が ν_{L} あるいは $\bar{\nu}_{\mathrm{R}}$ だけと結合することをどのように保証するのだろうか。Majorana ニュートリノがこの疑問を解決する。すなわち，ニュートリノを反ニュートリノと等しくする，つまり $\nu_{\mathrm{L}}, \bar{\nu}_{\mathrm{R}}$ を4成分スピノールの2つのヘリシティー成分と考えるのである。したがって，他に2つの成分 ν_{R} と $\bar{\nu}_{\mathrm{L}}$ (もしそれらが存在すれば) は，異なる質量を持つ Majorana フェルミオンになりうる。明らかにこれは，電子の4成分 Dirac スピノールとは異なる構造である。Majorana スピノールの詳しい議論は，P. Roman の教科書，『Theory of Elementary Particle』 North Holland (1967) p. 306 を参照されたい。

6

スピン 1/2 粒子の電気力学

この章では，第 3 章でかかげた目標，すなわち，レプトンと光子の電磁相互作用の断面積の計算を実行しよう。これが量子電気力学である。今後は Dirac 方程式が記述する粒子に対して，第 4 章の手法をくり返し使って議論を進める。最終的な到達点は，スピン 1/2 のレプトンとクォークの電磁相互作用に対する Faynman 則である。いまや，相互作用ばかりでなく粒子もまた，完全に物理的なものになった。これらの粒子はスピン 0 の "教育的な素材" ではない。最後に実験結果とつき合わせよう。

6.1 電子と電磁場 A^μ の相互作用

これまでに，4 元運動量 p^μ の自由電子は，4 成分波動関数

$$\psi = u(\boldsymbol{p})\, e^{-ip\cdot x}$$

で記述できることをみてきた。これは Dirac 方程式 (5.19) を満たす：

$$(\gamma_\mu p^\mu - m)\,\psi = 0.$$

電磁場 A^μ 内の電子の方程式は，運動量の置き換え

$$p^\mu \longrightarrow p^\mu + eA^\mu \tag{6.1}$$

によって得られる ((4.2) 参照)。ここでも，電子の電荷を $-e$ にとった。すると

$$(\gamma_\mu p^\mu - m)\psi = \gamma^0 V\psi \tag{6.2}$$

が成り立ち，摂動は

$$\gamma^0 V = -e\gamma_\mu A^\mu \tag{6.3}$$

で与えられる。γ^0 を導入したのは，(6.2) を $(E+\cdots)\psi = V\psi$ の形に表すためである。その結果，ポテンシャルエネルギーは，Schrödinger 方程式の場合と同じ形で入ってくる (Schrödinger-Pauli 方程式 (5.31) における $-eA^0$ 項を参

照)。1次の摂動論 (3.37) を用いて，電子の状態 ψ_i から ψ_f への散乱振幅を求めると

$$\begin{aligned} T_{fi} &= -i\int \psi_f{}^\dagger(x)\ V(x)\psi_i(x)d^4x \\ &= ie\int \bar{\psi}_f\gamma_\mu A^\mu \psi_i d^4x \\ &= -i\int j_\mu{}^{fi} A^\mu d^4x \end{aligned} \tag{6.4}$$

と書ける。ここで

$$j_\mu{}^{fi} = -e\bar{\psi}_f\gamma_\mu\psi_i \tag{6.5}$$

$$= -e\bar{u}_f\gamma_\mu u_i e^{i(p_f-p_i)\cdot x} \tag{6.6}$$

である。この結果を (5.17) と比較すると，$j_\mu{}^{fi}$ は電子状態 i と f の間の電磁遷移カレントとみなすことができるだろう。

"スピンを持たない" 電子に対して得た類似の遷移カレント

$$j_\mu{}^{fi} = -e(p_f+p_i)_\mu e^{i(p_f-p_i)\cdot x}$$

は，図 6·1 (a) の Feynman 則で表される。図 6·1 (b) に (物理的な) スピン 1/2 電子について，対応する規則を示す。バーテックス因子は，この場合スピン空間における 4 行 4 列の行列になる。運動量 p_i, p_f，スピン s, r を持つ，入ってくる電子の列スピノール $u^{(s)}(p_i)$ と出ていく電子の行スピノール $\bar{u}^{(r)}(p_f)$ で，バーテックス因子をはさむ。

問題 6.1　"スピンを持たない" 電子は，その電荷を通してのみ A^μ と相互作用するから結合因子 $(p_f+p_i)^\mu$ を含む。次式を証明せよ。

$$\bar{u}_f\gamma^\mu u_i = \frac{1}{2m}\bar{u}_f((p_f+p_i)^\mu + i\sigma^{\mu\nu}(p_f-p_i)_\nu)u_i. \tag{6.7}$$

この式から，物理的なスピン 1/2 電子は，電荷と磁気モーメントの両方を通して相互作用すると結論できる：問題 6.2 も参照。(6.7) は電流の "Gordon 分解" として知られている。

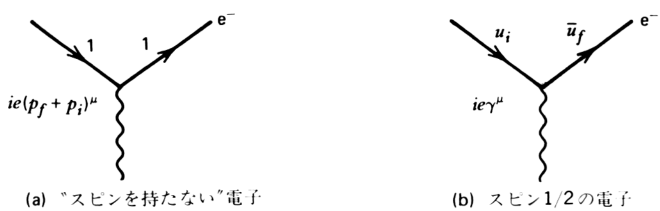


図 6·1　6.17 節にまとめてある Feynman 則の因子

問題 6.2　非相対論的な極限では，電子カレント (6.6) の Gordon 分解 (6.7) によって，電子と電磁場の相互作用が，電荷 $-e$ と磁気モーメント $-e/2m$ から生ずる 2 つの部分に分解されることを示せ。A_μ は t に依存しないと仮定すれば，(6.4) は

$$T_{fi}=-i2\pi\delta(E_f-E_i)\int j_\mu{}^{fi}A^\mu d^3x$$

となる。磁気モーメント相互作用 $(-\boldsymbol{\mu}\cdot\boldsymbol{B})$ を同定するには，

$$\int\left[-\frac{e}{2m}\bar{\psi}_f i\sigma_{\mu\nu}(p_f-p_i)^\nu\psi_i\right]A^\mu d^3x=\int\psi_A{}^{f\dagger}\left(\frac{e}{2m}\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{B}\right)\psi_A{}^i d^3x$$

を示せば十分である。ここで ψ_A は，ψ の上 2 つの成分 (すなわち "大" 成分) を表す。これを (5.31), (5.32) と比較せよ。

ヒント　$E_i=E_f$ であるから，(p_f-p_i) の空間成分のみが寄与する。$\bar{\psi}(\sigma_{23},\sigma_{31},\sigma_{12})\psi\simeq\psi_A\sigma\psi_A$ に注意せよ。

6.2　Møller 散乱：$e^-e^-\to e^-e^-$

図 6·1 (b) の QED バーテックス因子をどのように用いるかを明らかにするため，e^-e^- 散乱に対する図 6·2 の Feynman 図を計算する。4.2 節の手法をくり返すと，遷移振幅を次のように書くことができる ((4.16) 参照)：

$$\begin{aligned}T_{fi}&=-i\int j_\mu{}^{(1)}(x)\left(-\frac{1}{q^2}\right)j_{(2)}{}^\mu(x)\,d^4x\\&=-i(-e\bar{u}_C\gamma_\mu u_A)\left(-\frac{1}{q^2}\right)(-e\bar{u}_D\gamma^\mu u_B)(2\pi)^4\delta^{(4)}(p_A+p_B-p_C-p_D).\end{aligned}$$

ここで，$q=p_A-p_C$ であり，$(2\pi)^4$ と δ 関数の積は，カレントの x 依存性の積分から生じた。不変振幅は

$$T_{fi}=-i(2\pi)^4\delta^{(4)}(p_A+p_B-p_C-p_D)\mathcal{M}$$

によって定義されることを思いおこすと，

$$-i\mathcal{M}=(ie\bar{u}_C\gamma^\mu u_A)\left(-\frac{ig_{\mu\nu}}{q^2}\right)(ie\bar{u}_D\gamma^\nu u_B)\qquad(6.8)$$

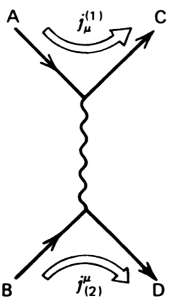


図 6·2　$e^-e^-\to e^-e^-$ の Feynman 図

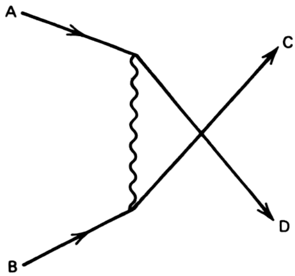


図 6·3　$e^-e^- \to e^-e^-$ に対する第 2 の Feynman 図

であり，図 6·1 (b) で与えた因子と一致する。

e^-e^- 散乱に対して，第 2 の Feynman 図 (図 6·3) が存在する。振幅は，(6.8) で C ↔ D の交換によって得られる。ただし，同種フェルミオンの交換から生ずる相対的な負号をつける。こうして，Møller 散乱の完全な (最低次の) 振幅は次のようになる：

$$\mathscr{M}=-e^2\frac{(\bar{u}_C\gamma^\mu u_A)(\bar{u}_D\gamma_\mu u_B)}{(p_A-p_C)^2}+e^2\frac{(\bar{u}_D\gamma^\mu u_A)(\bar{u}_C\gamma_\mu u_B)}{(p_A-p_D)^2}. \tag{6.9}$$

無偏極断面積を計算するために，4.3 節で求めた断面積の表式を修正しなければならない。無偏極という意味は，実験では電子のスピンの情報は何も記録しないことである。すべての可能なスピン状態において散乱が許されるから，次のような置き換えをしなければならない：

$$|\mathscr{M}|^2 \longrightarrow \overline{|\mathscr{M}|^2}\equiv\frac{1}{(2s_A+1)(2s_B+1)}\sum_{\substack{\text{すべての}\\\text{スピン状態}}}|\mathscr{M}|^2. \tag{6.10}$$

ただし，s_A, s_B は入射粒子のスピンである。すなわち，入射粒子のスピンにつき平均し，終状態のスピンについて和をとる。明らかに，この計算は自明というわけにはいかない。

上述の内容の感じをつかむために，まず Møller 散乱の無偏極断面積を非相対論的極限で計算してみよう。この場合，スピンの和は比較的簡単で，$|\boldsymbol{p}|\to 0$ の極限で，(5.27) と (5.42) は次のようになる。

$$\text{入ってくる } e^-：u^{(s)}=\sqrt{2m}\begin{pmatrix}\chi^{(s)}\\0\end{pmatrix}, \tag{6.11}$$

$$\text{出ていく } e^-：\bar{u}^{(s)}=\sqrt{2m}(\chi^{(s)}\ \ 0).$$

ここで，$s=1,2$ は，z 軸に沿ってスピン上向き，および下向きに対応する ((5.25) 参照)。(5.4) の表示，すなわち

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{\gamma} = \begin{pmatrix} 0 & \boldsymbol{\sigma} \\ -\boldsymbol{\sigma} & 0 \end{pmatrix} \tag{6.12}$$

を用いると，次のことがわかる：

$$\begin{aligned} &\bar{u}^{(s)}\gamma^\mu u^{(s)} = \begin{cases} 2m & \mu=0\text{ のとき} \\ 0 & \mu\neq 0\text{ のとき} \end{cases} \\ &\bar{u}^{(s)}\gamma^\mu u^{(s')} = \ 0 \qquad \text{すべての } \mu\text{，ただし } s\neq s'. \end{aligned} \tag{6.13}$$

いいかえれば，非相対論的な電子の散乱では，スピンは向きを変えない。このことは，電子は主として電場を通して相互作用することから予想される。電場はスピン方向を変えることができないからである。もっと高エネルギー (速度) では，磁場がスピンの向きを変える。(6.13) を (6.9) に代入し，電子スピンによって， 6 つの 0 にならない振幅を整理すると，次のようになる。

$$\mathcal{M}(\uparrow\uparrow \to \uparrow\uparrow) = \mathcal{M}(\downarrow\downarrow \to \downarrow\downarrow) = -e^2 4m^2\left(\frac{1}{t} - \frac{1}{u}\right),$$

$$\mathcal{M}(\uparrow\downarrow \to \uparrow\downarrow) = \mathcal{M}(\downarrow\uparrow \to \downarrow\uparrow) = -e^2 4m^2\frac{1}{t},$$

$$\mathcal{M}(\uparrow\downarrow \to \downarrow\uparrow) = \mathcal{M}(\downarrow\uparrow \to \uparrow\downarrow) = \mathrm{e}^2 4m^2\frac{1}{u}.$$

ここで，t, u は (4.43) で定義されており，$1/t$，$1/u$ は光子の伝播関数を表す。矢印は各粒子につき，スピン上向きおよび下向きを表す。これで，スピン和 (6.10) を実行できる。すなわち

$$\overline{|\mathcal{M}|^2} = \frac{1}{4}(4m^2e^2)^2 2\left[\left(\frac{1}{t} - \frac{1}{u}\right)^2 + \frac{1}{t^2} + \frac{1}{u^2}\right]. \tag{6.14}$$

重心系 ((4.45) 参照) では，

$$\begin{aligned} t &= -2p^2(1-\cos\theta) = -4p^2\sin^2\frac{\theta}{2}, \\ u &= -2p^2(1+\cos\theta) = -4p^2\cos^2\frac{\theta}{2} \end{aligned} \tag{6.15}$$

となる。ここで θ は散乱角，$p = |\boldsymbol{p}_i|$ $(i = \mathrm{A, B, C, D})$ である。この関係を使い，(6.14) を (4.35) に代入すると，非相対論的極限での $\mathrm{e^-e^-}$ 微分断面積は

$$\left.\frac{d\sigma}{d\Omega}\right|_{\mathrm{cm}} = \frac{m^2\alpha^2}{16p^4}\left(\frac{1}{\sin^4(\theta/2)} + \frac{1}{\cos^4(\theta/2)} - \frac{1}{\sin^2(\theta/2)\cos^2(\theta/2)}\right) \tag{6.16}$$

となることがわかる。ここで $s \simeq 4m^2$，$\alpha \equiv e^2/4\pi$ は (4.5) の微細構造定数である。

6.3 $e^-\mu^- \to e^-\mu^-$ 過程

非相対論的な近似による簡単化の御利益がないとき，これらのスピン和をどのようにしてとるのだろう。$e^-\mu^-$ 散乱を例にとって，スピンについての和の一般的な手法を説明しよう。これはただ1つの（最低次の）Feynman 図（図 6·4）しかないから，不変振幅は Feynman 則から得られる（(6.8) 参照）：

$$\mathcal{M} = -e^2 \bar{u}(k')\gamma^\mu u(k)\frac{1}{q^2}\bar{u}(p')\gamma_\mu u(p). \tag{6.17}$$

運動量は図 6·4 で定義され，$q=k-k'$ である。（無偏極）断面積を求めるために，$\mathcal{M}$の絶対値の 2 乗をとり，スピン和を実行しなければならない。(6.10) を

$$\overline{|\mathcal{M}|^2} = \frac{e^4}{q^4} L_e^{\mu\nu} L_{\mu\nu}^{\text{muon}} \tag{6.18}$$

のように書き，電子とミューオンのスピン和を分離すると便利である。電子バーテックスに付随したテンソルは

$$L_e^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\sum_{(\text{e スピン})}[\bar{u}(k')\gamma^\mu u(k)][\bar{u}(k')\gamma^\nu u(k)]^* \tag{6.19}$$

である。同様の表式が，$L_{\mu\nu}^{\text{muon}}$ についても得られる。

スピン和は，手に負えない作業のようにみえるが，幸いそれは，すでに確立されているトレース手法によって，非常に簡単に計算できる。まずはじめに注意しておきたいことは，(6.19) の第 2 の角括弧（1行1列の行列であり，複素共役とエルミート共役は同じ）が，次のようになることである。すなわち

$$[u^\dagger(k')\gamma^0\gamma^\nu u(k)]^\dagger = [u^\dagger(k)\gamma^{\nu\dagger}\gamma^0 u(k')] = [\bar{u}(k)\gamma^\nu u(k')]$$

である。ここで，$\gamma^{\nu\dagger}\gamma^0 = \gamma^0\gamma^\nu$ を用いた（(5.43) 参照）。 つまり，(6.19) の複素共役は，単に行列の順序を変えるだけである。ここで，(6.19) の積を全部，個々の行列要素を用いてあらわに書く（くり返し現れる添字 α, β については加えることを意味する）。すなわち，

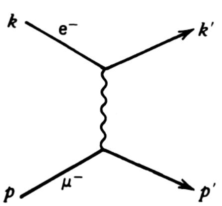


図 6·4 電子・ミューオン散乱の Feynman 図

$$L_{\mathrm{e}}^{\mu\nu}=\frac{1}{2}\underbrace{\sum_{s'}\bar{u}_{\alpha}{}^{(s')}(k')}_{(\not{k}'+m)_{\delta\alpha}}\gamma_{\alpha\beta}{}^{\mu}\underbrace{\sum_{s}u_{\beta}{}^{(s)}(k)\,\bar{u}_{\gamma}{}^{(s)}(k)}_{(\not{k}+m)_{\beta\gamma}}\gamma_{\gamma\delta}{}^{\nu}u_{\delta}{}^{(s')}(k').$$

完全関係 (5.47) によって，始状態および終状態の電子スピンについての和をとることができた。u_δ の位置を移動してみると，このことがはっきりする。行列の性質は，成分によって示されているので，u_δ を動かすことができる。こうして L は，4 つの 4 行 4 列の行列の積のトレースになる：

$$L_{\mathrm{e}}^{\mu\nu}=\frac{1}{2}\mathrm{Tr}((\not{k}'+m)\gamma^{\mu}(\not{k}+m)\gamma^{\nu}). \tag{6.20}$$

ここで m は電子の質量である。L を評価するために，トレース定理を用いる。

6.4 トレース定理と γ 行列の性質

Dirac の γ 行列は，交換関係の代数

$$\gamma^{\mu}\gamma^{\nu}+\gamma^{\nu}\gamma^{\mu}=2g^{\mu\nu} \tag{6.21}$$

を満足する。したがって，γ 行列の積のトレースは，直接，行列の積を計算しなくても評価できる。トレース定理は次の通りである ($\not{a}=\gamma_{\mu}a^{\mu}$ の記法を用いる)。

$$\begin{aligned}&\mathrm{Tr}\,1=4\\&\text{奇数個の }\gamma\text{ を含むトレースは }0\\&\mathrm{Tr}(\not{a}\not{b})=4a\cdot b\\&\mathrm{Tr}(\not{a}\not{b}\not{c}\not{d})=4[(a\cdot b)(c\cdot d)-(a\cdot c)(b\cdot d)+(a\cdot d)(b\cdot c)]\end{aligned} \tag{6.22}$$

$$\begin{aligned}&\mathrm{Tr}\,\gamma_5=0\\&\mathrm{Tr}(\gamma_5\not{a}\not{b})=0\\&\mathrm{Tr}(\gamma_5\not{a}\not{b}\not{c}\not{d})=4i\varepsilon_{\mu\nu\lambda\sigma}a^{\mu}b^{\nu}c^{\lambda}d^{\sigma}\end{aligned} \tag{6.23}$$

ここで $\varepsilon_{\mu\nu\lambda\sigma}$ は，μ,ν,λ,σ が 0, 1, 2, 3 の偶 (奇) 置換のとき，+1 (−1)，2 つの添字が同じとき 0 を意味する。

トレース計算を簡単にするための便利な関係式をあげておく：

$$\begin{aligned}\gamma_{\mu}\gamma^{\mu}&=4,\\\gamma_{\mu}\not{a}\gamma^{\mu}&=-2\not{a},\\\gamma_{\mu}\not{a}\not{b}\gamma^{\mu}&=4a\cdot b,\\\gamma_{\mu}\not{a}\not{b}\not{c}\gamma^{\mu}&=-2\not{c}\not{b}\not{a}.\end{aligned} \tag{6.24}$$

問題 6.3 (6.21) を用いて，トレース定理と恒等式 (6.24) を証明せよ。

6.5 $e^-\mu^-$ 散乱と $e^+e^- \to \mu^+\mu^-$ 過程

(6.22) にあげたトレース定理を用いれば，電子バーテックスに対するテンソル (6.20) はただちに計算できる。すなわち

$$L_e^{\mu\nu}=\frac{1}{2}\mathrm{Tr}(\not k'\gamma^\mu\not k\gamma^\nu)+\frac{1}{2}m^2\mathrm{Tr}(\gamma^\mu\gamma^\nu)$$
$$=2(k'^\mu k^\nu+k'^\nu k^\mu-(k'\cdot k-m^2)g^{\mu\nu}) \tag{6.25}$$

得る。(6.18) の $L_{\mu\nu}^{\mathrm{muon}}$ も同様である。すなわち

$$L_{\mu\nu}^{\mathrm{muon}}=2(p_\mu' p_\nu+p_\nu' p_\mu-(p'\cdot p-M^2)g_{\mu\nu}). \tag{6.26}$$

ここで，M はミューオンの質量。(6.25) と (6.26) の積を作れば，スピンで平均した $e^-\mu^- \to e^-\mu^-$ 振幅 (6.18) に対して，最終的に次のような "厳密" な表式に到達する：

$$\overline{|\mathcal{M}|^2}=\frac{8e^4}{q^4}[(k'\cdot p')(k\cdot p)+(k'\cdot p)(k\cdot p')$$
$$-m^2p'\cdot p-M^2k'\cdot k+2m^2M^2]. \tag{6.27}$$

相対論的極限では，m^2 と M^2 を含む項を無視してよい。すなわち

$$\overline{|\mathcal{M}|^2}=\frac{8e^4}{(k-k')^4}[(k'\cdot p')(k\cdot p)+(k'\cdot p)(k\cdot p')]. \tag{6.28}$$

さらに，この極限では，(4.43) の Mandelstam 変数は次のようになる：

$$s\equiv(k+p)^2\simeq 2k\cdot p\simeq 2k'p',$$
$$t\equiv(k-k')^2\simeq -2k\cdot k'\simeq -2p\cdot p', \tag{6.29}$$
$$u\equiv(k-p')^2\simeq -2k\cdot p'\simeq -2k'\cdot p.$$

すなわち，高エネルギーでは，無偏極 $e^-\mu^-$ 散乱振幅の 2 乗 (6.28) は，

$$\boxed{\overline{|\mathcal{M}|^2}=2e^4\frac{s^2+u^2}{t^2}} \tag{6.30}$$

で与えられる。$e^-\mu^- \to e^-\mu^-$ についての上の結果を "交叉 (crossing)" することによって，$e^-e^+ \to \mu^+\mu^-$ の振幅が得られる (4.6 節参照)。必要な交換は $k' \leftrightarrow -p$ であるから，(6.30) で $s \leftrightarrow t$ とすれば，

$$\overline{|\mathcal{M}|^2}=2e^4\frac{t^2+u^2}{s^2} \tag{6.31}$$

を得る。今度は，$e^-e^+ \to \mu^+\mu^-$ が s チャネル過程になる。対応する Feynman 図を図 6·5 に示す。上で求めた振幅の 2 乗は，(4.35) を用いて，$e^+e^- \to \mu^+\mu^-$ 散乱の微分断面積に翻訳できる。すなわち，重心系では，

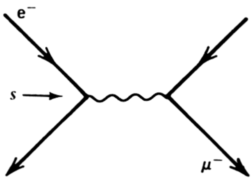


図 6·5　$e^-e^+ \to \mu^-\mu^+$ の Feynman 図。これまでのように，反粒子は粒子 (e^-, μ^-) 線のみを用いて書いてある。

$$\left.\frac{d\sigma}{d\Omega}\right|_{cm} = \frac{1}{64\pi^2 s} 2e^4\left[\frac{1}{2}(1+\cos^2\theta)\right].$$

である。角括弧内の量は $(t^2+u^2)/s^2$ になる ((4.45) 参照)。$\alpha = e^2/4\pi$ を用いて，

$$\boxed{\left.\frac{d\sigma}{d\Omega}\right|_{cm} = \frac{\alpha^2}{4s}(1+\cos^2\theta)} \tag{6.32}$$

を得る。反応断面積を求めるために，θ, ϕ につき積分して

$$\boxed{\sigma(e^+e^- \to \mu^+\mu^-) = \frac{4\pi\alpha^2}{3s}} \tag{6.33}$$

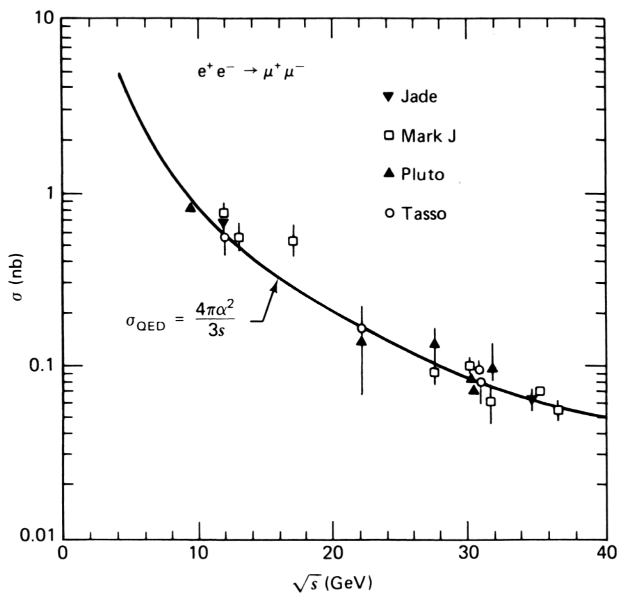


図 6·6　PETRA で測定した $e^+e^- \to \mu^+\mu^-$ の全断面積の，重心系のエネルギーに対する依存性

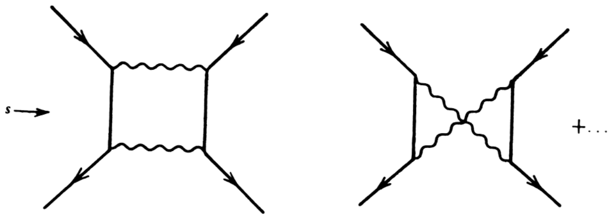


図 6·7 $e^+e^- \to \mu^+\mu^-$ に対するいくつかの高次補正

となる。

この結果と PETRA のデータとの比較を図 6·6 に示す。PETRA 加速器では，磁石が円周上に並べられており，その中を電子と陽電子が反対方向に回転する。したがって，2 つのビームは同時に加速される。特定の場所でこれらのビームは交叉し，重心系のエネルギー $\sqrt{s}=2E_b$ で，e^+ と e^- が相互作用する。ただし E_b はビームエネルギーである。(6.33) に数値を代入して，

$$\sigma(e^+e^- \to \mu^+\mu^-) \simeq \frac{20(\text{nb})}{E_b{}^2(\text{GeV}^2)}$$

を得る。計算から予想される消滅断面積のビームエネルギーに対する 2 乗依存性は，図 6·6 に示すように，ビームエネルギーを変えていくことによって検証することができる。上で得た結果は最低次の Feynman 図 (図 6·5) の寄与である。もちろん，$\alpha^3, \alpha^4, \cdots$ の次数の補正項もあるが，それらは図 6·7 のような高次の Feynman 図そのものの振幅，および最低次との干渉から生ずる。

6.6 高エネルギーでのヘリシティー保存

粒子のヘリシティーに注目すると，(6.30), (6.31) の結果について，その内容の物理的な洞察を深めることができる。われわれはしばしば，相対論的極限の相互作用に興味がある場合が多いので，この極限において電磁カレントの構造を調べておくことが有効である。(5.78) から出発し，エネルギー $E \gg m$ のフェルミオンに対して

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(1-\gamma^5)\,u &= u_L \\ \frac{1}{2}(1+\gamma^5)\,u &= u_R \end{aligned} \tag{6.34}$$

に注意する。つまり $(1\pm\gamma^5)/2$ は，スピノールの $\lambda=\pm1/2$ 成分を取り出す。こ

の知見を用いて，

$$\bar{u}\gamma^{\mu}u \equiv (\bar{u}_{\mathrm{L}}+\bar{u}_{\mathrm{R}})\gamma^{\mu}(u_{\mathrm{L}}+u_{\mathrm{R}}) = \bar{u}_{\mathrm{L}}\gamma^{\mu}u_{\mathrm{L}}+\bar{u}_{\mathrm{R}}\gamma^{\mu}u_{\mathrm{R}} \tag{6.35}$$

が成り立つこと，したがって，高エネルギーでは電磁相互作用 ((6.4),(6.6) 参照) が，散乱フェルミオンのヘリシティーを保存することが示される。

証明は次のようである。まず，$\gamma^5=\gamma^{5\dagger}$ および $\gamma^5\gamma^0=-\gamma^0\gamma^5$ から，

$$\bar{u}_{\mathrm{L}} = u_{\mathrm{L}}{}^{\dagger}\gamma^0 = u^{\dagger}\frac{1}{2}(1-\gamma^5)\gamma^0 = \bar{u}\frac{1}{2}(1+\gamma^5) \tag{6.36}$$

が成り立つことに注意する。したがって，

$$\begin{aligned}\bar{u}_{\mathrm{L}}\gamma^{\mu}u_{\mathrm{R}} &= \frac{1}{4}\bar{u}(1+\gamma^5)\gamma^{\mu}(1+\gamma^5)u \\ &= \frac{1}{4}\bar{u}\gamma^{\mu}(1-\gamma^5)(1+\gamma^5)u = 0.\end{aligned} \tag{6.37}$$

ここで，$\gamma^5\gamma^{\mu}=-\gamma^{\mu}\gamma^5$ および $(\gamma^5)^2=1$ を用いた。明らかに，高エネルギーにおけるどのようなベクトル (ここでは，擬ベクトル) 相互作用に対しても，ヘリシティー保存は成り立つ。

高エネルギーフェルミオン散乱で可能なバーテックスを，図 6・8 (a) に示す。一方，e^+e^- のような消滅チャネルでは，図 6・8 (b) のバーテックスは，m/E のオーダーの主要な寄与をする。すなわち，出ていくフェルミオンのヘリシティ

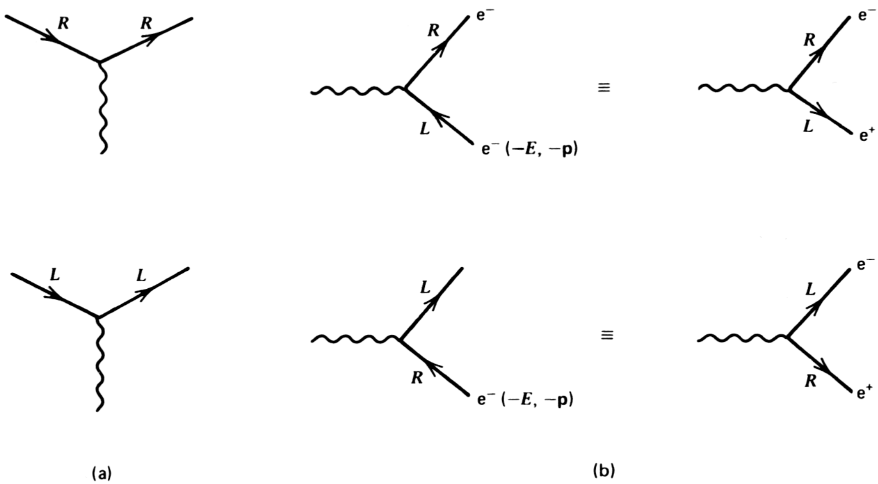


図 6・8　(a) フェルミオン散乱および (b) 交叉 (または消滅) チャネルに対する $O(m/E)$ の許容バーテックス。すべての図で，時間は左から右へ進む。

ーは逆である。本書のいたるところで，このようなヘリシティー保存則の応用によって，電磁相互作用と弱い相互作用に対する貴重な洞察がどのようにして得られるかがわかるだろう。

問題 6.4 弱い相互作用は V-A 型であると仮定して，μ^- の崩壊過程 $\mu^- \to e^- \bar{\nu}_e \nu_\mu$ で放出される電子は，なぜ左巻きでなければならないかを説明せよ。また，μ^+ 崩壊で生ずる e^+ のヘリシティーはどうなるか。

e^+e^- 消滅を詳しく調べよう。ヘリシティー保存から，入射 e^+, e^- が互いに逆のヘリシティーを持たなければならない (図 6･8 (a) 参照)。同じことが，終状態の μ^+, μ^- についてもいえる。つまり，重心系では，散乱過程は $J_z = +1$，または -1 を持つ始状態から，$J_{z'} = +1$，または -1 の終状態へと進む。ここで，z，z' 軸は，入ってくる e^- と出ていく μ^- の方向にとる。4 つの可能な過程の 1 つを，図 6･9 に示した。反応は，スピン $j=1$ の光子中間状態を媒介として進む。つまり，振幅は，回転行列

$$d_{\lambda'\lambda}{}^j(\theta) \equiv \langle j\lambda' | e^{-i\theta J_y} | j\lambda \rangle \tag{6.38}$$

に比例する。y は反応平面に垂直，θ は重心系での散乱角，λ, λ' は z, z' 軸に沿っての正味のヘリシティーである。回転行列については，普通の表記法を採用した。回転行列は，角運動量の理論から簡単に算出でき，多くの書物に出ている (たとえば，Martin and Spearman, 1970)。4 つの可能なヘリシティー振幅は，同じバーテックス因子を持ち，したがって次の表式に比例する ((4.45), (2.21) 参照)：

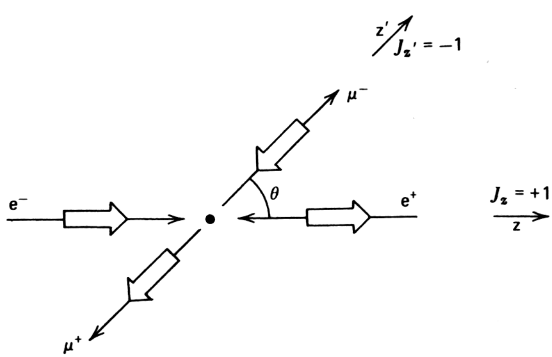


図 6･9 特別なヘリシティー状態の反応過程 $e^-e^+ \to \mu^-\mu^+ : \mathcal{M}(e_R{}^- e_L{}^+ \to \mu_L{}^- \mu_R{}^+) \sim d_{-11}{}^1(\theta)$.

$$
\begin{aligned}
d_{11}{}^{1}(\theta) = d_{-1-1}{}^{1}(\theta) &= \frac{1}{2}(1+\cos\theta) \simeq -\frac{u}{s}, \\
d_{1-1}{}^{1}(\theta) = d_{-11}{}^{1}(\theta) &= \frac{1}{2}(1-\cos\theta) \simeq -\frac{t}{s}.
\end{aligned}
\tag{6.39}
$$

これらの振幅をスピンで平均すれば，欲しい結果が得られる ((6.31) 参照)：

$$
\overline{|\mathcal{M}|^2} \propto \frac{u^2+t^2}{s^2}. \tag{6.40}
$$

これは角運動量保存から直接得られる結果である。このことから，たとえば，図 6·9 の反応過程に対する振幅が，前方で消えなければならないことになる。そこでは，正味のヘリシティーが保存しないからである。

問題 6.5 回転行列の議論を用いて，"スピンを持たない" 電子とミューオンに対して，

$$
\mathcal{M}(\mathrm{e^-e^+} \to \mu^-\mu^+) \propto \frac{t-u}{s} \tag{6.41}
$$

を示せ。また，s チャネルの光子の寄与 (4.47) と比較せよ。

6.7 $\mathrm{e^-e^+} \to \mathrm{e^-e^+}, \mu^-\mu^+$ の概観

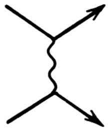
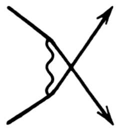
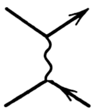
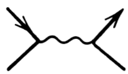
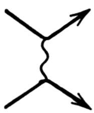
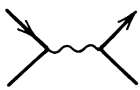
すでに，相対論的な極限では，いくつかの典型的な QED 過程の計算を行った。これらとそれに関連する結果を表 6-1 にまとめてみると，多くのことがわかる。表にあげた寄与はすべて，表の右の欄から簡単にわかるが，干渉項は別として，ヘリシティーの議論からも容易に得られる。

1 個のグルーオン交換による "強い" 相互作用，$\mathrm{qq} \to \mathrm{qq}$，$\mathrm{q\bar{q}} \to \mathrm{q\bar{q}}$ に対する QCD においても，似た結果が得られる。事実，始 (終) 状態のクォークに対して，そのスピンとともにカラーについても平均 (和) をとること，および $\alpha \to \alpha_s$ の置き換えをすることの 2 点を除けば，結果は QED と同じになる。α_s は，第 1 章および第 2 章で導入したクォーク・グルーオンの結合定数である。

問題 6.6 電子・電子散乱に対する 2 つの Feynman 図のスピンを平均した干渉項が，表のようになることを示せ。

Feynman 図において，中間状態に光子内線が現れるときはいつでも，第 13 章でみるように，重い中性弱ボソン Z^0 の寄与もありうる。弱ボソンの Feynman 則の詳細は第 13 章で与えるが，γ-Z^0 干渉から生ずる効果を簡単に予想しておくことは意味がある。s チャネル，あるいは "時間的 (time-like)" Feynman 図で表される $\mathrm{e^-e^+} \to \mathrm{e^-e^+}, \mu^-\mu^+$ のような反応過程では，重心系のエネルギーが

表 6-1 代表的な QED 過程に対する最低次の主要項

	Feynman 図		$\overline{|\mathcal{M}|^2}/2e^4$		
	前方ピーク	後方ピーク	前方	干渉	後方
Møller 散乱 $e^-e^- \to e^-e^-$			$\dfrac{s^2+u^2}{t^2}$	$+\dfrac{2s^2}{tu}$	$+\dfrac{s^2+t^2}{u^2}$
			($u \leftrightarrow t$ 対称)		
↓ ($s \leftrightarrow u$ 交叉) ↓	空間的光子	時間的光子	空間的光子	干渉	時間的光子
Bhabha 散乱 $e^-e^+ \to e^-e^+$			$\dfrac{s^2+u^2}{t^2}$	$+\dfrac{2u^2}{ts}$	$+\dfrac{u^2+t^2}{s^2}$
$e^-\mu^- \to e^-\mu^-$			$\dfrac{s^2+u^2}{t^2}$		
↓ ($s \leftrightarrow t$ 交叉) $e^-e^+ \to \mu^-\mu^+$					$\dfrac{u^2+t^2}{s^2}$

Z ボソンの質量値 M_Z に近づくと，その効果がしだいに大きくなる。表 6-1 からわかるように，Bhabha 散乱に比べ $e^-e^+ \to \mu^-\mu^+$ を調べるほうが望ましい。というのは，Bhabha 散乱では，Z の効果は t チャネル光子交換の影響をかぶるからである。詳細は 13.6 節で議論する。

6.8 実験室系における $e^-\mu^- \to e^-\mu^-$：パートン模型に適した運動学

フェルミオンの散乱から話題を変える前に，実験室系，つまり始状態の μ が静止している系を導入しておくと便利である。この結果を第 8 章およびそれ以後において，ハドロンの構造を調べるとき，電子・クォーク散乱にそのまま応用することができる。

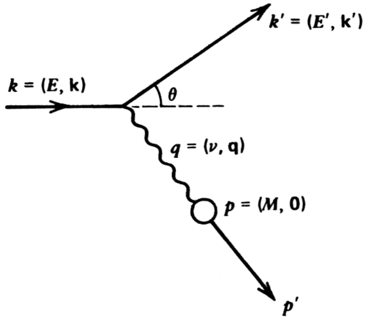


図 6·10 実験室系における反応過程 $e^-\mu^- \to e^-\mu^-$.

$e^-(k)+\mu^-(p) \to e^-(k')+\mu^-(p')$ に対する "厳密" な表式 (6.27) にもどり，電子の質量 m を含む項だけは無視する：

$$\overline{|\mathcal{M}|^2} = \frac{8e^4}{q^4}[(k'\cdot p')(k\cdot p)+(k'\cdot p)(k\cdot p')-M^2 k'\cdot k]$$
$$= \frac{8e^4}{q^4}\left[-\frac{1}{2}q^2(k\cdot p - k'\cdot p)+2(k'\cdot p)(k\cdot p)+\frac{1}{2}M^2 q^2\right]. \qquad (6.42)$$

ここで $q=k-k'$ であり，2 行目の表式を得るために，$p'=k-k'+p$, $k^2=k'^2\simeq 0$, $q^2\simeq -2k\cdot k'$ を用いた。実験室系，すなわち，はじめにミューオンが静止している系 $p=(M,\mathbf{0})$ で断面積を評価したい。この系における粒子の運動量を，図 6·10 に示す。

(6.42) を実験室系で評価すると，次のようになる：

$$\overline{|\mathcal{M}|^2} = \frac{8e^4}{q^4}\left\{-\frac{1}{2}q^2 M(E-E')+2EE'M^2+\frac{1}{2}M^2q^2\right\}$$
$$= \frac{8e^4}{q^4}2M^2E'E\left\{1+\frac{q^2}{4EE'}-\frac{q^2}{2M^2}\frac{M(E-E')}{2EE'}\right\}$$
$$= \frac{8e^4}{q^4}2M^2E'E\left\{\cos^2\frac{\theta}{2}-\frac{q^2}{2M^2}\sin^2\frac{\theta}{2}\right\}. \qquad (6.43)$$

最後の行を計算するのに，次の運動学的関係を用いた：

$$q^2 \simeq -2k\cdot k' \simeq -2EE'(1-\cos\theta) = -4EE'\sin^2\frac{\theta}{2}. \qquad (6.44)$$

$q+p=p'$ を 2 乗すると，

$$q^2 = -2p\cdot q = -2\nu M \quad \text{すなわち} \quad \nu \equiv E-E' = -\frac{q^2}{2M} \qquad (6.45)$$

を得る。$e^-\mu^- \to e^-\mu^-$ の断面積を計算するためには，(4.27) を用いる：

$$d\sigma = \frac{1}{(2E)(2M)}\frac{\overline{|\mathcal{M}|^2}}{4\pi^2}\frac{d^3k'}{2E'}\frac{d^3p'}{2p_0'}\delta^{(4)}(p+k-p'-k')$$

$$= \frac{1}{4ME}\frac{\overline{|\mathcal{M}|^2}}{4\pi^2}\frac{1}{2}E'\,dE'\,d\Omega\frac{d^3p'}{2p_0'}\delta^{(4)}(p+q-p'). \qquad (6.46)$$

フラックスは，ビームと標的の密度の積 $(2E)(2M)$ に，電子の質量を無視する極限では 1 (光速) になる相対速度をかけたものである。

問題 6.7 次の関係を確かめよ。

$$\int\frac{d^3p'}{2p_0'}\delta^{(4)}(p+q-p') = \int d^3p'\,dp_0'\,\delta^{(4)}(p+q-p')\,\theta(p_0')\,\delta(p'^2-M^2)$$

$$= \frac{1}{2M}\delta\left(\nu+\frac{q^2}{2M}\right) \qquad (6.47)$$

$$= \frac{1}{2MA}\delta(E'-E/A). \qquad (6.48)$$

ここで，$A=1+(2E/M)\sin^2\theta$ であり，階段関数 $\theta(x)$ は $x>0$ のとき 1，それ以外のときは 0 である。

(6.43) を (6.46) に代入し，(6.47) を用いると次式を得る：

$$\frac{d\sigma}{dE'\alpha\Omega} = \frac{(2\alpha E')^2}{q^4}\left\{\cos^2\frac{\theta}{2}-\frac{q^2}{2M^2}\sin^2\frac{\theta}{2}\right\}\delta\left(\nu+\frac{q^2}{2M}\right). \qquad (6.49)$$

(6.48) を用い dE' について積分し，q^2 を (6.44) で置き換えると，実験室系における $e^-\mu^-$ 散乱の微分断面積に対する次の公式に到達する：

$$\boxed{\left.\frac{d\sigma}{d\Omega}\right|_{\text{Lab.}} = \left(\frac{\alpha^2}{4E^2\sin^4(\theta/2)}\right)\frac{E'}{E}\left\{\cos^2\frac{\theta}{2}-\frac{q^2}{2M^2}\sin^2\frac{\theta}{2}\right\}.} \qquad (6.50)$$

標的の内部構造を明らかにするための有力な手法は，高エネルギーの電子ビームをぶつけ，散乱電子の角分布とエネルギーを観測することである。このような実験は，物質の構造を理解する上で，幾度となく重要な進歩をうながしてきた。第 8 章から，この方法が陽子の構造をどのようにして解明してきたかを述べる。その際，(6.50) が中心的な役割を果たす。

問題 6.8 無偏極電子とスピンのない点状粒子の弾性散乱の断面積は

$$\left.\frac{d\sigma}{d\Omega}\right|_{\text{Lab.}} = \left(\frac{\alpha^2}{4E^2\sin^4(\theta/2)}\right)\frac{E'}{E}\cos^2\frac{\theta}{2} \qquad (6.51)$$

となることを示せ。ここでもこれまでと同じように，電子の質量は無視する。$L_{\mu\nu}^{\text{muon}}$ を $(p+p')_\mu(p+p')_\nu$ で置き換えた上で，(6.18) が使えることを確かめよ。この断面積を $e^-\mu^- \to e^-\mu^-$ と比較すると，(6.50) に現れる $\sin^2(\theta/2)$ はミューオンの磁気モーメントからの散乱によることがわかる。

6.9 光子，偏極ベクトル

すでに，カレント密度 j が存在するとき，電磁場 A_μ は

$$\Box^2 A^\mu = j^\mu \tag{6.52}$$

を満たすことを注意した。次の2つの問題から，この式がどのようにしてMaxwell方程式から導かれるかを思いおこそう。

問題 6.9 真空中における古典電磁気学のMaxwell方程式は

$$\begin{aligned} &\nabla\cdot\boldsymbol{E} = \rho, \qquad \nabla\times\boldsymbol{E} + \frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t} = 0 \\ &\nabla\cdot\boldsymbol{B} = 0, \qquad \nabla\times\boldsymbol{B} - \frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t} = \boldsymbol{j} \end{aligned} \tag{6.53}$$

で与えられる。(ここで，Heaviside-Lorentz有理単位を用いた。Aitchson and Heyの付録C参照)。これらの方程式は，A^μ に対する次の共変的方程式と同等であることを示せ：

$$\Box^2 A^\mu - \partial^\mu(\partial_\nu A^\nu) = j^\mu. \tag{6.54}$$

ここで $j^\mu = (\rho, \boldsymbol{j})$ である。4元ベクトルポテンシャル $A^\mu = (\phi, \boldsymbol{A})$ は，電場および磁場と次の関係にある：

$$\boldsymbol{E} = -\frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial t} - \nabla\phi, \qquad \boldsymbol{B} = \nabla\times\boldsymbol{A}. \tag{6.55}$$

さらに，場の強さの反対称テンソル

$$F^{\mu\nu} \equiv \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu \tag{6.56}$$

によって，Maxwell方程式は簡単な形

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = j^\nu \tag{6.57}$$

で表されること，電流の保存 $\partial_\nu j^\nu = 0$ は，自然な整合性条件として出てくることを示せ。[$\nabla\times(\nabla\times\boldsymbol{A}) = -\nabla^2\boldsymbol{A} + \nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{A})$ に注意する。]

問題 6.10 (6.55) において $\boldsymbol{E}$ と $\boldsymbol{B}$ はゲージ変換

$$A_\mu \longrightarrow A_\mu{}' = A_\mu + \partial_\mu \chi \tag{6.58}$$

によって変化しないことを示せ。ただし，χ は x の任意の関数。この自由度を用いてMaxwell方程式を次の形に書け：

$$\Box^2 A^\mu = j^\mu. \quad (\text{ただし } \partial_\mu A^\mu = 0) \tag{6.59}$$

$\partial_\mu A^\mu = 0$ が成立しなければならないが，これはLorentz条件として知られている。しかし，この条件を課してもなお，A^μ の選択には自由度が残っている。つまり，別のゲージ変換

$$A_\mu \longrightarrow A_\mu{}' = A_\mu + \partial_\mu \Lambda \tag{6.60}$$

が可能なのである。Λ は

$$\Box^2 \Lambda = 0 \tag{6.61}$$

を満たす任意の関数である。この式は Lorentz 条件が満たされていることを保障している。ここで古典論から量子力学へ移ると，自由光子に対する波動関数 A^μ は，次の式

$$\Box^2 A^\mu = 0 \tag{6.62}$$

を満たすことがわかる。その解は

$$A^\mu = \varepsilon^\mu(\boldsymbol{q}) e^{-iq\cdot x} \tag{6.63}$$

である。4 元ベクトル ε^μ は，光子の偏極ベクトルとよばれる。(6.63) を (6.62) に代入すると，光子の 4 元運動量 q は

$$q^2 = 0 \quad \text{すなわち} \quad m_\gamma = 0 \tag{6.64}$$

を満足することがわかる。偏極ベクトルは 4 つの成分を持ち，しかもスピン 1 粒子を記述する。どうして，そういえるのだろうか。まず，Lorentz 条件 $\partial_\mu A^\mu = 0$ は，

$$q_\mu \varepsilon^\mu = 0 \tag{6.65}$$

を与える。このことから ε^μ の独立な成分の数は 3 つになる。さらに，余分なゲージ自由度 (6.60) から得られる結論を調べなければならない。a を定数としてゲージパラメターを

$$\Lambda = iae^{-iq\cdot x}$$

のように選ぶと，上式は (6.61) を満たす。これを (6.60) に代入し，(6.63) を用いると，

$$\varepsilon_\mu \longrightarrow \varepsilon_\mu{}' = \varepsilon_\mu + aq_\mu \tag{6.66}$$

の置き換えによって，物理的結果は変わらないことが示される。いいかえれば，q_μ の倍数だけ違っている 2 つの偏極ベクトル $(\varepsilon_\mu, \varepsilon_\mu{}')$ は，同じ光子を記述する。この自由度を用いると，ε^μ の時間成分が消えること，すなわち $\varepsilon^0 \equiv 0$ が保障される。この結果，Lorentz 条件は

$$\boldsymbol{\varepsilon}\cdot\boldsymbol{q} = 0 \tag{6.67}$$

となる。このような (非共変的な) ゲージの選択は，Coulomb ゲージとして知られている。

(6.67) から，独立な偏極ベクトルは 2 つだけであり，それぞれが光子の 3 元運動量に対して直角であることがわかる。たとえば z 軸に沿って進む光子の場合，2 つの偏極ベクトルを，

$$\boldsymbol{\varepsilon}_1 = (1, 0, 0), \qquad \boldsymbol{\varepsilon}_2 = (0, 1, 0) \tag{6.68}$$

ととることができる。つまり，自由光子は，その運動量 q と偏極ベクトル $\boldsymbol{\varepsilon}_i$ に

よって記述される。$\boldsymbol{\varepsilon}_i$ はベクトルとして変換するので，スピン1粒子に関係するものと予想される。

問題 6.11 z 軸のまわりの回転 θ に対して，線形結合

$$\varepsilon_{\mathrm{R}}=-\sqrt{\frac{1}{2}}(\varepsilon_1+i\varepsilon_2),\qquad \varepsilon_{\mathrm{L}}=\sqrt{\frac{1}{2}}(\varepsilon_1-i\varepsilon_2) \tag{6.69}$$

の変換性を決定せよ。また，ε_{R} と ε_{L} はそれぞれ，ヘリシティー$+1$ と -1 の光子を記述することを示せ。$\varepsilon_{\mathrm{R,L}}$ は円偏光と呼ばれる。

問題 6.12 完全性の関係は（横ゲージで）

$$\sum_{\lambda=\mathrm{R,L}}(\varepsilon_\lambda)_i{}^*(\varepsilon_\lambda)_j\equiv\delta_{ij}-\hat{q}_i\hat{q}_j \tag{6.70}$$

となることを示せ。

かりに $\boldsymbol{\varepsilon}$ が $\boldsymbol{q}$ の方向を向いているならば，それはヘリシティー0の光子に関係しているだろう。この状態は，横向き条件 $\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{\varepsilon}=0$ のために現れないが，それは単に光子が質量を持たないからである。6.13節では光子の偏極ベクトルについて，もう一度詳しい議論をしよう。

6.10 伝播関数についての補足：電子伝播関数

ここで，伝播関数について前にやった議論をもっと進めて，電子に対する伝播関数を導入しよう。まず，遷移振幅の非相対論的摂動展開を思い出すと((3.44),(4.48) 参照)：

$$T_{fi}=-i2\pi\delta(E_f-E_i)\left(\langle f|V|i\rangle+\sum_{n\neq i}\langle f|V|n\rangle\frac{1}{E_i-E_n}\langle n|V|i\rangle+\cdots\right) \tag{6.71}$$

であり，バーテックスに因子 $\langle f|V|n\rangle$ を与え，$1/(E_i-E_n)$ を伝播関数と同定した（図3・4と4.8節参照)。状態ベクトルは，相互作用 V がないときは，ハミルトニアン H_0 の固有状態である((3.29) 参照)：

$$H_0|n\rangle=E_n|n\rangle.$$

したがって形式的に，(6.71) を

$$T_{fi}=2\pi\delta(E_f-E_i)\left\langle f\left|(-iV)+(-iV)\frac{i}{E_i-H_0}(-iV)+\cdots\right|i\right\rangle \tag{6.72}$$

のように書きかえることができる。ここで，完全関係 $\sum|n><n|=1$ を用いた ($E_n=E$ における特異性を扱う処法は，6.16 節で議論する)。摂動パラメターとして，V ではなく $-iV$ を用いるほうが自然である ($-i$ は $i\partial\psi/\partial t=V\psi$ から生じた)。これから相互作用表示における時間依存性 $\exp(-iVt)$ が現れる。すなわち，バーテックス因子は iV である。したがって伝播関数は，中間状態に作用する Schrödinger 演算子

$$-i(E_i-H_0)\psi=-iV\psi \tag{6.73}$$

の逆に i をかけたものとみなすことができる。

同じ手法を，種々の相対論的波動方程式に適用し，対応する粒子の伝播関数の形を導こう。

スピンを持たない粒子の伝播関数

(6.73) に対応する Klein-Gordon 方程式の形は，

$$i(\square^2+m^2)\phi=-iV\phi \tag{6.74}$$

である ((4.3) 参照)。(6.72) の相対論的な一般化を指針とすれば，スピンのない粒子の伝播関数は，(6.74) の左辺にある逆演算子と考えることができる。これは，運動量 p の中間状態に対して，

$$\frac{1}{i(-p^2+m^2)}=\boxed{\frac{i}{p^2-m^2}} \tag{6.75}$$

となる。事実，伝播関数の相対論的一般化として，この形がどのようにして得られたかはすでに議論した。

電子伝播関数

電磁場内の 1 個の電子は

$$(\not{p}-m)\psi=-e\gamma^\mu A_\mu\psi \tag{6.76}$$

を満たす ((6.2),(6.3) 参照)。前と同じように，$-i$ をかけて，バーテックス因子は $ie\gamma^\mu$ である。つまり電子伝播関数は，(6.76) の左辺の $-i$ 倍の逆である：

$$\frac{1}{-i(\not{p}-m)}=\frac{i}{\not{p}-m}=\boxed{\frac{i(\not{p}+m)}{p^2-m^2}}=\frac{i\sum_s u\bar{u}}{p^2-m^2}. \tag{6.77}$$

ここで，$\not{p}\not{p}=p^2$ および完全関係 (5.47) を用いた。分子は，仮想電子のスピン状態についての和を含む。6.16 節でもっと進んだ議論をしよう。

以上をまとめると，仮想粒子の伝播関数の一般的な形は

$$\frac{i\sum_{\text{spins}}}{p^2-m^2}$$

で与えられる。スピンについての和は完全関係を表し，伝播粒子のすべての可能なスピン状態が取り込まれている。また異なる運動量で伝播する状態についても積分することになる。これまで考えてきた Feynman 図では，この運動量は，外線で表される粒子の運動量によって決まっている。

6.16 節では，$p^2=m^2$ における特異点を扱う処法を議論する。

6.11　光子伝播関数

光子の伝播関数は，A^μ の選択に自由度があるので一義的ではない。物理的結果は，変換

$$A^\mu \longrightarrow A^\mu+\partial^\mu\chi$$

によって変わらない。第 14 章でも説明するが，この変換は，荷電粒子の波動関数の位相変換すなわち“ゲージ”変換に対して，QED が不変であることと関係している。

(6.54) からわかるように，光子の波動方程式は，

$$(g^{\nu\lambda}\square^2-\partial^\nu\partial^\lambda)A_\lambda=j^\nu \tag{6.78}$$

の形に書くことができる。事実，A_λ が持つゲージ自由度のいくつかを取り除いたときはじめて，光子の伝播関数が存在できる (問題 6.13 参照)。

問題 6.13　(6.78) の“運動量空間演算子”の逆は存在しないことを確かめよ。

ヒント　この逆演算子を，Lorentz 共変性を満足するもっとも一般的な形

$$Aq^2g_{\mu\nu}+Bq_\mu q_\nu \tag{6.79}$$

で表す。ここで，A,B は q^2 の関数である。

これまでの議論では，$\partial_\lambda A^\lambda=0$ が成り立つような Lorentz ゲージを採用してきた。波動方程式 (6.78) はしたがって，次のように簡略になる。

$$g^{\mu\lambda}\square^2A_\lambda=j^\mu. \tag{6.80}$$

ここで，$\lambda=\mu$ のとき 1，それ以外のときは 0 となるような $\delta_\mu{}^\lambda$ を導入すると，

$$g_{\mu\nu}g^{\nu\lambda}=\delta_\mu{}^\lambda \tag{6.81}$$

が成り立つので，伝播関数 (運動量空間演算子を $-i$ 倍して逆をとる) は

$$\boxed{i\frac{-g_{\mu\nu}}{q^2}} \tag{6.82}$$

となる。6.10 節の議論は，$g_{\mu\nu}$ が仮想光子の偏極ベクトルの和に関係すべきことを示している。この問題は 6.13 節で扱う。ゲージ条件 $\partial_\lambda A^\lambda=0$ は共変的な形

で与えられている。この結果，得られる共変的伝播関数 (6.82) は，QED の計算にとって理想的だ。これが Feynman 伝播関数であり，Feynman ゲージで計算するということである。たしかにこれは，これまで用いてきた光子伝播関数であり，すでに Feynman 則の表に含まれている (6.17 節参照)。

問題 6.14　条件 $\partial^\lambda A_\lambda=0$ だけでは伝播関数を完全に定義することはできない。波動方程式 (6.78) を

$$\left[g^{\nu\lambda}\Box^2-\left(1-\frac{1}{\xi}\right)\partial^\nu\partial^\lambda\right]A_\lambda=j^\nu \tag{6.83}$$

と書きかえてもかまわない。この場合，(6.79) を用いて，伝播関数は

$$\frac{i}{q^2}\left(-g_{\mu\nu}+(1-\xi)\frac{q_\mu q_\nu}{q^2}\right) \tag{6.84}$$

となることを示せ。Feynman ゲージでは $\xi=1$ である。しかしどのような場合でも，伝播関数の中の余分の項は，仮想光子が $q_\mu j^\mu=q_\nu j^\nu=0$ を満たす保存カレントに結合する QED の計算では消えてしまう。

6.12　質量を持つベクトル粒子

$W^\pm, Z^0$ などの質量を持つベクトル (スピン 1) 粒子は，弱い相互作用の中で重要な役割を果たす (第 12 章以後を参照)。質量 M, スピン 1 の粒子に対する波動方程式は，光子の波動方程式を $\Box^2\to\Box^2+M^2$ と置き換えることによって得られる。(3.19) の Klein-Gordon 演算子を思い出すと，(6.78) から自由粒子の波動関数 B_λ は

$$(g^{\nu\lambda}(\Box^2+M^2)-\partial^\nu\partial^\lambda)B_\lambda=0 \tag{6.85}$$

を満たすことがわかる。前とまったく同様に，運動量空間における逆演算子を決定するのに，

$$(g^{\nu\lambda}(-p^2+M^2)+p^\nu p^\lambda)^{-1}=\delta_\lambda{}^\mu(Ag_{\mu\nu}+Bp_\mu p_\nu) \tag{6.86}$$

を解いて A, B を求める。伝播関数は，(6.86) の右辺の括弧内の量に i をかけたもので，

$$\boxed{\frac{i(-g^{\mu\nu}+p^\mu p^\nu/M^2)}{p^2-M^2}} \tag{6.87}$$

となることがわかる。質量殻上 $p^2=M^2$ の場合，分子は質量を持つ粒子の 3 つのスピン状態についての和であることが示される。それにはまず，(6.85) の発散 ∂_ν をとる。すると 2 つの項が打ち消し合い，

$$M^2\partial^\lambda B_\lambda=0 \quad \text{すなわち} \quad \partial^\lambda B_\lambda=0 \tag{6.88}$$

となることがわかる。つまり，質量を持つベクトル粒子に対して，$\partial^\lambda B_\lambda=0$ が唯一の選択である。これはゲージ条件ではない。この結果，波動方程式は

$$(\Box^2+M^2)B_\mu=0 \tag{6.89}$$

となり，自由粒子の解

$$B_\mu=\varepsilon_\mu e^{-ip\cdot x} \tag{6.90}$$

を持つ。条件 (6.88) によれば

$$p^\mu\varepsilon_\mu=0 \tag{6.91}$$

でなければならない。したがって，共変的な取り扱いでは，独立な偏極ベクトルは 4 つから 3 つに減少する。

問題 6.15　質量 M，エネルギー E，z 軸方向の運動量 $\boldsymbol{p}$ を持つベクトル粒子に対して，ヘリシティー λ の状態は，次の偏極ベクトルによって記述できることを示せ。

$$\begin{aligned}\varepsilon^{(\lambda=\pm1)}&=\mp(0,\ 1,\ \pm i,\ 0)/\sqrt{2},\\ \varepsilon^{(\lambda=0)}&=(|\boldsymbol{p}|,\ 0,\ 0,\ E)/M.\end{aligned} \tag{6.92}$$

問題 6.16　完全性の関係は

$$\sum_\lambda \varepsilon_\mu{}^{(\lambda)*}\varepsilon_\nu{}^{(\lambda)}=-g_{\mu\nu}+\frac{p_\mu p_\nu}{M^2} \tag{6.93}$$

となることを示せ。ここで和は，質量を持つベクトル粒子の 3 つの偏極状態についてとる。

6.13　実光子と仮想光子

実光子について，偏極状態は 2 つしかないことをみた。実際 6.9 節では，$\varepsilon_0{}^{(\lambda)}\equiv0$ および $\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{\varepsilon}^{(\lambda)}=0$ と選べることがわかった。その結果，横偏極状態のみが残る。これらの偏極ベクトルに対する完全関係は

$$\sum_{T=\mathrm{R,L}}\varepsilon_i{}^{T*}\varepsilon_j{}^T=\delta_{ij}-\hat{q}_i\hat{q}_j \tag{6.94}$$

であった。ここで T は横方向を表す ((6.70) 参照)。

一方，仮想光子に共変的伝播関数 $i(-g_{\mu\nu})/q^2$ を対応させた。$-g_{\mu\nu}$ は，4 つの偏極状態について加えた結果を意味する。それは，完全関係を次のように書くとはっきりする。

$$\begin{aligned}-g_{\mu\nu}&=\sum_{\lambda=1}^{4}\varepsilon_\mu{}^{(\lambda)*}\varepsilon_\nu{}^{(\lambda)}=\sum_T\varepsilon_\mu{}^{T*}\varepsilon_\nu{}^T+\varepsilon_\mu{}^{L*}\varepsilon_\nu{}^L+\varepsilon_\mu{}^{S*}\varepsilon_\nu{}^S\\ &=\underbrace{(\delta_{ij}-\hat{q}_i\hat{q}_j)}_{\text{横成分}}+\underbrace{\hat{q}_i\hat{q}_j}_{\text{縦成分}}+\underbrace{(-g_{\mu0}g_{\nu0})}_{\text{スカラー}}.\end{aligned} \tag{6.95}$$

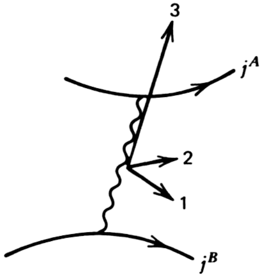


図 6・11 2 つの荷電粒子 A, B 間に交換される仮想光子

ところで，ある意味ですべての光子は仮想的であり，放出された光子はいずれは吸収されるのだ。上記の 2 つの記述 (実光子と仮想光子) を，どのようにして矛盾なく理解することができるだろうか。

2 つの荷電粒子間に交換される仮想光子を含むような典型的な Feynman 図 (図 6・11) をみてみよう。たとえば図 6・2 に対して，遷移振幅は次のような形であった ((6.8) を導くときの議論を参照)：

$$T_{fi}=-i\int j_\mu{}^A(x)\left(\frac{-g^{\mu\nu}}{q^2}\right)j_\nu{}^B(x)\,d^4x$$
$$=-i\int\Bigg(\underbrace{\frac{j_1{}^Aj_1{}^B+j_2{}^Aj_2{}^B}{q^2}}_{\text{横成分}}+\underbrace{\frac{j_3{}^Aj_3{}^B-j_0{}^Aj_0{}^B}{q^2}}_{\text{縦成分/スカラー}}\Bigg)d^4x. \qquad (6.96)$$

ここで，光子の 4 元運動量を $q^\mu=(q^0,0,0,|\boldsymbol{q}|)$ のようにとった。すなわち，第 3 軸は $\hat{\boldsymbol{q}}$ に沿うように選んだ。電荷の保存から，連続の方程式 $\partial^\mu j_\mu=0$ が得られるが，これは，A, B 両方のカレントに対して，

$$q^\mu j_\mu=q^0j_0-|\boldsymbol{q}|j_3=0 \qquad (6.97)$$

を意味する。つまり，もし交換される光子がほとんど実光子 $q^0\approx|\boldsymbol{q}|$ とみなせるなら $j_3\approx j_0$ であり，縦成分とスカラーの寄与が互いに打ち消し合い，2 つの横成分の寄与だけが残る。したがって，実光子に対して

$$\sum_T\varepsilon_\mu{}^{T*}\varepsilon_\nu{}^T\longrightarrow-g_{\mu\nu} \qquad (6.98)$$

の置き換えができる。他方，仮想光子の場合には，縦およびスカラー成分は無視できない。事実，それらは重要な役割を果たす。(6.97) を用いて，$j_3{}^A, j_3{}^B$ を (6.96) に代入すると，

$$T_{fi}=-i\int\left(\frac{j_1{}^Aj_1{}^B+j_2{}^Aj_2{}^B}{q^2}+\frac{j_0{}^Aj_0{}^B}{|\boldsymbol{q}|^2}\right)d^4x \qquad (6.99)$$

となることがわかる。第 1 項は，横偏極状態にある仮想光子の伝播を表す。こ

れに対して，第 2 項は $|\boldsymbol{q}|^2$ が分母にあるから，伝播には関係がない。そのかわり，それは 2 つの粒子の電荷，$j_0{}^A$ および $j_0{}^B$ の間の瞬間的 Coulomb 相互作用を表す。このことは，(6.99) の第 2 項を次のように書くとはっきりする：

$$T_{fi}{}^{\mathrm{Coul}} = -i\int dt\int d^3x_1\int d^3x_2 \frac{j_0{}^A(t,\ \boldsymbol{x}_1)\,j_0{}^B(t,\ \boldsymbol{x}_2)}{4\pi|\boldsymbol{x}_2-\boldsymbol{x}_1|}. \tag{6.100}$$

ただし，電荷は時間の遅れがなく，時刻 t で相互作用すると考える。

問題 6.17 Fourier 変換

$$\frac{1}{|\boldsymbol{q}|^2} = \int d^3x e^{i\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{x}} \frac{1}{4\pi|\boldsymbol{x}|} \tag{6.101}$$

を用いて，(6.100) を確かめよ。

最後に (6.95) を調べると，$-g^{\mu\nu}/q^2$ を横方向の伝播と縦方向あるいはスカラーの静的な寄与に分離するのは，Lorentz 共変的な手続きではないことがわかる。両者を加えてはじめて，共変的な光子の伝播関数になる。

6.14 Compton 散乱：$\gamma \mathrm{e}^- \to \gamma \mathrm{e}^-$

Compton 散乱は役に立つ例なので詳しく調べておこう。Feynman 図が電子の伝播関数と外線光子を含むばかりでなく，第 10 章で QCD を展開する際に，類似の過程 $\gamma^*\mathrm{q}\to\mathrm{gq}$ (クォーク q とグルーオン g を含む) に対する振幅の形が必要となるからである。

2 つの (最低次の) Feynman 図を図 6·12 に示す。振幅の計算に必要な因子を左図に詳しく示したが，順を追ってそれを説明していこう。入射光子に対して，

$$A_\mu = \varepsilon_\mu e^{-ik\cdot x}$$

と書く。ε_μ は 2 つの横偏極ベクトルのうちの 1 つである。(6.4) を参照すると，

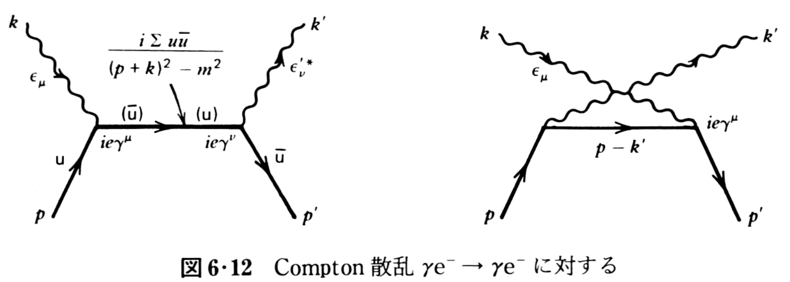


図 6·12 Compton 散乱 $\gamma\mathrm{e}^- \to \gamma\mathrm{e}^-$ に対する Feynman 図

$e^{ik\cdot x}$ は x の積分で処理され，バーテックスでの運動量保存が出てくることがわかる。したがって，本章の最後にある Feynman 則の表に，入射光子に対する因子 ε_μ だけを含める。同様に出ていく光子 $(\varepsilon_\nu' e^{-ik'\cdot x})^*$ に対して，因子 $\varepsilon_\nu'^*$ を対応させる。ここで，次の点に注意する。図 6·1 (b) と同じように，電子-光子バーテックスの構造は，

$$(\bar{u}\gamma^\mu u)\varepsilon_\mu \tag{6.102}$$

となるが，ここでは $\bar{u}$ はすでに電子の伝播関数中に取り込まれている。一方，電子散乱のバーテックスを考えると，ε_μ は光子の伝播関数に取り込まれていることになる。

Feynman 則を用いて，2 つの Feynman 図に対して，次の振幅を得る：

$$-i\mathcal{M}_1 = \bar{u}^{(s')}(p')\left[\varepsilon_\nu'^*(ie\gamma^\nu)\frac{i(\not{p}+\not{k}+m)}{(p+k)^2-m^2}(ie\gamma^\mu)\varepsilon_\mu\right]u^{(s)}(p), \tag{6.103}$$

$$-i\mathcal{M}_2 = \bar{u}^{(s')}(p')\left[\varepsilon_\mu(ie\gamma^\mu)\frac{i(\not{p}-\not{k}'+m)}{(p-k')^2-m^2}(ie\gamma^\nu)\varepsilon_\nu'^*\right]u^{(s)}(p). \tag{6.104}$$

p, s と p', s' は，入ってくる電子と出ていく電子の運動量とスピン状態である。同じように k, ε と k', ε' は，入ってくる光子と出ていく光子の運動量と偏極ベクトルを表す。Compton 散乱の不変振幅 $(\mathcal{M}_1+\mathcal{M}_2)$ は，2 つの光子の交換（または交叉）

$$k, \varepsilon \leftrightarrow -k', \varepsilon'^* \tag{6.105}$$

に対して対称である。これは交叉対称のもう 1 つの例である。

ゲージ不変性は，Compton 散乱にどんな条件を課すのだろうか。もし Lorentz 条件 $\partial_\mu A^\mu=0$ を課すと，物理的結果は

$$\varepsilon_\mu \longrightarrow \varepsilon_\mu + ak_\mu \tag{6.106}$$

に対して不変となることがわかる。ここで，ε_μ, k_μ は光子の偏極ベクトルと運動量，a は任意の定数である ((6.66) 参照)。もし Compton 散乱の振幅を

$$\mathcal{M} = \varepsilon_\nu'^* \varepsilon_\mu T^{\mu\nu} \tag{6.107}$$

のように書くならば，$\mathcal{M}$ は $\varepsilon_\mu \to \varepsilon_\mu + ak_\mu$ あるいは $\varepsilon_\nu' \to \varepsilon_\nu + ak_\nu'$ の置き換えによって変わらない。つまり，ゲージ不変性から

$$k_\mu T^{\nu\mu} = k_\nu' T^{\nu\mu} = 0 \tag{6.108}$$

が要請される。

問題 6.18 振幅 $\mathcal{M}_1$ と $\mathcal{M}_2$ は別々にはゲージ不変にならないが，その和は，(6.108) を満たすことを示せ。

Compton 散乱の振幅の計算を詳しく実行してみることは有益である。簡単のために，電子の質量を無視する。したがって，$\gamma(k)+\mathrm{e}(p)\to\gamma(k')+\mathrm{e}(p')$ に対する不変変数は，

$$
\begin{aligned}
s&=(k+p)^2=2k\cdot p=2k'\cdot p',\\
t&=(k-k')^2=-2k\cdot k'=-2p\cdot p',\\
u&=(k-p')^2=-2k\cdot p'=-2p\cdot k'
\end{aligned}
\tag{6.109}
$$

である。2 つの不変振幅 (6.103) と (6.104) は，

$$
\begin{aligned}
\mathcal{M}_1&=\varepsilon_\nu'^*\varepsilon_\mu e^2\bar{u}(p')\gamma^\nu(\not p+\not k)\gamma^\mu u(p)/s,\\
\mathcal{M}_2&=\varepsilon_\nu'^*\varepsilon_\mu e^2\bar{u}(p')\gamma^\mu(\not p-\not k')\gamma^\nu u(p)/u
\end{aligned}
\tag{6.110}
$$

である。無偏極断面積を求めるために，電子と光子のスピンに対して，始状態と終状態につき，それぞれ $|\mathcal{M}_1+\mathcal{M}_2|^2$ の平均および和をとらなければならない。幸いこれは，みかけほど難しくはない。物理的な光子に対して，(6.98) を適用し，

$$
\sum_T \varepsilon_\mu{}^{T*}\varepsilon_{\mu'}{}^T\longrightarrow -g_{\mu\mu'}
\tag{6.111}
$$

の置き換えをすることができる。ここで T は横成分を表す。出ていく光子の状態 ε' に対しても，同じような完全関係が成り立つ。したがって，

$$
\overline{|\mathcal{M}_1|^2}=\frac{e^4}{4s^2}\sum_{s,s'}(\bar{u}^{(s')}\gamma^\nu(\not p+\not k)\gamma^\mu u^{(s)})(\bar{u}^{(s)}\gamma_\mu(\not p+\not k)\gamma_\nu u^{(s')}).
$$

因子 1/4 は始状態の電子スピンと光子の偏極について平均したためである。スピノールの完全関係 (5.47) によって，$u\bar{u}$ 状態について和をとることができる (6.3 節の $\mathrm{e}^-\mu^-$ 散乱とまったく同様である)。すなわち

$$
\begin{aligned}
\overline{|\mathcal{M}_1|^2}&=\frac{e^4}{4s^2}\mathrm{Tr}(\underbrace{\not p'\gamma^\nu}_{-2\not p'}(\not p+\not k)\underbrace{\gamma^\mu\not p\gamma_\mu}_{-2\not p}(\not p+\not k)\gamma_\nu)\\
&\equiv\frac{e^4}{s^2}\mathrm{Tr}(\not p'\not k\not p\not k)\\
&=\frac{4e^4}{s^2}2(p'\cdot k)(p\cdot k)\\
&=2e^4\left(-\frac{u}{s}\right).
\end{aligned}
\tag{6.112}
$$

ここで，(6.24) と (6.22) を用いた。同じように

$$
\begin{aligned}
\overline{|\mathcal{M}_2|^2}&=2e^4\left(-\frac{s}{u}\right),\\
\overline{\mathcal{M}_1\mathcal{M}_2^*}&=0
\end{aligned}
$$

を得る。したがって，スピン平均した Compton 振幅は

$$\overline{|\mathcal{M}|^2}=\overline{|\mathcal{M}_1+\mathcal{M}_2|^2}=2e^4\left(-\frac{u}{s}-\frac{s}{u}\right) \tag{6.113}$$

となる。

問題 6.19 入射仮想光子の質量を $k^2\equiv -Q^2$ として，上の計算をくり返せ。(6.111) を用い，$\gamma^* e^- \to \gamma e^-$ (γ^* は仮想光子) に対して，

$$\overline{|\mathcal{M}|^2}=2e^4\left(-\frac{u}{s}-\frac{s}{u}+\frac{2Q^2t}{su}\right) \tag{6.114}$$

を示せ。この結果は第 10 章で用いる。

問題 6.20 電子の質量を考慮したとき，高エネルギー $s\to\infty$ において，Compton 散乱の全断面積は

$$\sigma=\frac{1}{64\pi^2 s}\int\overline{|\mathcal{M}|^2}\,d\Omega \longrightarrow \frac{2\pi\alpha^2}{s}\log\left(\frac{s}{m^2}\right) \tag{6.115}$$

となることを示せ。高エネルギーでは，主な寄与は $\mathcal{M}_2$ から生ずる。それは u チャネル電子がほとんど質量殻上にあるような，かすり衝突 (glancing collision) を通して起こる。

問題 6.21 粒子のヘリシティーを用いて，図 6・12 の第 1 の Feynman 図に対応する Compton 散乱は，重心系では，

$$\begin{aligned}\overline{|\mathcal{M}_1|^2}&\propto|d_{++}{}^{1/2}(\theta)|^2+|d_{--}{}^{1/2}(\theta)|^2\\&=1+\cos\theta\simeq-\frac{2u}{s}\end{aligned} \tag{6.116}$$

で与えられ，(6.112) と一致することを示せ。この種の計算例は 6.6 節で述べた。

6.15 対消滅：$e^+e^-\to\gamma\gamma$

問題 6.22 対消滅過程 $e^+(p_1, s_1)+e^-(p_2, s_2)\to\gamma(k_1, \varepsilon_1)+\gamma(k_2, \varepsilon_2)$ に対する最低次の Feynman 図を書け。また，答えを図 6・13 と比較せよ。次に Feynman 則を用いて，次式を示せ。

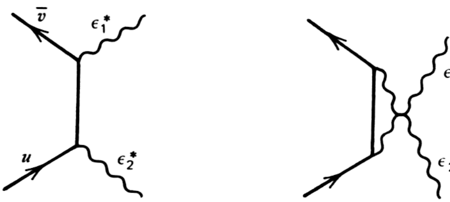


図 6・13 $e^+e^-\to\gamma\gamma$ に対する Feynman 図

$$-i\mathcal{M}=(ie)^2\bar{v}^{(s_1)}(p_1)\left(\not{\varepsilon}_1{}^*\frac{i}{\not{p}_1-\not{k}_1-m}\not{\varepsilon}_2{}^*+\not{\varepsilon}_2{}^*\frac{i}{\not{p}_1-\not{k}_2-m}\not{\varepsilon}_1{}^*\right)u^{(s_2)}(p_2). \tag{6.117}$$

高エネルギー極限では，スピン平均した反応率は

$$\overline{|\mathcal{M}|^2}=\frac{1}{2}e^4\left(\frac{u}{t}+\frac{t}{u}\right) \tag{6.118}$$

で与えられることを確かめよ。

$e^+e^-\to\gamma\gamma$ の断面積は，前方と後方にピークを持つ。それは，ほとんど質量殻上にある電子が，t, u チャネルで交換されることに対応する。(6.117) は Compton 散乱の振幅を交叉させて得られる。$\gamma e^-\to\gamma e^-$ から $e^+e^-\to\gamma\gamma$ へ移るには，単に入ってくる光子と出ていく電子を交叉させればよい。すなわち

$$k, \varepsilon\longrightarrow -k_2, \varepsilon_2{}^*$$

$$p'\longrightarrow -p_1 \quad \text{および} \quad \bar{u}^{(s')}(p')\longrightarrow \bar{v}^{(s_1)}(p_1).$$

始状態の電子と出ていく光子とは変わらない：

$$u^{(s)}(p)\equiv u^{(s_2)}(p_2), \qquad k', \varepsilon'^*\longrightarrow k_1, \varepsilon_1{}^*.$$

(6.103) と (6.104) においてこのような置き換えをすれば，対消滅振幅 (6.117) が得られる。

6.16 伝播関数に対する $i\varepsilon$ 処方

これまでに述べてきた量子電気力学の発見的なやり方は，Feynman による直観的な時空についての考え方に基づいている。われわれの第 1 の目的は，Feynman 則を導き，物理的な振幅を計算することであった。"伝播関数" という言葉を自由に使ってきたが，伝播関数の基礎にある理論についての詳しい議論はしなかった。ここでは，これまでに省略した点を再考してみよう。しかし，興味ある読者は，Feynman の原論文および Bjorken and Drell (1964) の中の伝播関数の理論の章をぜひ読まれたい。

Green 関数

伝播関数の理論は，非斉次微分方程式を解くための Green 関数の方法に基づいている。簡単な例によって，その方法を説明しよう。電荷分布 $\rho(\boldsymbol{x})$ に対して，Poisson 方程式

$$\nabla^2\phi(\boldsymbol{x})=-\rho(\boldsymbol{x}) \tag{6.119}$$

を，ある境界条件のもとで解きたい。まず "単位の源" の問題

$$\nabla^2 G=-\delta^{(3)}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}') \tag{6.120}$$

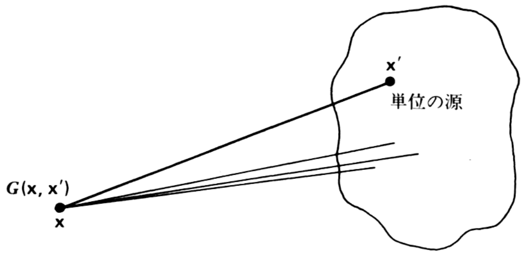


図 6·14　G は $\boldsymbol{x}'$ にある単位の源によって，$\boldsymbol{x}$ に作られるポテンシャル。すべての可能な電荷要素 $\rho d^3x'$ から位置 $\boldsymbol{x}$ に生ずるポテンシャルを求めるために，線型重ね合わせの定理を使っている。

を解くのが簡単である。ここで $G(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}')$ は，$\boldsymbol{x}'$にある単位の源が $\boldsymbol{x}$ に作るポテンシャルを表す（遠方で $G\to 0$ となる境界条件に対して，$G=1/4\pi\cdot|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|^{-1}$ を示すことは容易である）。それから，この源を電荷分布上で動かし，すべての可能な体積要素 d^3x' で積分して $\boldsymbol{x}$ における全ポテンシャルを求める（図 6·14 参照）：

$$\phi(\boldsymbol{x})=\int G(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}')\rho(\boldsymbol{x}')\,d^3x'. \tag{6.121}$$

(6.121) に ∇^2 を演算することにより，ϕ が (6.119) の求めるべき解であることを直接検証できる。

電子伝播関数 iS_F

例として電子の伝播関数を考え，電磁場の中の電子に対して，Green 関数の方法を用いて Dirac 方程式 (6.76) を解く：

$$(i\gamma_\mu\partial^\mu-m)\psi=-e\gamma_\mu A^\mu\psi. \tag{6.122}$$

すなわち，はじめに単位の源の問題

$$(i\gamma_\mu\partial^\mu-m)G_F=\delta^{(4)}(x-x') \tag{6.123}$$

を解く。G_F は x' にある単位の源が x に作る波を表す。ひとたび Green 関数 G_F がわかれば，(6.122) に対する解を作ることができる：

$$\psi(x)=-e\int d^4x'\,G_F(x, x')\gamma_\mu A^\mu(x')\psi(x'). \tag{6.124}$$

$\psi(x)$ は右辺にも現れていることに注意しよう。したがって，逐次代入によって e のべきによる摂動級数解が得られる。

並進不変性から，$G_F(x, x')$ は差 $(x-x')$ のみの関数である。(6.123) を解くために，まず運動量空間へ Fourier 変換する：

$$G_F(x-x')=\frac{1}{(2\pi)^4}\int S_F(p)\,e^{-ip\cdot(x-x')}d^4p. \tag{6.125}$$

(6.123) に代入して

$$\frac{1}{(2\pi)^4}\int(\not{p}-m)S_F(p)\,e^{-ip(x-x')}d^4p=\frac{1}{(2\pi)^4}\int e^{-ip(x-x')}d^4p$$

を得る。右辺は，δ 関数の Fourier 表示である。したがって，運動量空間では，(6.123) は簡単に

$$(\not{p}-m)S_F(p)=1$$

となる。すなわち

$$S_F(p)=\frac{1}{\not{p}-m}=\frac{\not{p}+m}{p^2-m^2}. \tag{6.126}$$

これまでは，6.10 節の導出を手のこんだ方法で導いたにすぎない。

S_F を完全に決めるため，

$$p^2-m^2=p_0{}^2-(\boldsymbol{p}^2+m^2)=(p_0-E)(p_0+E)=0$$

における特異性をどのように扱うかを知る必要がある。電子は質量殻上にないので，p_0 と $E=\sqrt{\boldsymbol{p}^2+m^2}$ は独立な変数である。$p_0=\pm E$ での極についての積分に対して正しい処方を得るため，適切な境界条件を $G_F(x-x')$ に課す必要がある。(6.125) と (6.126) から，

$$\begin{aligned}G_F(x-x')&=\frac{1}{(2\pi)^4}\int\frac{\not{p}+m}{(p_0-E)(p_0+E)}e^{-ip\cdot(x-x')}d^4p\\&=\frac{1}{(2\pi)^4}\int d^3p\,e^{i\boldsymbol{p}\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')}\int_{-\infty}^{+\infty}dp_0\frac{(\gamma_0p_0-\boldsymbol{\gamma}\cdot\boldsymbol{p}+m)}{(p_0-E)(p_0+E)}e^{-ip^0(t-t')}\end{aligned} \tag{6.127}$$

を作る。$G_F(x-x')$ は x' にある単位の源が x に作る波を表し，x' から x へ伝播する。時間の向き ($t>t'$) に進む正エネルギー電子，および時間と逆方向 ($t<t'$) に進む負エネルギー電子の伝播に関係する S_F を求める (3.5 節参照)。そのために，図 6･15 に示した複素 p_0 平面上の積分路に沿って，p_0 を積分する。すなわち，S_F に要求される性質を求めるには，Re p_0 に沿っての積分路を，$p_0=-E$ の極では下をまわり，$p_0=E$ の極では上をまわるように選ぶ。

この処方が正しいことを確かめるために，まず $t>t'$ と仮定してみよう。次に (6.127) からわかるように，半円の寄与が消えるためには下半面で積分路が閉じなければならない。つまり，$p_0=+E$ での極を含むことになる。Cauchy の留数定理を用いて，次式を得る：

$$G_F(x-x')=\frac{-2\pi i}{(2\pi)^4}\int\frac{d^3p}{2E}e^{-ip\cdot(x-x')}(\gamma_0E-\boldsymbol{\gamma}\cdot\boldsymbol{p}+m)$$

$$=\frac{-i}{(2\pi)^3}\int\frac{d^3p}{2E}e^{-ip\cdot(x-x')}(\not p+m). \qquad (6.128)$$

ここで，$\not p+m$ は，正エネルギーの電子状態を取り出す演算子 (5.48) である。S_F は時間の向きに伝播するエネルギー $+E$ の電子を表す。

さて，時間と逆向きの伝播 ($t<t'$) を考えてみよう。この場合も，上半面で閉じれば，半円からの寄与は消える。そこで，$p_0=-E$ の極を含んで，

$$G_F(x-x')=\frac{2\pi i}{(2\pi)^4}\int\frac{d^3p}{(-2E)}\cdot e^{i\boldsymbol{p}\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')}e^{-i(-E)(t-t')}(-\gamma_0E-\boldsymbol{\gamma}\cdot\boldsymbol{p}+m)$$

を得る。3 次元空間全体にわたって積分しているので，G_F は $\boldsymbol{p}\to-\boldsymbol{p}$ の置き換えによって変わらない。すなわち，

$$G_F(x-x')=-\frac{-i}{(2\pi)^3}\int\frac{d^3p}{2E}e^{ip\cdot(x-x')}(-\not p+m). \qquad (6.129)$$

ここで，$-\not p+m$ は，負エネルギー電子状態を取り出す射影演算子である ((5.48) 参照)。したがって，S_F は時間と逆向きに伝播する $-E,-\boldsymbol{p}$ の電子を表す。すなわち，時間の向きに伝播する $+E,+\boldsymbol{p}$ の陽電子である。陽電子状態の起源は，$p_0=-E$ における極であり，非相対論的理論には現れなかったものである。2 つのスピン状態の伝播が含まれていることを納得するには，完全関係 (5.47) を思いおこせばよい。

必要な境界条件を与えるのに，図 6·15 に示すように，$p_0=\pm E$ での極のまわ

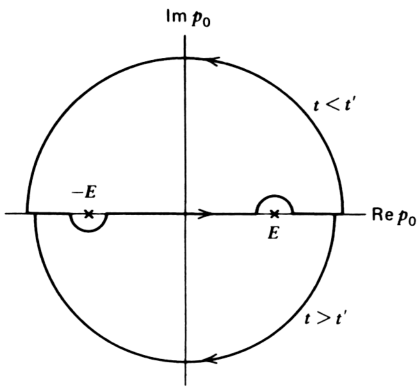


図 6·15 (6.127) の dp_0 積分の計算に用いる複素 p_0 平面上の積分路

りに積分路をずらした。極を軸から少しずらし，経路はそのままにしておいても同じことである。それには，電子の伝播関数を

$$iS_F(p)=i\frac{\not{p}+m}{p^2-m^2+i\varepsilon} \tag{6.130}$$

と書く。ε を無限小の正の量として，$+i\varepsilon$ を導入することは，$p_0=\pm E$ の極を少し軸の上下にずらすことに対応する。同様な $+i\varepsilon$ 処法は，他の伝播関数にも必要である。

$i\varepsilon$ の符号を記憶するわかりやすい方法は，それが質量に対して，負の虚数として寄与する ($m \to m-i\varepsilon/2$) とみなすことである。すると時間依存性は，

$$e^{-iEt} \longrightarrow e^{-i(m-i\varepsilon/2)t}=e^{-imt}e^{-\varepsilon t/2}$$

となる。つまり安定粒子は，不安定粒子の寿命が無限大に近づくときの極限と考えることができる。

6.17 QEDに対するFeynman則のまとめ

不変振幅 $\mathcal{M}$ を求めるのに，ある過程につき (相互作用点の位置関係が図形的に区別でき，かつ，つながった) すべてのFeynman図を描き，それぞれの図に現れるいろいろな要素に対応する因子を与え，それらをかけ合わせる。Feynman則を表6-2にまとめておく。

光子とスピン0粒子の相互作用では，4粒子バーテックスも存在する (図6·16参照)。これは，(4.4) の e^2A^2 項から生じる。光子とスピン1/2粒子の場合，対応する4粒子バーテックスは存在しない。なぜなら，電磁場の中の電子を記述する方程式 (6.2) には A^2 項が現れないからである。

問題 6.23 電子スピンを0として，図6·12の2つのFeynman図に対応する振幅 $\mathcal{M}$ ($\gamma e^- \to \gamma e^-$) を，Feynman則を用いて評価せよ。結果はゲージ変換 (6.66) に対して不変にならないことを示せ。もしバーテックス因子 $2ie^2g^{\mu\nu}$ を持つFeynman図6·16を含めれば，ゲージ不変性は回復されることを証明せよ。

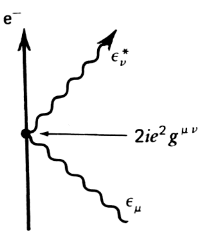
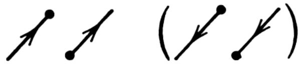
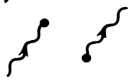
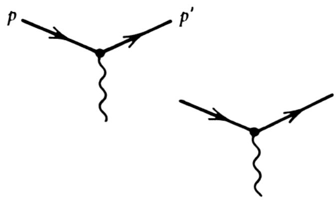


図6·16 "スピンを持たない" 電子に対する $\gamma e^- \to \gamma e^-$ 反応の "かもめ (sea-gull)" 図

表 6-2 $-i\mathcal{M}$ に対する Feynman 則

		対応する因子
● 外　線		
スピン 0 ボソン (または反ボソン)		1
スピン 1/2 フェルミオン (入る，出る)		$u, \bar{u}$
反フェルミオン (入る，出る)		$\bar{v}, v$
スピン 1 光子 (入る，出る)		$\varepsilon_\mu, \varepsilon_\mu{}^*$
● 内線——伝播関数 ($+i\varepsilon$ 処方が必要)		
スピン 0 ボソン		$\dfrac{i}{p^2-m^2}$
スピン 1/2 フェルミオン		$\dfrac{i(\not{p}+m)}{p^2-m^2}$
質量を持つスピン 1 ボソン		$\dfrac{-i(g_{\mu\nu}-p_\mu p_\nu/M^2)}{p^2-M^2}$
質量を持たないスピン 1 光子 (Feynman ゲージ)		$\dfrac{-ig_{\mu\nu}}{p^2}$
● バーテックス因子		
光子-スピン 0 (電荷 $-e$)		$ie(p+p')^\mu$
光子-スピン 1/2 (電荷 $-e$)		$ie\gamma^\mu$

閉線：閉線の運動量につき積分 $\int d^4k/(2\pi)^4$ を行う。フェルミオンの閉線に対しては -1 をかけ，それに伴う γ 行列のトレースをとる。
同種フェルミオン：$e^- \leftrightarrow e^-$ の入れかえ，または始状態 $e^- \leftrightarrow$ 終状態 e^+ の入れかえを行ったグラフの間では -1 をかける。

これまでの章では，最低次の Feynman 図のみを考えてきた。規則は高次の Feynman 図へ一般化できる。しかしその場合には，新しい事情，つまり図に中間状態の粒子の閉線が含まれるのである (たとえば，図 6·7 参照)。各バーテックスに 4 元運動量の保存を適用しても，なお閉線を回る仮想粒子の 4 元運動量

は未決定のまま残る。したがって，このような図を評価するためには，さらに別の Feynman 則を必要とする。まず，閉線運動量についての積分 $\int d^4k/(2\pi)^4$ を実行しなければならない。それぞれの Feynman 閉線には，因子 -1 を挿入し，関係する γ 行列のトレースを計算する必要がある。この点については，第 7 章でもっと詳しく議論する。

残念なことに，閉線についての積分はしばしば発散する。しかし，発生するすべての無限大は，十分確立された手法によって除くことができる。この意味で QED はくり込み可能な理論であるといわれる。これが次章の主題である。

7

閉線，くり込み，実効結合定数

この章では，読者に場の理論の美しい構造をかいま見てもらおうと思う。場の理論は本書の主題ではないから，読者は本章を飛ばしてもかまわない。だが，本章をうまく読めば，閉線，くり込み，実効結合定数 (running coupling constant) という近づきがたい概念が，簡単で物理的な方法によって理解できるようになるだろう。結果的には，議論はかなり不完全であり，いくつかの結論はきちんと導出されてはいない。しかし，省略したのは，最後の結果には現れない代数関係のみであって，それは，たいていの場の理論の教科書に書かれている。

7.1　静止電荷による電子の散乱

本章で導入する概念をはっきり示すために，簡単な実験，すなわち静止電荷による電子の散乱を利用しよう。最低次の反応過程を図 7·1 (a) に示す。静止電荷を×印で表す。このような特別な状況に，Feynman 則をどのように適用

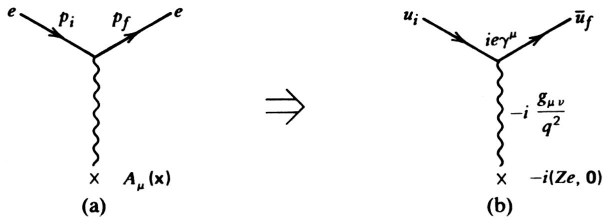


図 7·1　静止電荷 Ze (たとえば原子核)による電子の Rutherford 散乱の Feynman 則

したらよいのだろう。この疑問に答えるためには，(6.4),(6.6) にもどってみるのが一番よい。それによれば，図 7･1 (a) の過程に対して，振幅が

$$T_{fi}=-i\int d^4x j_\mu{}^{fi}(x)A^\mu(x) \tag{7.1}$$

と書けることがわかる。ここで $j_\mu{}^{fi}(x)$ は電子カレント

$$j_\mu{}^{fi}=-e\bar{u}_f\gamma_\mu u_i e^{-iq\cdot x} \tag{7.2}$$

であり，$A_\mu(x)$ は静止電荷に伴う 4 元ベクトルポテンシャルを表す。前と同じように，図 7･1 (a) で定義した運動量を使えば，$q=p_i-p_f$ となり，(7.1) は

$$T_{fi}=ie\bar{u}_f\gamma_\mu u_i A^\mu(q) \tag{7.3}$$

と書くことができる。ここで $A^\mu(q)$ は Fourier 変換

$$A^\mu(q)=\int d^4x e^{-iq\cdot x}A^\mu(x) \tag{7.4}$$

である。静止した源の場合には，$A^\mu(x)$ は時間に依存しない。したがって

$$\begin{aligned}A^\mu(q)&=\int dt e^{-i(E_i-E_f)t}\int d^3x e^{i\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{x}}A^\mu(\boldsymbol{x})\\&=2\pi\delta(E_f-E_i)A^\mu(\boldsymbol{q}).\end{aligned} \tag{7.5}$$

3 次元 Fourier 変換 $A^\mu(\boldsymbol{q})$ は，Maxwell 方程式 (6.59) を用いてうまく計算できる。時間に依存しない $A^\mu(x)$ に対して

$$\nabla^2 A^\mu(\boldsymbol{x})=-j^\mu(\boldsymbol{x}) \tag{7.6}$$

が成り立つ。すなわち，

$$\int d^3x(\nabla^2 A^\mu(x))e^{i\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{x}}=-j^\mu(\boldsymbol{q}) \tag{7.7}$$

である。ここで部分積分によって左辺は

$$\int d^3x A^\mu(x)\nabla^2 e^{i\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{x}}=-|\boldsymbol{q}|^2A^\mu(\boldsymbol{q}) \tag{7.8}$$

に等しくなる。(7.7),(7.8) を組み合わせて，

$$\boldsymbol{A}^\mu(\boldsymbol{q})=\frac{1}{|\boldsymbol{q}|^2}j^\mu(\boldsymbol{q}) \tag{7.9}$$

を得る。この結果を (7.5) に代入し，(7.3) から

$$T_{fi}=i2\pi\delta(E_f-E_i)e\bar{u}_f\gamma_\mu u_i\frac{1}{|\boldsymbol{q}|^2}j^\mu(\boldsymbol{q}) \tag{7.10}$$

となる。共変振幅 $\mathcal{M}$ は，T_{fi} の δ 関数を除いたもので

$$-i\mathcal{M}=ie\bar{u}_f\gamma_\mu u_i\frac{1}{|\boldsymbol{q}|^2}j^\mu(\boldsymbol{q}) \tag{7.11}$$

である ((4.17)参照)。図 7･1 (a) において，電子は静止電荷によって反跳を受け $\boldsymbol{p}_i\neq\boldsymbol{p}_f$ である。しかし，(7.10) でのエネルギー保存は，$E_i=E_f$，すなわち，

$q_0=0$ を意味する。したがって

$$q^2=-|\boldsymbol{q}|^2. \tag{7.12}$$

そこで，(7.11) は

$$-i\mathcal{M}=(ie\bar{u}_f\gamma^\mu u_i)\left(\frac{-ig_{\mu\nu}}{q^2}\right)(-ij^\nu(\boldsymbol{q})) \tag{7.13}$$

と書くことができる。振幅 $i\mathcal{M}$ に対して，すでに周知の Feynman 則のバーテックス因子と光子伝播関数が確かめられる (6.17 節参照)。したがって，因子 $-ij^\nu$ が源に関係していることがわかる。電荷 Ze の静止した原子核に対して

$$\begin{aligned} j^0(\boldsymbol{x})&=\rho(\boldsymbol{x})=Ze\delta(\boldsymbol{x}) \\ \boldsymbol{j}(\boldsymbol{x})&=0 \end{aligned} \tag{7.14}$$

であるから，

$$-i\mathcal{M}=(ie\bar{u}_f\gamma_0 u_i)\frac{-i}{q^2}(-iZe) \tag{7.15}$$

を得る。結果を図 7·1 (b) に示す。静止した原子核の場合，(7.15) はちょうど Rutherford 散乱に相当する。角度分布に対しては，次のようなよく知られた関係がある (1.6 節参照)：

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}\sim|\mathcal{M}|^2\sim\frac{1}{\sin^4(\theta/2)}. \tag{7.16}$$

ここで，図 7·2 に示すように，θ は電子の散乱角である。この角分布は (7.15) を (7.16) に代入して得られる $d\sigma/d\Omega$ が，q^{-4} 依存性を持つことによる。すなわち

$$\begin{aligned} q^2&=(p_i-p_f)^2 \\ &\simeq-2k^2(1-\cos\theta) \\ &\simeq-4k^2\sin^2(\theta/2). \end{aligned} \tag{7.17}$$

ここでは，電子の質量を無視し，

$$k\equiv|\boldsymbol{p}_i|=|\boldsymbol{p}_f|$$

を用いた。

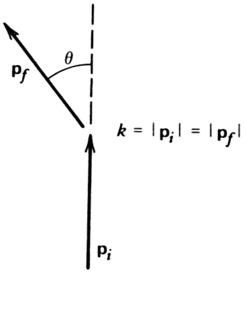


図 7·2 静止電荷によって電子の方向が曲げられる。

7.2 高次補正

これまでは，Rutherford 散乱の断面積を α の 2 次のオーダー $O(\alpha^2)$ の近似で計算してきた。したがって，それは近似的な摂動計算の結果である。$O(\alpha^4)$ まで許すと，さらに別の Feynman 図を含めなければならない。その 1 つを図 7·3 に示す。$O(\alpha^4)$ の Feynman 図の不変振幅を (7.15) に加えると，$d\sigma/d\Omega$ のもっと正確な結果が得られる。図 7·3 に示した特別の Feynman 図では，交換する光子はある時間，仮想 e^+e^- 対になっている。これは，図 7·1 の最低次の Feynman 図から生ずる Coulomb の法則を修正する。はじめに，高次の Feynman 図を評価し，この興味ある内容にもどることにしよう。

図 7·3 と 6.17 節に示した Feynman 則を適用し，次式を得る：

$$
\begin{aligned}
i\mathcal{M}=&(-1)^1(ie\bar{u}_f\gamma^\mu u_i)\left(-i\frac{g_{\mu\mu'}}{q^2}\right)\\
&\times\int\frac{d^4p}{(2\pi)^4}\left[(ie\gamma^{\mu'})_{\alpha\beta}\frac{i(\not{p}+m)_{\beta\lambda}}{p^2-m^2}(ie\gamma^{\nu'})_{\lambda\tau}\frac{i(\not{p}-\not{q}+m)_{\tau\alpha}}{(p-q)^2-m^2}\right]\\
&\times\left(-i\frac{g_{\nu'\nu}}{q^2}\right)(-ij^\nu(\boldsymbol{q})).
\end{aligned}
\tag{7.18}
$$

高次の図に対する Feynman 則は，第 6 章で導いた規則のかなり重要な拡張を含んでいる。n 個のフェルミオンの閉線を含む図に対して，振幅は $(-1)^n$ を含まなければならない [たとえば，Dyson-Wick の定式化に関する Mandl (1959) の議論を参照]。つまり，(7.18) には $(-1)^1$ がかかる。(7.18) で唯一今までになかった状況は，$d^4p/(2\pi)^4$ の積分である。その出所は明らかだ。各バーテッ

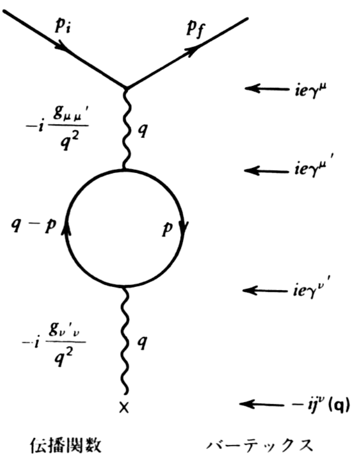


図 7·3　交換光子がゆらいで e^+e^- 対が生ずる場合の Rutherford 散乱に対する Feynman 図

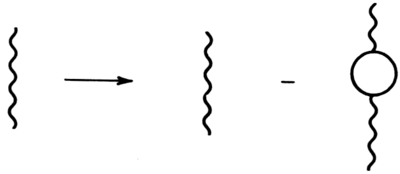


図 7·4 (7.19) の図式的表現

クスで4元運動量は保存するが，閉線をまわる運動量 p は制限を受けない。閉線の4元運動量の大きさ

$$|p|=(p^2)^{1/2}=(p_0{}^2-|\boldsymbol{p}|^2)^{1/2}$$

は0から無限大の間のどんな値でもとりうる。p は観測できないから，すべての可能な値につき和をとる必要がある。それが $\int d^4p$ に対応する。(7.18) を (7.13) に加えることは，最低次の結果である (7.13) の伝播関数の補正とみなすことができる。すなわち

$$\begin{aligned}-i\frac{g_{\mu\nu}}{q^2}\longrightarrow &-i\frac{g_{\mu\nu}}{q^2}+\left(-i\frac{g_{\mu\mu'}}{q^2}\right)I^{\mu'\nu'}\left(-i\frac{g_{\nu'\nu}}{q^2}\right)\\ \longrightarrow &-i\frac{g_{\mu\nu}}{q^2}+\frac{(-i)}{q^2}I_{\mu\nu}\frac{(-i)}{q^2}.\end{aligned} \tag{7.19}$$

ここで

$$I_{\mu\nu}(q^2)=(-1)^1\int\frac{d^4p}{(2\pi)^4}\mathrm{Tr}\left\{ie\gamma_\mu\frac{i(\not{p}+m)}{p^2-m^2}(ie\gamma_\nu)\frac{i(\not{p}-\not{q}+m)}{(p-q)^2-m^2}\right\}. \tag{7.20}$$

図7·4に，伝播関数の $O(\alpha)$ の補正を図式的に示した。補正は一度だけ計算しておくと，以後それはどのような Feynman 図にも利用することができる。

だが，ここに大きな問題がある。すぐわかるように，(7.20) で与えた $I_{\mu\nu}$ は，$p\to\infty$ に対して $\int|p|^3d|p|/|p|^2$ の形の項を含む。つまり，補正項が発散するのである。長くなるが正直に計算すれば，$I_{\mu\nu}$ は次のように書ける：

$$I_{\mu\nu}=-ig_{\mu\nu}q^2I(q^2)+\cdots. \tag{7.21}$$

ここで

$$I(q^2)=\frac{\alpha}{3\pi}\int_{m^2}^{\infty}\frac{dp^2}{p^2}-\frac{2\alpha}{\pi}\int dz(1-z)z\log\left\{1-\frac{q^2z(1-z)}{m^2}\right\}. \tag{7.22}$$

ここで m は電子の質量。(7.21) で省略した…は，$q_\mu q_\nu$ に比例して，伝播関数が外部電荷あるいは外部カレントに結合すると消える項である。(7.22) によれば，$I(q^2)$ は対数的な発散と有限な寄与に分けられる。$I(q^2)$ は $\int|p|dp$ のように2次で発散するだろうと思われるが，残りの被積分関数とうまく組み合わせ

て処理すると，発散はたかだか対数的になる。(7.21) と (7.22) の具体的な導出は，たとえば，Bjorken and Drell (1964)，Jauch and Rohrlich (1976)，Scadron (1979) あるいは Sakurai (1967) に与えられている。Sakurai (1967) の付録には，閉線積分を扱う手法が集めてある。

あとで，短距離および長距離相互作用の極限における e^-e^+ 閉線の効果を学ぼう。すなわち，$(-q^2)$ の大きい値と小さい値の両方に対して，$I(q^2)$ を評価するのである。$(-q^2)$ が小さいとき，

$$\log\left(1-\frac{q^2 z(1-z)}{m^2}\right)\simeq-\frac{q^2 z(1-z)}{m^2}$$

が成り立ち，(7.22) は

$$I(q^2)\simeq\frac{\alpha}{3\pi}\log\frac{M^2}{m^2}+\frac{\alpha}{15\pi}\frac{q^2}{m^2} \tag{7.23}$$

となる。ここでとりあえず，(7.22) の第 1 項目の積分の上限 ∞ のかわりに，切断 M^2 を導入しておく。一方，$(-q^2)$ が大きい場合は，

$$\log\left(1-\frac{q^2 z(1-z)}{m^2}\right)\simeq\log\left(\frac{-q^2}{m^2}\right)$$

となり，同様に，

$$\begin{aligned}I(q^2)&\simeq\frac{\alpha}{3\pi}\log\left(\frac{M^2}{m^2}\right)-\frac{\alpha}{3\pi}\log\left(\frac{-q^2}{m^2}\right)\\&=\frac{\alpha}{3\pi}\log\left(\frac{M^2}{-q^2}\right)\end{aligned} \tag{7.24}$$

が導かれる。もし $I(q^2)$ の無限大部分 ((7.23) と (7.24) で $M^2\to\infty$ としたときに現れる) が処理できないならば，結果は物理的に意味を持たないだろう。

これから先は，Rutherford 散乱にもどって説明するのが一番よい。閉線の寄与 (7.19) を含めると，振幅 (7.15) は

$$-i\mathcal{M}=(ie\bar{u}\gamma_0 u)\left(-\frac{i}{q^2}\right)\left(1-\frac{\alpha}{3\pi}\log\left(\frac{M^2}{m^2}\right)-\frac{\alpha}{15\pi}\frac{q^2}{m^2}+O(e^4)\right)(-iZe) \tag{7.25}$$

となる。ここで，$-q^2$ が小さい極限で (7.21) を用いたが，その $I(q^2)$ に対しては (7.23) を使った。すると，(7.25) は次のように書くことができる：

$$-i\mathcal{M}=(ie_R\bar{u}\gamma_0 u)\left(-\frac{i}{q^2}\right)\left(1-\frac{e_R{}^2}{60\pi^2}\frac{q^2}{m^2}\right)(-iZe_R). \tag{7.26}$$

ここで e_R は

$$\boxed{e_R\equiv e\left(1-\frac{e^2}{12\pi^2}\log\frac{M^2}{m^2}\right)^{1/2}} \tag{7.27}$$

である。$O(e^4)$ の次数まで考慮すると，(7.25) と (7.26) が数学的には同等であることを確かめるのは容易である。前章で最低次の Feynman 図に現れる電荷 e は，Thomson 散乱，あるいはどのような長距離 Coulomb 相互作用の実験でも測定される電子の電荷であることを述べた。しかし，これは正当化されているわけではない。事実，それは本当ではないのだ！ (7.27) の e_R を素粒子表にある電荷，すなわち $e_R{}^2/4\pi=1/137$ としてみよう。すると，不変振幅 (7.26) は有限になる。切断 $M\to\infty$ で生ずる無限大は，e_R の中に "吸収" されてしまっている。この手続きは明らかに奇妙だ。こうして，はじめて "くり込み" に出会ったわけである。あとでこの点にもどるが，まず，無限大を含まないように処理した新しい振幅に含まれている物理的な内容を調べよう。

7.3 Lamb シフト

第 3, 4 章で指摘したように，T_{fi} (または $\mathscr{M}$) はポテンシャルの Fourier 変換を表す。$|\boldsymbol{q}|^{-2}$ に比例する (7.26) の第 1 項は，Coulomb ポテンシャルに関係している。なぜならば

$$V_0(r)=-\frac{Ze_R{}^2}{(2\pi)^3}\int d^3q\, e^{\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{r}}\frac{1}{|\boldsymbol{q}|^2}=-\frac{Ze_R{}^2}{4\pi r} \tag{7.28}$$

が成り立つからである (問題 6.17 参照)。第 2 項目は，交換する光子の伝播関数中の仮想 e^-e^+ の閉線による量子効果を表す。それは第 1 項に比べて，$|\boldsymbol{q}|^2$ の因子を余分に含む。座標空間では，$|\boldsymbol{q}|^2\to\nabla^2$ であり，

$$\frac{1}{(2\pi)^3}\int d^3q e^{\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{r}}=\delta(\boldsymbol{r}) \tag{7.29}$$

が成り立つから，(7.26) は，電子と電荷 Ze_R の間の相互作用に相当し，次の形をとる：

$$V(r)=-\left(1-\frac{e_R{}^2}{60\pi^2m^2}\nabla^2\right)\frac{Ze_R{}^2}{4\pi r}$$

$$\boxed{V(r)=-\frac{Ze_R{}^2}{4\pi r}-\frac{Ze_R{}^4}{60\pi^2m^2}\delta(\boldsymbol{r}).} \tag{7.30}$$

余分の相互作用 (その符号も含めて) は，第 1 章の遮蔽の議論で予想したものである。$q^2\to0$ のとき，電子は遠方から静止電荷 Ze_R を探り，まさに Coulomb 相互作用，すなわち (7.30) の第 1 項を通して相互作用する。電荷 e_R は，よく知られた電子の電荷である。つまり，それは長距離電磁相互作用，たとえば

Thomsom 散乱 (図 1·7 参照) で測られたものである。しかし電子が核に近づいたとき (すなわち $-q^2$ が増加する)，仮想 e^-e^+ 対の雲を突き抜ける。こうして図 1·6 に説明したように，有効相互作用は増大する ((7.30) の 2 つの項は同じ符号を持つことに注意)。(7.30) の第 2 項は，この効果を最低次，すなわち "1 閉線近似" で計算したものである。閉線が現れることによって，電子と核の間にさらに新しい引力が加わる。

この新しい相互作用は検出できる。閉線は単に図に書かれただけのものではない。その存在は，実験的に確立されているのだ。たとえば，もし図 7·1 の源が陽子 ($Z=1$) であり，Feynman 図が水素原子の電子-陽子相互作用を表すなら，(7.30) は原子の束縛を記述する。そのポテンシャルは，電子が核の電荷を遮蔽している e^-e^+ 対の雲の内部に突き進むとき，電子が受ける余分の引力を含んでいる。この影響は最低次では $\delta(\boldsymbol{r})$ ポテンシャルで表され，水素原子のエネルギー準位 E_{nl} に寄与する。その大きさは普通の量子力学を用いて計算できる。(7.30) の第 2 項を摂動として扱い，"Lamb シフト" への寄与を求めると

$$\Delta E_{nl} = -\frac{{e_{\mathrm{R}}}^4}{60\pi^2 m^2}|\psi_{nl}(0)|^2\delta_{l0}$$
$$= -\frac{8{\alpha_{\mathrm{R}}}^3}{15\pi n^3} Ry\,\delta_{l0} \qquad (7.31)$$

となる。ここで，ψ_{nl} は通常の水素原子の波動関数，$Ry = m{\alpha_{\mathrm{R}}}^2/2$ は Rydberg 定数である。(7.31) には δ_{l0} が現れているが，これは $\delta(\boldsymbol{r})$ ポテンシャル が原点で有限，すなわち $l=0$ の波動関数で記述される準位にだけ摂動を及ぼすからである。この結果は，$2s_{1/2}$ と $2p_{1/2}$ 準位間の Lamb シフトの測定により，実験的に確かめられる。もし閉線の寄与を含まないならば，これらの準位は縮退している。(7.31) は，"真空偏極" の補正と呼ばれているが，その理由は明らかだろう。それは，$2s_{1/2}$ と $2p_{1/2}$ 準位のあいだの全 Lamb シフト +1057 MHz に対して，−27MHz の寄与を与える。

Lamb シフトは 0.01% の精度で測定できるので，e^-e^+ 閉線によるシフト (7.31) は，実験的に立証されている。事実，これは，他の閉線からの寄与とともに，観測されたずれを正確に再現する (7.4 節参照)。つまりこれにより，閉線の Feynman 図が真に観測可能な効果を与えるのだと結論できる。しかし，もっと重要なことは，電子の電荷についての奇妙な再解釈 (7.27) が実験で確かめられた，ということである。

これは結局，(7.24) のように電荷が q^2 (同じことであるが，電子-陽子間の距

離）に依存する結果となる。たとえば水素原子では，電子と陽子は光子交換を通して束縛されており，Coulomb 力によって，平均すると Bohr 半径ほど離れている。QED では，電子は Bohr 軌道からずれることができるが，それは何よりも交換する光子がゆらいで e^-e^+ 対になる結果である。この量子遮蔽効果は，電子が陽子から遠くにあるときには引力を減少させ，電子が核に近づくと引力を増大させる。Coulomb 力は r の増加とともに減少するので，2 つの競合する効果は打ち消し合うことはない。正味の効果は，Coulomb ポテンシャル $-\alpha_R/r$ のほかに，(7.30) の第 2 項で与えられる新たな引力である。

7.4　閉線はまだある：異常磁気モーメント

真空偏極に対する閉線は，$2s_{1/2}$-$2p_{1/2}$ 準位の分離の一部を説明するにすぎない。他の $O(e^4)$ の Feynman 図も存在するが，それは $O(e^2)$ の計算だけから得られる準位の縮退を解く効果がある。$O(e^4)$ の Feynman 図をすべて書くと図 7·5 のようになる。前節では，図 7·5 (a) の寄与を計算した。他の図もそれぞれ閉線を含むが，いずれも前と同じように，閉線運動量が大きいとき発散す

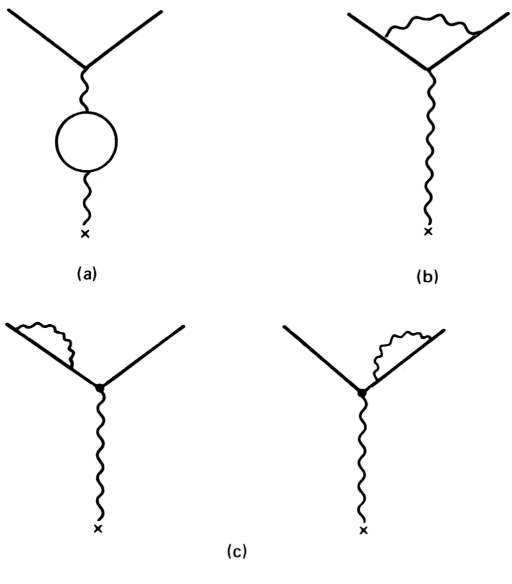


図 7·5　$O(\alpha^2)$ のすべての Feynman 図

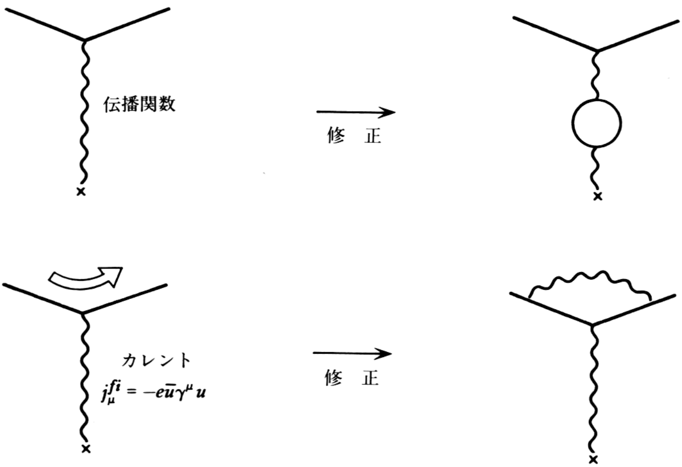


図 7·6

る。これらの発散は，電子の電荷，質量，波動関数を定義しなおすことによって，すべて隠すことができる。それは，光子伝播関数に生じた e^-e^+ 閉線の発散部分を，電荷 e_R (7.27) の中に吸収したのと同じやり方である。"物理" は無限大の項に含まれている。

次に，図 7·5 (b) の Feynman 図を考えよう。ちょうど，伝播関数の閉線が，それを通して相互作用している電荷間の引力に影響を与えるように，バーテックスのまわりの閉線は，電子カレント $-e\bar{u}_f\gamma_\mu u_i$ の構造を補正することが予想される (図 7·6 参照)。たしかに，(有限個の) Feynman 図を計算すると，$-q^2$ が小さい極限では次式が導かれる：

$$-e\bar{u}_f\gamma_\mu u_i \longrightarrow -e\bar{u}_f\left\{\gamma_\mu\left[1+\frac{\alpha}{3\pi}\frac{q^2}{m^2}\left(\log\frac{m}{m_\gamma}-\frac{3}{8}\right)\right]-\left[\frac{\alpha}{2\pi}\frac{1}{2m}i\sigma_{\mu\nu}q^\nu\right]\right\}u_i. \tag{7.32}$$

第 1 の角括弧は，(7.26) と同じ形の Lamb シフトへの新たな寄与である。ここで新しい状況が起こっている。閉線はまた，閉線運動量 $|p|$ が小さいとき (赤外) にも発散するからである。(7.32) では，光子に小さな仮想質量 m_γ を与えて，発散の問題を避けている。第 11 章では，このことによって赤外発散がどのように処理されるかを説明しよう。(7.26) と (7.32) の効果を合わせると，Lamb シフトの実験値を説明できる。詳しい議論はかなり長く，赤外光子の注意深い取り扱いが必要になる (Bjorken and Drell (1964)，または Jauch and Rohrlich

(1976) 参照)。

(7.32) が興味をそそる点は，第 2 の角括弧である。それは，電子カレントの Lorentz 構造 γ_μ を補正する。この項に含まれる物理的意味をみるために，γ_μ カレントの Gordon 分解 (6.7)

$$-e\bar{u}_f\gamma_\mu u_i = -\frac{e}{2m}\bar{u}_f((p_f+p_i)_\mu - i\sigma_{\mu\nu}q^\nu)u_i \tag{7.33}$$

を行う。(7.33) は，電子がその電荷と磁気能率の両方を通して相互作用する，という事実を示す。問題 6.2 では，(7.33) の $\sigma_{\mu\nu}q^\nu$ 項が電子の磁気モーメント

$$\boldsymbol{\mu} = -\frac{e}{2m}\boldsymbol{\sigma} \tag{7.34}$$

を表していることを示した。それはしばしば，

$$\boldsymbol{\mu} = -g\frac{e}{2m}\boldsymbol{S} \tag{7.35}$$

のように書ける。ここで，$\boldsymbol{S}=\boldsymbol{\sigma}/2$，ジャイロ磁気比は

$$g=2 \tag{7.36}$$

である。したがって (7.32) の第 2 項は，(7.33) を通してすでに γ_μ に含まれている相互作用に付加される余分な (磁気モーメント) 相互作用なのである。事実，(7.33) を (7.32) に代入して，(7.34) を用いれば次式が得られる：

$$\boldsymbol{\mu} = -\frac{e}{2m}\left(1+\frac{\alpha}{2\pi}\right)\boldsymbol{\sigma}, \tag{7.37}$$

すなわち

$$\boxed{g = 2+\frac{\alpha}{\pi}.} \tag{7.38}$$

つまり電子は，その Dirac 磁気モーメントに加えて，"異常" 磁気モーメント $\alpha/2\pi$ を持つ。厳密にいえば，異常項は次式で与えられる：

$$\begin{aligned}\frac{g-2}{2} &= \frac{1}{2}\left(\frac{\alpha}{\pi}\right) - 0.32848\left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^2 + (1.49\pm0.2)\left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^3 + \cdots \\ &= (1159655.4\pm3.3)\times10^{-9}.\end{aligned} \tag{7.39}$$

ここで，第 1 項は最低次の結果 (7.38) に相当する。一方，第 2，第 3 項は高次の寄与を表す。Feynman 図の数は，α の次数とともに急激に増加する。$O(\alpha^3)$ の寄与に含まれる誤差 (±0.2) は，数値計算の難しさを暗示している。電子の異常磁気モーメントの実験値は，

$$\left(\frac{g-2}{2}\right)_{\text{exp}} = (1159657.7\pm3.5)\times10^{-9} \tag{7.40}$$

であり，(7.39) の予言との見事な一致を示している。QED は，ミューオンの磁気能率についても勝利をおさめた。こうして，無限大の処理についての一風変わった手法が正しいという，もう1つの証拠を提供したのである。

7.5 閉線を組み合わせる：Ward-高橋の恒等式

(7.27) は，光子伝播関数の閉線の無限大部分が，電子電荷の再定義によって，どのように隠されるかを示している。完全な $O(e^4)$ の計算を行うと，図 7·5 (b) と (c) の閉線による無限大部分もまた，e_R の中に吸収されるだろう。いまここで，この計算を電子ではなく，ミューオンの原子核による散乱についてくり返すことにしよう。明らかに第1の図 (図 7·5 (a)) は，電荷に対してある量の寄与を与える。しかし，電荷は散乱粒子の性質には関係しないのだ。(7.27) の結果は，補正された光子伝播関数により決定され，電子，ミューオンあるいは他のどんな粒子についても，まったく同じようにその電荷を変える。しかし，このことは，図 7·5 (b), (c) についてはあてはまらない。この場合は，散乱粒子が閉線積分に入っているので，電子とミューオンに対して e の再定義は異なったものになるだろう。それは，重大問題だ。なぜなら，実験的には電子とミューオンの電荷は等しいからである。QED がその偉力を発揮するのはここである。完全な計算によれば，図 7·5 (b) のバーテックス図による電荷の補正は，不思議なことに，図 7·5 (c) による補正と厳密に相殺することがわかるのである (Sakurai (1967), Bjorken and Drell (1967) 参照)。図 7·5 (a) の "真空偏極" の Feynman 図のみが電荷を補正し，(7.27) が完全な答えになる。すなわち，電子とミューオンの "くり込まれた" 電荷は等しいのだ。

このような相殺は，摂動のすべての次数で成り立つ。電子とミューオンの電荷は厳密に等しい。図 7·5 (b) と (c) の Feynman 図がうまく組み合わされて相殺されるのであるが，そこに Ward-高橋の恒等式として知られる (ゲージ) 場の理論のきわめて基本的な性質が反映されている。

7.6 電荷の遮蔽と $e^-\mu^-$ 散乱

交換する光子の伝播関数中の閉線は，電子と静止電荷の相互作用を修正するばかりでなく，他の相互作用，たとえば電子・ミューオン弾性散乱にも影響を与える。最低次の $e^-\mu^-$ 振幅は (6.50) で与えられる。オーダー $O(e^4)$ の真空偏

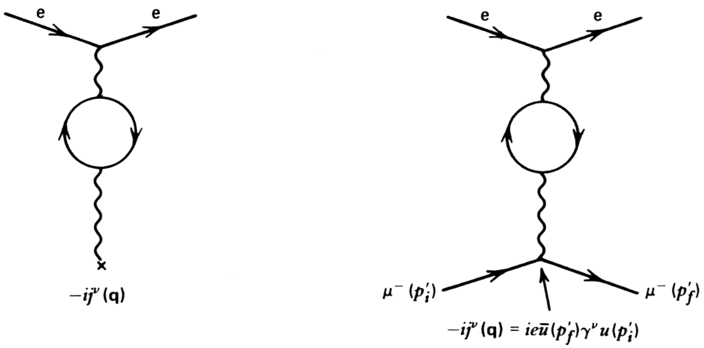


図 7·7 Rutherford 散乱と $e^-\mu^-$ 散乱の関係

極の寄与は，(7.18) の源を表す因子 $-ij^\nu=(-iZe,\mathbf{0})$ をミューオンカレント

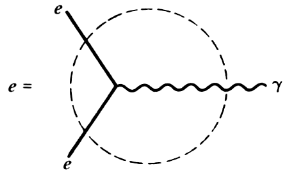
$$-ij^\nu=ie\bar{u}(p_f{}')\gamma^\nu u(p_i{}')$$

で置き換えることによってただちに求められる (図 7·7 参照)。電荷はくり込まれた電荷 (7.27) になることを要請し，(7.21) の $I(q^2)$ の有限部分を残しておく。この高次の寄与を最低次の結果に加える。これが，伝播関数の補正はすべての過程に共通であり，したがって一度だけ計算しておけばよい，という事実の説明になっている。もちろん，$e^-\mu^-$ 散乱に含めなければならない，もっと別の $O(\alpha^4)$ の寄与もある。

7.7 くり込み

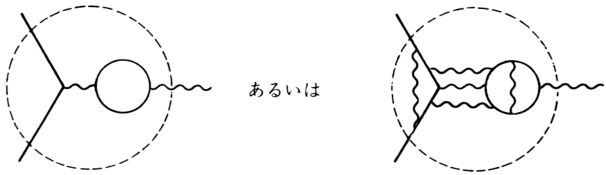
現象論的に成功したとはいえ，無限大を扱う手続きには，なお考慮の余地がある。α の高次の項が無限大の係数，すなわち $\log(M^2/m^2)$ を含むとき，α の展開による摂動論をどのように正当化できるのだろうか。ただし，M はある任意の切断である。ここで (7.27) は，相対論的量子力学に関するこれまでの議論に含まれている重大な欠陥に注意をうながす。

われわれが電荷と呼んだ量は，第 6 章の最低次の Feynman 振幅に現れたものであり，高次の相互作用で変更を受ける。したがって，この電荷は，われわれがはじめに考えていたような電荷ではないし，また，実験家が測定する電荷でもないことは確かである。このジレンマを別のやり方でみることができる。電荷は電子・光子結合に関係し，図式的に表せば

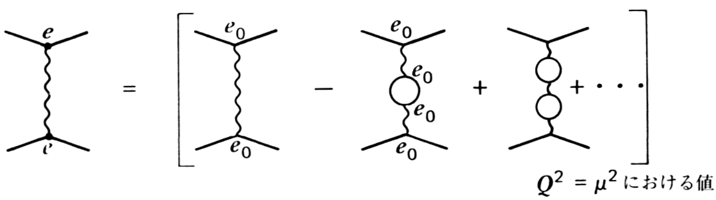


(7.41)

のようになる。だがこれは不合理だ。なぜならば，電荷はまた



のようにも表せるからである。事実，電荷は同時にこれらすべての状態をとり，それが実験家の測定するものなのだ。だから，(7.41) を e (Coulomb 実験で測定され，$\alpha=1/137$ を与える量) とするのは明らかに間違いだ。そこで，(7.41) を "裸" の電荷 e_0 とよぼう。ここで "裸" とは，バーテックスからすべての閉線を取り去ることに相当する。そうすると，この状況を次のようにまとめることができる：



(7.42)

ただし··· の部分は，可能な伝播関改の補正をすべて行った Feynman 図を示す。7.5 節で述べた Ward-高橋の 恒等式のおかげで，光子の伝播関数の修正だけが必要である。ここでは，(7.18) でみたように，各閉線に伴う負号をはっきりと示した。(7.42) の電荷 e は，2 つの低エネルギー電子の散乱，すなわち Coulomb 実験によって実験家が測定する電荷，$e^2/4\pi\simeq1/137$ である。この定義が，最低次の Feynman 振幅に現れる e_0 は，相互作用によって補正されるという事実を確認している。e^2 と $e_0{}^2$ の関係は，(7.42) で行ったように，仮想光子の運動量の特定の値，たとえば実験に対応した $q^2\equiv-Q^2=-\mu^2$ において与えておかなければならない。普通 $-q^2$ のかわりに，正の量 Q^2 を導入する。

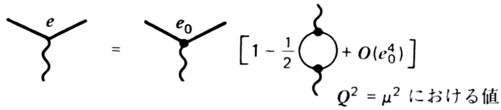
$O(e_0{}^4)$ までを考えると，裸の電荷 e_0 との関係は

$$e^2 = e_0{}^2[1 - I(q^2 = -\mu^2) + O(e_0{}^4)] \tag{7.43}$$

のように書くことができる。ここで $I(q^2)$ は (7.19) と (7.21) で与えられる。$I(q^2)$ は $O(e_0{}^2)$ であり，1閉線の計算結果を表す。たしかに，(7.43) の平方根をとると，

$$e = e_0\left[1 - \frac{1}{2}I(q^2 = -\mu^2) + O(e_0{}^4)\right] \tag{7.44}$$

となるが，これは，(7.27) の平方根を展開した形になっている。図 7·4 の図式的記法を用いると，これは



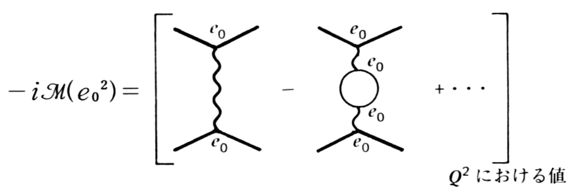
(7.44′)

のように書くことができる。すなわち，すべての次数を考慮すれば，

$$e = e_0(1 + e_0{}^2 A_1(Q^2) + e_0{}^4 A_2(Q^2) + \cdots)_{Q^2=\mu^2} \tag{7.45}$$

である。ここで，$-q^2 \equiv Q^2$ である。明らかに $I(-Q^2)$ に直接関係する $A_1(Q^2)$ は，無限大の量である。同様に，(7.45) の $A_2(Q^2)$ とそれ以下のすべての係数も無限大になる。直観的にいって，これで悪いということはない。観測可能な量が有限であるかぎり，理論が無限大の量を用いて定式化されていてもかまわない。光学では，複素量が広く用いられているが，観測量が実であるかぎりそれでさしつかえない。

この点を説明するために，ある観測可能量，たとえば 90° における eμ 散乱を計算しよう。ただ 1 つの運動量に依存するような観測可能量 $d\sigma/d\Omega(s,t)$ を得るために，角度を固定する。90° では $-t \simeq s/2 \simeq Q^2$. 前と同じように，不変振幅を計算する。しかしここでは，裸の電荷を用いて計算するという事実を，あらわに示すことにしよう。

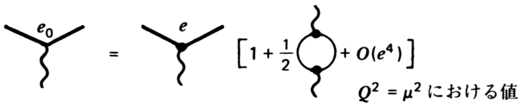


(7.46)

$$= e_0{}^2[F_1(Q^2) + e_0{}^2 F_2(Q^2) + O(e_0{}^4)]. \tag{7.46′}$$

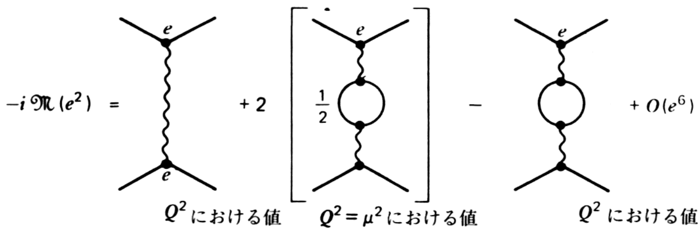
(7.46) の···部分は，他の Feynman 図を表す。現実的な結果を得るためには，それらをきちんと考慮しなければならないだろう。摂動論は無限個の Feynman 図をうまく処理することができるが，ここではその手法を示すにとどめたい。

たとえば，(7.46) の中の $e_0{}^4$ 項の閉線に関連した無限大を処理する手法である。事実，(7.46) のような裸の電荷による摂動計算のすべての項は，ふたたび無限大になる。さて，いまや重大な段階にさしかかった：$-i\mathcal{M}(e_0{}^2)$ を e^2 で書きなおす (普通に使われているが，あまりうまくない言い方をすれば"くり込み (renormalization)"ということになる)。これを行うために，(7.44′)(あるいは (7.44)) を逆に解く。



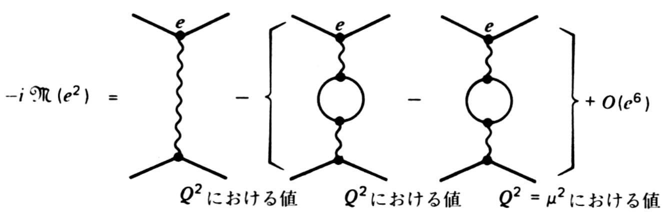
(7.47)

この結果を用いて，(7.46) の e_0 バーテックスを置き換えて，



(7.48)

を得る。はじめの 2 つの図は，ともに (7.46) の第 1 の図から生じた。係数 2 は，それぞれのバーテックスで，e_0 を e に置き換えなければならないからである。残りの図では，その差は $O(e^6)$ の程度であるから，e を単に e_0 と書いた。(7.48) は次のように書くことができる：



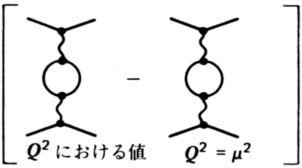
(7.49)

$$=e^2[F_1{}'(Q^2)+e^2F_2{}'(Q^2)+O(e^4)]. \tag{7.49′}$$

こうして，期待した結果が得られた。(7.46) と (7.49) を比較してみると，(7.44) で定義した"実験家"の電荷 e，すなわち $Q^2=\mu^2$ における実験値を用いて，不変振幅の新しい表現を得たことがわかる。こうすれば，つけ加えたものもなければ，捨て去ったものもない。もとの計算 (7.46) を書き換えたにすぎない。したがって，たしかに，当然成り立つべき関係

$$\mathcal{M}(e^2)=\mathcal{M}(e_0{}^2) \tag{7.50}$$

が得られたのである。ではいったい何がわかったのか。(7.46) の $e_0{}^4$ 項は無限大であり，(7.49) の e^4 項は有限である！ e^4 項は 2 つの項に分けられる。1 つは Q^2 における閉線を，もう 1 つは $Q^2=\mu^2$ における閉線を含む。2 つの項の符号は逆である。何が起こっているのかをもう少し詳しくみるために，たとえば (7.24) で与えられた閉線の結果を考えてみよう。



$$\sim\left(\frac{\alpha}{3\pi}\log\left(\frac{M^2}{Q^2}\right)-\frac{\alpha}{3\pi}\log\left(\frac{M^2}{\mu^2}\right)\right)=\frac{\alpha}{3\pi}\log\left(\frac{\mu^2}{Q^2}\right) \tag{7.51}$$

2 つの項の差は有限である。上式は，特別このために与えた切断 M^2 には依存しない。そこで，M を本来の無限大にもどすことができる。(7.46) とは違って，(7.49) は有限の量で観測可能量を定義していると結論できる。にもかかわらず，あらわに計算で示したように，2 つの摂動展開は同等である。もとの級数 (7.46) では，無限個の係数が生ずるが，それは e_0 自身が有限でないことによる (e_0 は実際は無限小である)。ひとたび有限の量 e^2 で級数を書きなおすと，すべての係数は有限になる。

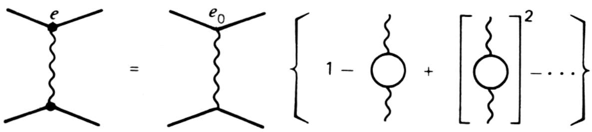
電荷をパラメター化しなおす (くり込む) ことによって，質量の次元を持つ自由に選べる量 μ が入り込んできたことに注意しよう。異なるくり込みの質量 μ^2 を選べば，振幅に対しても違った展開 (7.49′) が得られる。これを，異なるくり込みスキームを使うという。しかし，$|\mathcal{M}|^2$ は観測可能量であり，したがって μ の値をどうとるかには無関係でなければならない。この要請は次のように定式化できる：

$$\mu\frac{d\mathcal{M}}{d\mu}=\left(\mu\frac{\partial}{\partial\mu}\bigg|_e+\mu\frac{\partial e}{\partial\mu}\frac{\partial}{\partial e}\right)\mathcal{M}=0. \tag{7.52}$$

(7.49′) の係数 $F'(Q^2,\mu^2)$ によって与えられる $\mathcal{M}$ の μ 依存性は，$e(\mu^2)$ の μ 依存性によって相殺されなければならない。(7.52) は "くり込み群方程式" とよばれる。これまでほとんど言及しなかったが，その重要性は素粒子物理学の中でも群を抜いている。

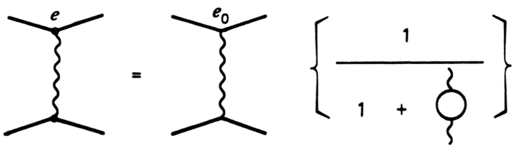
7.8 QED における電荷遮蔽：実効結合定数

これまでくりかえし，光子伝播関数中の真空偏極の閉線によって，電荷がどのように補正されるかをみてきた。(7.42) に示すように，閉線は高次の項の中でくり返して現れることがわかっている。この関係はふたたび，次のように書くことができる：



(7.53)

幾何級数は加えることができて，



(7.54)

となる。(7.54) で与えられるように，すべての真空偏極の閉線を含め，電荷を再定義するのはうまい考えであることがわかる。

$Q^2=\mu^2$ において求めた (7.53) で，物理的な（くり込まれた）電荷 e によって，無限大をどのようにして除くことができるかをみた。事実，μ^2 に対してはどんな値を用いることもできた。しかし，Q^2 の値に対する異なる選択 ${\mu_1}^2, {\mu_2}^2, \cdots$ は，数値的に異なる物理的な電荷 $e({\mu_i}^2)$ による摂動展開に対応する。実際，(7.43) の表式を用いると，(7.54) から

$$e^2(Q^2)={e_0}^2\left(\frac{1}{1+I(q^2)}\right) \tag{7.55}$$

を得る。(7.55) は，実験家が測定する電荷が，実験で用いた Q^2 に依存するという事実をはっきり示している。つまり，$\alpha(Q^2)\equiv e^2(Q^2)/4\pi$ は，"実効結合定数 (running coupling constant)" と考えることができる。

大きな $Q^2\equiv -q^2$ の極限では，$I(q^2)$ は (7.24) で与えられ，(7.55) は

$$\alpha(Q^2)=\frac{\alpha_0}{1-\dfrac{\alpha_0}{3\pi}\log\left(\dfrac{Q^2}{M^2}\right)} \tag{7.56}$$

となる。$\alpha(Q^2)$ の切断 M に対するあらわな依存性を消すために，くり込み運

動量，あるいは参照運動量 μ を選ぶ。くり込みの手順は，$\alpha(Q^2)$ から $\alpha(\mu^2)$ を引くことである。すなわち，大きな Q^2 に対して，

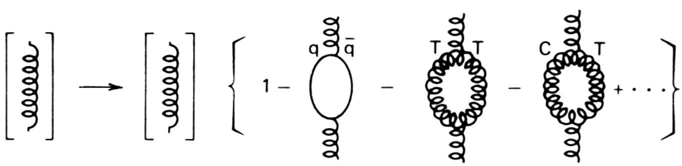
$$\boxed{\alpha(Q^2)=\frac{\alpha(\mu^2)}{1-\dfrac{\alpha(\mu^2)}{3\pi}\log\dfrac{Q^2}{\mu^2}}} \tag{7.57}$$

である。(7.57) は，有限で物理的に測定可能な量だけを含む。

実効結合定数 $\alpha(Q^2)$ は，有効電荷が，2 つの荷電粒子の距離にどのように依存するかを記述している。摂動論のすべての次数のうちの一部を加えることによって，電気力学の電荷遮蔽を得たのである (図 1·5 参照)。Q^2 が増大すると，光子はいわば，どんどん多くの電荷をみることになり，ついに天文学的に大きいが，しかし有限な Q^2 において結合 $\alpha(Q^2)$ は無限大になる。だが，数値を代入してみると，現実に到達できるすべての Q^2 に対して，Q^2 による α の変化はきわめて小さいことがわかる。Q^2 が増えると，α は 1/137 から非常にゆっくり増大する。もちろん Q^2 が増大すれば，(たとえば，$\mu^+\mu^-$ 対とか $\bar{\mathrm{u}}\mathrm{u}$ クォーク対から作られる)他の閉線もまた変化に寄与するようになる。

7.9 QCD に対する実効結合定数

QCD の結合定数 $\alpha_S(Q^2)$ の Q^2 依存性は，$\alpha(Q^2)$ の振舞いとは非常に違っていることがわかった。$\alpha_S(Q^2)$ の計算に必要な QCD Feynman 図の扱いは，$\alpha(Q^2)$ の議論にならって進められる。したがって最終的な解答 (7.57) は，$\alpha_S(Q^2)$ についても成り立つが，重大な違いがある。$\log(Q^2/\mu^2)$ の係数が同じではないのだ。係数を決定するためには，$I(q^2)$ を QCD で計算しなければならない。多少表現は違うが，図 7·4 に相当するものは，



(7.58)

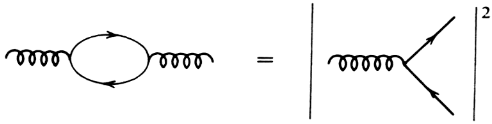
である。ここで QED にはなかった余分の項が，グルーオンのカラー自己結合から生ずる。また，C, T はそれぞれ "Coulomb" および "横" グルーオンを表す (6.13 節参照)。共変ゲージでは，これらの QCD の Feynman 図から，$\log(Q^2/\mu^2)$ の係数は

$$\frac{\alpha_S(\mu^2)}{4\pi}\left(-\frac{2}{3}n_f-5+16\right) \tag{7.59}$$

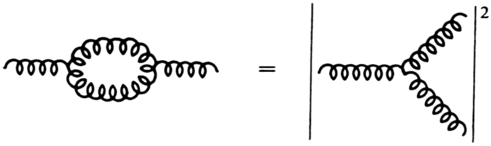
となる。(7.57) の QED 係数

$$\frac{\alpha(\mu^2)}{4\pi}\left(-\frac{4}{3}\right) \tag{7.60}$$

とは対照的である。(7.59) の各項は，順に (7.58) のそれぞれの閉線の寄与を表す。第一の閉線はよく知られている。光子がゆらいで e^+e^- 対が生ずるように，グルーオンのゆらぎで仮想 $q\bar{q}$ 対が生成される。しかしクォークの場合は，フレーバーごとに 1 つの閉線が存在する。つまり，n_f をフレーバーの数としたとき，$(-2/3)n_f$ で与えられる。QED の結果 (7.57) は，1 つのフレーバー，すなわち "n_f" → 1 (e^+e^- 閉線だけ) に対して書かれたものである。しかし，(7.60) は (7.59) の第 1 項と一致している。なぜなら，α と α_s の定義で因子 2 の違いがあったからである ((2.95) 参照)。α と α_s の関係は，10.4 節と 10.7 節でもっと詳しく議論する。フェルミオンの閉線からは負号が生ずることがわかる。同じように，2 つの横グルーオンの寄与は -5 である。実際，すべての閉線は同符号で寄与しなければならない，という定理を証明することができる。なぜならば，これらの閉線はレプトン，クォーク，グルーオン対を生成する物理的な断面積に関係しているからである。直観的に図式的に表せば，レプトンとクォークについては


(7.61)

また，2 つの横グルーオンの生成，たとえば $q\bar{q} \to g \to gg$ については


(7.62)

となる。この定理は，次のことを示唆する。すなわち，伝播関数が時間的 (time-like) になるとき，物理的に生成できるすべての状態は電荷を遮蔽することになり，したがって負の係数を持つ。

(7.58) の第 3 の閉線は，どのようにしてこの定理を破り，(7.59) で係数 $+16$ を与えるのだろうか。6.13 節の議論が手がかりになる。瞬間的な Coulomb 相互作用は，仮想縦光子およびスカラー光子の存在に関係していることをみた。

このような光子は現実の物理的状態としては決して生じない。スカラー光子と縦光子の生成確率は，互いに打ち消し合うからである。QCD における相殺はもっと複雑になる。非物理的な偏極を消すために，"ゴースト (お化け)" 粒子の導入が必要である。それは，閉線に寄与するが，物理的な粒子生成には関与しない。これが，どうして定理が成り立たないかという理由である。第 3 の閉線の符号は制限を受けず，正になることがわかる。それは正であるばかりでなく，その値も十分大きいので，$\log(Q^2/\mu^2)$ の係数全体の符号は QED の符号を逆転させてしまう。このことは，グルーオンは 8 種類あるが，クォークの色が 3 種類しかないという事実に関係している。

(7.59) と (7.57) を一緒にして，QCD の "実効結合定数" を得る：

$$\alpha_s(Q^2)=\frac{\alpha_s(\mu^2)}{1+\dfrac{\alpha_s(\mu^2)}{12\pi}(33-2n_f)\log(Q^2/\mu^2)}. \tag{7.63}$$

フレーバーが 16 以上の世界 (いまのエネルギーでは，十分この数より小さい) においてのみ，係数の符号は QED と同じになる ((7.57) 参照)。第 1 章で予想したように，$\alpha_s(Q^2)$ は Q^2 とともに減少する。したがって，短距離相互作用では小さくなる。このことを，理論が "漸近的に自由" である，という。

質量の次元を持つ 1 個のパラメター μ が，くり込みの遺物として残っている。(7.63) から，十分低いエネルギーでは，有効相互作用が大きくなることがわかる。通常，そのようになる Q^2 の尺度を Λ^2 で表す。つまり，

$$\Lambda^2=\mu^2\exp\left[\frac{-12\pi}{(33-2n_f)\alpha_s(\mu^2)}\right] \tag{7.64}$$

である。したがって，(7.63) は次のように書くことができる：

$$\boxed{\alpha_s(Q^2)=\frac{12\pi}{(33-2n_f)\log(Q^2/\Lambda^2)}.} \tag{7.65}$$

Λ^2 より十分大きい Q^2 に対して，有効結合定数は小さく，弱い相互作用をするクォークとグルーオンによる摂動の記述が意味を持つ。Q^2 が Λ^2 の大きさ程度になると，もはやこのような描像は成り立たない。クォークとグルーオンは，強く束縛された集合体，すなわちハドロンを作るようになるからである。したがって Λ は，ほとんど自由なクォークとグルーオンの世界と，パイオンや陽子などの世界を分ける境界を指定する量と考えることができる。Λ の値は理論では予言できない。それは実験から決められるべき自由パラメターであって，典型的なハドロン質量の大きさの程度と期待してよいだろう。

第 10, 11 章で，たしかに，Λ がほぼ 0.1 から 0.5 GeV の間にあることがわかる。こうして，$Q^2=(30\ \mathrm{GeV})^2$ の実験では，(7.65) から α_s が 0.1 程度の大きさになる。したがってこの場合には，QED とまったく同じように QCD 摂動論を適用できる。大きな Q^2 の極限では，すべてのクォーク質量は無視でき，QCD の質量尺度 (スケール) には寄与しない。にもかかわらず，理論を通して入ってくるくり込みに固有の質量尺度 Λ が存在する。

7.10　まとめとコメント

場の理論における無限大の話は，ここで終わるのではない。とくに本章では $Q^2 \to 0$ の極限，つまり非常に低エネルギーの光子と関連する赤外発散については議論しなかった。この議論は第 11 章にゆずる。　そこでは，摂動 QCD の議論の中で，赤外発散が重大な役割を演ずる。

この章では，QED (および QCD) 振幅の摂動展開に現れる閉線による物理的効果を，くり込みによってどのように計算できるかを示した。閉線図に現れる無限大は，前章における電荷 (あるいはカラー荷) の素朴な定義から必然的に導かれる結果であった。裸の電荷から物理的な電荷への変換を正しくパラメター化すると閉線は有限となり，実験にかかる効果を生ずる。くり込みに基づく計算は実験と一致する。Lamb シフトと異常磁気モーメントはその驚くべき例証である。閉線は裸のレプトンに "衣を着せ"，その結果，レプトンはもはや単純な点状粒子ではなくなる。それらはたとえば，真に複合的な中性子や陽子のように，異常磁気モーメントを獲得する (第 2 章参照)。すべての閉線の完全な計算には，電荷と同様，粒子の質量と波動関数についてもパラメター化をしなおす (くり込む) 必要がある。その手続きは，電荷の議論と非常によく似ている。

8

ハドロンの構造

第3章から第7章までに，レプトンとクォークの電磁相互作用に対する定量的な計算の仕方を学んだ。同じ手法によって，クォークとグルーオンのカラー相互作用を計算することもできるだろう。だが，たちどころに問題が発生する。カラー（強い）相互作用を研究する実験は，ハドロン（たとえば，核標的と相互作用する陽子ビームや2次πビーム）を用いて行われており，場の量子論で記述するクォークやグルーオンを使ってはいない。この事情は，原子物理学に似ている。そこでは複雑な原子を含む実験が，その構成子である電子の電磁相互作用によって解釈されなければならない。この類似性が問題を明らかにする。たとえば，陽子をその構成要素としてのクォークとグルーオンで記述する波動関数を見出す必要がある。この章では，ハドロンのクォーク・グルーオン構造を決定できる実験的な手法を述べる。すなわち，レプトンのハドロン標的による深非弾性散乱である。こうして得た構造関数を第9章で示そう。第10,11章で目標に到達し，クォーク・グルーオンのQCD計算によって，レプトンとハドロンを含む実験結果を予言する。

議論の中で明らかになるが，これらの構造関数は，第2章で導入した静的クォーク波動関数そのものではないが，間接的には関係している。

8.1　電子で電荷分布を探る：形状因子

対象物に電子線をあて，その散乱によって対象物の“写真をとる”というのは，物理学ではすでに十分証明ずみの技術である。図8·1に示した電荷分布，たとえば原子の電子雲の分布を決定することを考えよう。その方法は，散乱電子の角分布を測定し，点電荷からの散乱電子の（よく知られた）断面積と

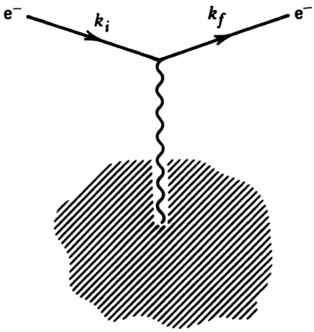


図 8·1　荷電雲による最低次の電子散乱

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}=\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{点}|F(q)|^2 \tag{8.1}$$

のような形で比較することである。ここで q は，入射電子と標的間の運動量移行 (momentum transfer)，$q=k_i-k_f$ である (図 8·1 参照)。上のようにして決定した形状因子 $F(q)$ から，標的の構造を推論してみよう。

まず，エネルギー E の無偏極電子が，静止したスピンを持たない電荷分布 $Ze\,\rho(\boldsymbol{x})$ から散乱される場合を考えることによって，この手法は直観的に理解できる。ここで

$$\int\rho(\boldsymbol{x})\,d^3x=1 \tag{8.2}$$

のように規格化しておく。静止標的に対して，(8.1) の形状因子は，ちょうど電荷分布の Fourier 変換

$$F(\boldsymbol{q})=\int\rho(\boldsymbol{x})\,e^{i\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{x}}d^3x \tag{8.3}$$

になっている。構造を持たない標的による規準断面積は

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{点}\equiv\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\rm Mott}=\frac{(Z\alpha)^2E^2}{4k^4\sin^4(\theta/2)}\left(1-v^2\sin^2\frac{\theta}{2}\right) \tag{8.4}$$

である。ここで，$k=|\boldsymbol{k}_i|=|\boldsymbol{k}_f|$，$v=k/E$ であり，θ は電子の散乱角を表す。

問題 8.1　(8.3) と (8.4) を導くことは，前章で考えた手法のちょうどよい練習になる。以下にその手順の概略を示そう。$Ze\rho(\boldsymbol{x})$ による電磁場は $A^\mu=(\phi,\boldsymbol{0})$ である。ここで (6.59) を用いて

$$\nabla^2\phi=-Ze\rho(\boldsymbol{x})$$

が成り立つ。(6.4) と (6.6) を用いて，散乱振幅は

$$T_{fi}=-i2\pi\delta(E_f-E_i)(-e\bar{u}_f\gamma_0u_i)\int e^{i\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{x}}\phi(\boldsymbol{x})\,d^3x \tag{8.5}$$

となることを示せ (7.1 節も参照)。また次式を証明せよ：

$$\int e^{iq\cdot x}\nabla^2\phi d^3x=-|\boldsymbol{q}|^2\int e^{iq\cdot x}\phi d^3x.$$

こうして (8.5) の積分は，$ZeF(\boldsymbol{q})/|\boldsymbol{q}|^2$ となることを示せ ((7.9) 参照)。4.3 節の議論にしたがって，固定標的による微分断面積は，

$$d\sigma=\frac{|T_{fi}|^2}{T}\frac{d^3k_f}{(2\pi)^3 2E_f}\left(\frac{1}{v2E_i}\right) \tag{8.6}$$

となることを確かめよ。ここで

$$d^3k_f\,\delta(E_f-E_i)=kEd\Omega$$

である。電子スピンについて終状態では和を，始状態では平均をとると，

$$\frac{1}{2}\sum_{s_f,s_i}|\bar{u}_f\gamma_0 u_i|^2=4E^2\left(1-v^2\sin^2\frac{\theta}{2}\right) \tag{8.7}$$

を得る。θ は 7.1 節で導入した角度である。この答えを (6.25) を用いて確かめよ。

以上の結果をすべて使うと，すでに出てきた結果

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}=\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{Mott}}|F(\boldsymbol{q})|^2$$

を得る。ただし $F(q)$ は，(8.3) で与えた形状因子である。

問題 8.2　もし電子ビームを "点状" でスピンのない粒子ビームとしたときは，単に，(8.7) を $4E^2$ で置き換えればよいことを示せ。しかし，非相対論的極限 $v\to 0$ では，なぜ電子スピンによる差が現れないのか，という疑問が生ずる。(6.13) 以下の議論が手がかりを与える。

問題 8.3　電子のヘリシティーを考えて，相対論的極限では，(8.7) でなぜ $\cos^2(\theta/2)$ の振舞いが予想されるかを説明せよ (6.6 節参照)。

規格化条件 (8.2) のおかげで

$$F(0)\equiv 1 \tag{8.8}$$

となる。もし $|\boldsymbol{q}|$ が大きくないならば，(8.3) の指数関数を展開して，

$$\begin{aligned}F(\boldsymbol{q})&=\int\left(1+i\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{x}-\frac{(\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{x})^2}{2}+\cdots\right)\rho(\boldsymbol{x})\,d^3x\\&=1-\frac{1}{6}|\boldsymbol{q}|^2<r^2>+\cdots\end{aligned} \tag{8.9}$$

を得る。ただし，ρ は球対称，すなわち $r\equiv|\boldsymbol{x}|$ のみの関数と仮定した。したがって小角度散乱によって，まさしく電荷雲の 2 乗平均半径 $<r^2>$ が測定される。つまり，小さな $|\boldsymbol{q}|$ の極限では，図 8･1 の光子はソフトであり，その長波長光子は電荷分布 $\rho(r)$ の広がり以下は分解できないので，構造の詳細には敏感ではありえない。

問題 8.4　もし電荷分布 $\rho(r)$ が指数関数 e^{-mr} で表されるならば，(8.3) を用いて，形状因子は

$$F(|\boldsymbol{q}|)=\left(1-\frac{q^2}{m^2}\right)^{-2}$$

となることを示せ。ここで $q^2=-|\boldsymbol{q}|^2$ である。

8.2　電子・陽子散乱：陽子形状因子

前節の議論は，陽子の構造を探り出すのには直接適用できない。第一に電子の散乱には，電荷だけではなく陽子の磁気モーメントも含まれている。第二に陽子は静止しているのではなく，電子の照射によって反跳を受ける。もし陽子が Dirac の磁気モーメント $e/2M$ を持つ点状電荷 e であれば，すでに答えはわかっている。つまり，電子・ミューオン散乱の結果 (6.50) を用いることができ，単にミューオンの質量を陽子の質量で置き換えればよい。すなわち

$$\left.\frac{d\sigma}{d\Omega}\right|_{\text{lab}}=\left(\frac{\alpha^2}{4E^2\sin^4(\theta/2)}\right)\frac{E'}{E}\left\{\cos^2\frac{\theta}{2}-\frac{q^2}{2M^2}\sin^2\frac{\theta}{2}\right\}. \tag{8.10}$$

ここで (6.48) で与えられる因子

$$\frac{E'}{E}=\frac{1}{1+\dfrac{2E}{M}\sin^2\dfrac{\theta}{2}}$$

は，標的の反跳から生ずる。

電子・ミューオンの散乱断面積の計算にならって，電子・陽子弾性散乱の最低次の振幅，図 8·2 は次のようになる ((6.8) 参照)：

$$T_{fi}=-i\int j_\mu\left(-\frac{1}{q^2}\right)J^\mu d^4x.$$

ここで，$q=p'-p$ であり，電子と陽子の遷移カレントはそれぞれ

$$j^\mu=-e\bar{u}(k')\gamma^\mu u(k)e^{i(k'-k)\cdot x}, \tag{8.11}$$

$$J^\mu=e\bar{u}(p')[\quad]u(p)e^{i(p'-p)\cdot x} \tag{8.12}$$

で与えられる ((6.6) 参照)。陽子は広がった構造を持つので，(8.11) のような点状のスピン 1/2 粒子のように，(8.12) の角括弧を γ^μ で置き換えることはできない。しかし，次のことがわかっている。J^μ は Lorentz 4 元ベクトルのはずだから，p, p', q および Dirac の γ 行列を $\bar{u}, u$ ではさんだ量から作られるもっ

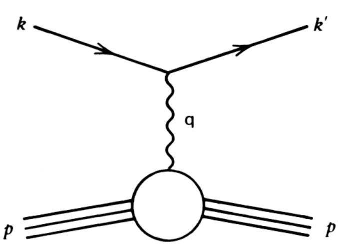


図 8·2　最低次の電子・陽子弾性散乱

とも一般的な 4 元ベクトル形式を用いなければならない。独立な項は 2 つ，すなわち γ^μ と $i\sigma^{\mu\nu}q_\nu$ が存在し，それらの係数は q^2 の関数である（q^2 は陽子バーテックスにおける唯一の独立なスカラー変数である）。γ^5 を含む項はパリティ保存によって除外される。したがって，もっとも一般的に (8.12) の角括弧は

$$[\quad]=\left[F_1(q^2)\gamma^\mu+\frac{\varkappa}{2M}F_2(q^2)\,i\sigma^{\mu\nu}q_\nu\right] \tag{8.13}$$

の形に書くことができる。ただし，F_1 と F_2 は 2 つの独立な形状因子，$\varkappa$ は異常磁気モーメントである（問題 6.2 参照)。

問題 8.5 カレント保存 $\partial_\mu J^\mu=0$ から，可能な 4 元ベクトルとして $(p-p')^\mu$ が除外されることを示せ。(8.13) は，なぜ $(p+p')^\mu$ を含まないのか。

問題 8.6 $p\cdot q$ を q^2 で表すことにより，それが独立変数ではないことを示せ。

$q^2\to 0$ の場合，すなわち長波長光子を用いて調べるとき，陽子が 1 fm 程度の広がりを持っているか点状粒子かは区別できない。事実上，電荷 e，磁気モーメント $(1+\varkappa)e/2M$ の粒子をみているのである。$\varkappa$ は異常磁気モーメントで，測定値は 1.79 である。したがって (8.13) の因子は，$q^2\to 0$ の極限で

$$F_1(0)=1,\qquad F_2(0)=1 \tag{8.14}$$

のように選ばなければならない。中性子の対応する値は，$F_1(0)=0$，$F_2(0)=1$ であり，実験的には $\varkappa_n=-1.91$ である。

もし (8.13) を用いて，電子・陽子弾性散乱の微分断面積を計算するならば，(8.10) に似た表式が得られる（(6.50) 参照)。

$$\left.\frac{d\sigma}{d\Omega}\right|_{\text{lab}}=\left(\frac{\alpha^2}{4E^2\sin^4(\theta/2)}\right)\frac{E'}{E}\left\{\left(F_1{}^2-\frac{\varkappa^2q^2}{4M^2}F_2{}^2\right)\cos^2\frac{\theta}{2}-\frac{q^2}{2M^2}(F_1+\varkappa F_2)^2\sin^2\frac{\theta}{2}\right\} \tag{8.15}$$

これは Rosenbluth の公式として知られている。図 8･2 の丸で表されている陽子の詳細な構造は知らないので，それを 2 つの形状因子 $F_{1,2}(q^2)$ によってパラメター化した。これらの形状因子は，$d\sigma/d\Omega$ を θ と q^2 の関数として測定することにより実験的に決定できる。もし陽子がミューオンのような点状粒子なら $\varkappa=0$ となり，すべての q^2 に対して $F_1(q^2)=1$ が成り立ち，(8.15) は (8.10) にもどる。実用上は，$F_{1,2}$ の線形結合

$$\begin{aligned} G_E&\equiv F_1+\frac{\varkappa q^2}{4M^2}F_2,\\ G_M&\equiv F_1+\varkappa F_2 \end{aligned} \tag{8.16}$$

を用いると，断面積の中に干渉項 G_EG_M が現れないので都合がよい。したがって (8.15) は

$$\left.\frac{d\sigma}{d\Omega}\right|_{\mathrm{lab}}=\frac{\alpha^2}{4E^2\sin^4(\theta/2)}\frac{E'}{E}\left(\frac{G_E{}^2+\tau G_M{}^2}{1+\tau}\cos^2\frac{\theta}{2}+2\tau G_M{}^2\sin^2\frac{\theta}{2}\right) \qquad (8.17)$$

となる。ここで $\tau\equiv-q^2/4M^2$ である。

干渉項が消えたので，これらの陽子形状因子は，8.1 節で導入した非相対論的形状因子の一般化とみなしてよいだろう。もしそれらの Fourier 変換を陽子の電荷，および磁気モーメント分布と解釈できれば都合がよい。しかし，残念ながら，陽子の反跳があるので，そのような解釈はできない。だが，形状因子 $G_E(q^2)$, $G_M(q^2)$ が，$\boldsymbol{p}'=-\boldsymbol{p}$ で定義される Breit（あるいは，brick wall（レンガの壁））系と呼ぶ特別な Lorentz 系をとれば，陽子の電荷および磁気モーメントの分布と密接に関係することが示される。

問題 8.7 (8.12) の陽子の遷移カレント J^μ は，次のように書けることを示せ：

$$J^\mu(0)=e\bar{u}(p')\left[\gamma^\mu(F_1+\kappa F_2)-\frac{(p^\mu+p'^\mu)}{2M}\kappa F_2\right]u(p). \qquad (8.18)$$

Breit 系 ($\boldsymbol{p}'=-\boldsymbol{p}$) で $J^\mu(0)\equiv(\rho,\boldsymbol{J})$ を評価せよ。この系では，陽子へのエネルギー移行わない。あたかも陽子は，レンガの壁ではね返されるように振舞う (図 8·3 参照)。z 軸を $\boldsymbol{p}$ に沿って選び，ヘリシティースピノールを用いて，

$$\begin{aligned}\rho&=2MeG_E(q^2), & \lambda&=-\lambda',\\ J_1\pm iJ_2&=\mp2|\boldsymbol{q}|eG_M(q^2), & \lambda&=\lambda'=\mp\frac{1}{2}\end{aligned} \qquad (8.19)$$

および，すべて他の行列要素は 0 になることを示せ。λ と λ' は始状態と終状態の陽子ヘリシティーを表す。仮想光子のヘリシティーにつき，対応する値を決定せよ。

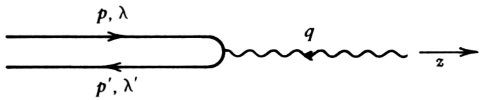


図 8·3 Breit 系（またはレンガの壁系）$\boldsymbol{p}'=-\boldsymbol{p}$.

8.1 節の形状因子の一般化では，$F(|\boldsymbol{q}|)$ を $F(q^2)$ で置き換えた。しかし，$|\boldsymbol{q}|^2\ll M^2$ であるかぎり，8.1 節と同様 Fourier 変換を使うことができる。

問題 8.8 $|\boldsymbol{q}^2|\ll M^2$ に対して，形状因子 G_E と G_M は，それぞれ陽子の電荷および磁気モーメント分布の Fourier 変換になることを示せ。

G_E と G_M を電気および磁気形状因子という。q^2 の異なる値における，ep

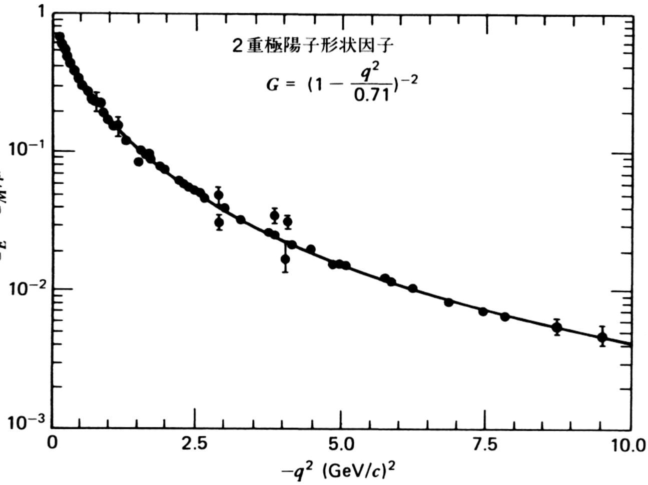


図 8・4　q^2 の関数としての陽子形状因子

→ ep 散乱の角度依存性のデータを用いて，G_E, G_M を分離することができる ((8.17) 参照)。$G_E(q^2)$ の結果を図 8・4 に示す。$G_M(q^2)$ は同じ q^2 依存性を持つ。図 8・4 をよくみると，

$$G_E(q^2) \approx \left(1 - \frac{q^2}{0.71}\right)^{-2} \qquad (\text{GeV}^2 \text{ 単位}) \tag{8.20}$$

が成り立つことがわかる。小さな $-q^2$ に対する振舞いを利用して，(8.9) の展開項における残りの項を決定することができる。とくに陽子半径の 2 乗平均は，

$$\langle r^2 \rangle = 6\left(\frac{dG_E(q^2)}{dq^2}\right)_{q^2=0} = (0.81 \times 10^{-13}\ \text{cm})^2 \tag{8.21}$$

である。磁気モーメント分布についても，およそ 0.8 fm という同じ半径を得る。問題 8.4 の結果を用いて，粒子の電荷分布は配位空間において指数関数形を持つことが結論される。

8.3　非弾性電子・陽子散乱：ep → eX

陽子の大きさを測ってみると，空間分解能を向上させるために光子の $-q^2$ を大きくして，陽子の構造をさらに詳しくみてみたいと思うだろう。このことは，単に照射電子のエネルギー損失を大きくすれば可能になる。だが，ここに落し穴がある。陽子へのエネルギー移行が大きくなると，陽子はしばしば破壊されるので，図 8・2 の描像を図 8・5 のように一般化しなければならない。さほど大

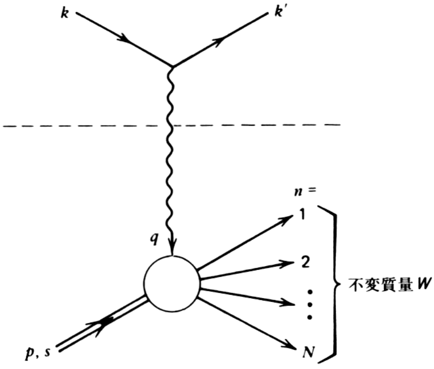


図 8·5 ep → eX の最低次の Feynman 図

きくない $-q^2$ では，陽子は Δ 状態に励起し余分の π メソンが生成される。すなわち $ep \to e\Delta^+ \to ep\pi^0$ である。これらの反応では不変質量 (図 8·5 参照) は $W^2 \simeq M_\Delta{}^2$ となる。$-q^2$ が非常に大きくなると，始状態の陽子はばらばらになってしまい，陽子としての存在を完全に失ってしまう。したがって，測定から情報を引き出すために，新しい定式化を工夫しなければならなくなる。図 8·6 は不変質量分布を示す。陽子が壊れない場合のピーク ($W=M$) と，標的がバリオン共鳴状態に励起するときのもっと幅の広い分布に注目する。共鳴状態をこえると，観測しないハドロンの質量 W に対して，大きな不変質量を持つ複雑な多粒子状態の滑らかな分布が生ずる。

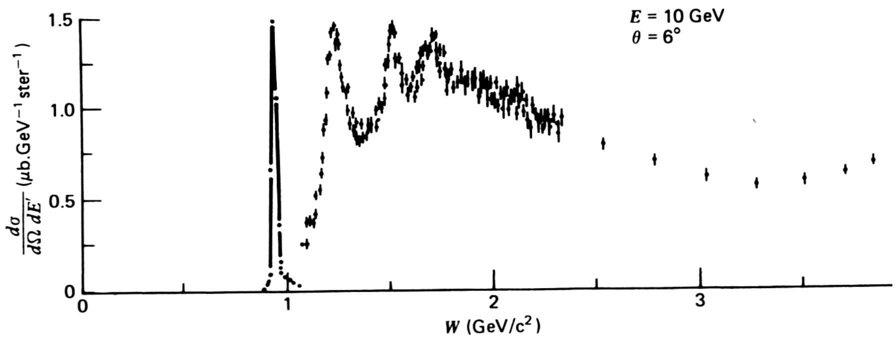


図 8·6 観測しないハドロン質量 W に対する ep → eX の断面積。データは Stanford 線型加速器センターによる。$W=M$ における弾性散乱のピークは，1/8.5 に縮めてある。

直面する問題は，(8.11),(8.12) および図 8・2 を思いおこせば明らかになる。標的をミューオンから陽子に変えるため，レプトンカレント j_μ ($\sim\bar{u}\gamma^\mu u$) を陽子カレント J^μ($\sim\bar{u}\Gamma^\mu u$) で置き換え，Γ^μ のもっとも一般的な形を作った。しかし，これは図 8・5 の非弾性現象を記述するには不十分である。図 8・5 の点線より上の部分はすべて変わらないが (この事実をこれから利用しよう)，点線以下の終状態は行列要素あるいはカレントの中に入っている Dirac スピノール "$\bar{u}$" によって記述されるような単一フェルミオンではない。つまり J^μ は (8.12) よりもっと複雑な構造を持っているはずである。そのために，断面積の表式 ((6.18) 参照)

$$d\sigma\sim L_{\mu\nu}{}^{\mathrm{e}}(L^p)^{\mu\nu} \tag{8.22}$$

はただちに

$$d\sigma\sim L_{\mu\nu}{}^{\mathrm{e}}W^{\mu\nu} \tag{8.23}$$

のように一般化される。ただし，$L_{\mu\nu}{}^{\mathrm{e}}$ は (6.20) のレプトンテンソルを表す。なぜならば，図 8・5 において，光子の伝播関数より上のレプトン部分はまったく変わらないからである。だが，伝播関数のもう一方の端におけるカレントの形は全然知らないので，それを，ハドロンテンソル $W_{\mu\nu}$ を用いてパラメター化した。

テンソル $W^{\mu\nu}$ のもっとも一般的な形は，$g^{\mu\nu}$ および互いに独立な運動量 p, q ($p'=p+q$) から構成されなければならない。ここではすでに，スピンについての和と平均を実行し断面積をパラメター化しているので，γ^μ は含まれない。$W^{\mu\nu}$ を次のように書く：

$$W^{\mu\nu}=-W_1g^{\mu\nu}+\frac{W_2}{M^2}p^\mu p^\nu+\frac{W_4}{M^2}q^\mu q^\nu+\frac{W_5}{M^2}(p^\mu q^\nu+q^\mu p^\nu). \tag{8.24}$$

ここで，$W^{\mu\nu}$ への反対称部分の寄与は省略した。$L_{\mu\nu}{}^{\mathrm{e}}$ が対称であるから，断面積に対する反対称部分の寄与は，(8.23) へ代入すると消えてしまうからである。この記法では W_3 を省略したことに注意する。電子ビームのかわりにニュートリノビームを用いたときのパリティを破る構造関数については，こうはいかない。したがって試験体は仮想光子にかわって弱ボソンで置き換えられる (Perl (1974), Close (1979), Llewellyn Smith (1972) 参照)。

問題 8.9 $L_{\mu\nu}{}^{\mathrm{e}}=L_{\nu\mu}{}^{\mathrm{e}}$ および

$$q^\mu L_{\mu\nu}{}^{\mathrm{e}}=q^\nu L_{\mu\nu}{}^{\mathrm{e}}=0 \tag{8.25}$$

を示せ。

問題 8.10 ハドロンバーテックスにおけるカレントの保存

$$q_\mu W^{\mu\nu}=q_\nu W^{\mu\nu}=0 \tag{8.26}$$

を示せ。証明は (8.39) のあとまで延ばそう。それは $\partial_\mu \tilde{J}^\mu=0$ から導かれる。(8.26) の結果として，

$$W_5=-\frac{p\cdot q}{q^2}W_2,$$

$$W_4=\left(\frac{p\cdot q}{q^2}\right)^2 W_2+\frac{M^2}{q^2}W_1$$

を証明せよ。

つまり，(8.24) の 4 つの構造関数のうち 2 つだけが独立であり，次のように書くことができる：

$$W^{\mu\nu}=W_1\left(-g^{\mu\nu}+\frac{q^\mu q^\nu}{q^2}\right)+W_2\frac{1}{M^2}\left(p^\mu-\frac{p\cdot q}{q^2}q^\mu\right)\left(p^\nu-\frac{p\cdot q}{q^2}q^\nu\right). \tag{8.27}$$

上式で，W_i はハドロンバーテックスにおいて，4 元運動量から作られる Lorentz スカラー変数の関数である。弾性散乱とは違って 2 つの独立変数があるが，それを

$$q^2 \quad と \quad \nu\equiv\frac{p\cdot q}{M} \tag{8.28}$$

のように選ぶ。最終的なハドロン系の不変質量 W は，

$$W^2=(p+q)^2=M^2+2M\nu+q^2 \tag{8.29}$$

によって ν と q^2 に関係している。

問題 8.11　普通 ν と q^2 を，次元のない変数

$$x=\frac{-q^2}{2p\cdot q}=\frac{-q^2}{2M\nu}, \qquad y=\frac{p\cdot q}{p\cdot k} \tag{8.30}$$

で置き換える。ただし 4 元運動量は図 8·5 に示してある。ep → eX の運動学的に許される領域は，$0\le x\le 1$ と $0\le y\le 1$ であることを示せ。この物理領域を ν, q^2 平面に示せ。また，その答えを図 9·3 と比べよ。

問題 8.12　標的陽子の静止系において，

$$\nu=E-E', \qquad y=\frac{E-E'}{E}$$

を示せ。E と E' は始状態および終状態の電子のエネルギーである。

ep → eX に対する断面積を求めるには，$L_{\mu\nu}^{\text{muon}}$(あるいは $L_{\mu\nu}^{\text{p}}$) を (8.27) の $W_{\mu\nu}$ で置き換え，$e^-\mu^-\to e^-\mu^-$ (あるいは ep → ep) と同じ計算をくり返せばよい。$(L^e)^{\mu\nu}$ に対しては (6.25) を用い，(8.25) に注意して次式を得る：

$$(L^{\mathrm{e}})^{\mu\nu}W_{\mu\nu}=4\,W_1(k\cdot k')+\frac{2\,W_2}{M^2}[2(p\cdot k)(p\cdot k')-M^2k\cdot k']. \tag{8.31}$$

実験室系では，上式は

$$(L^{\mathrm{e}})^{\mu\nu}W_{\mu\nu}=4EE'\{\cos^2(\theta/2)\,W_2(\nu,q^2)+\sin^2(\theta/2)2\,W_1(\nu,q^2)\} \tag{8.32}$$

となる ((6.44) 参照)。フラックス因子 (4.32) と，出ていく電子の位相空間因子 (4.24) を含めて，非弾性電子・陽子散乱 ep → eX の包含†微分断面積を求めることができる。すなわち

$$d\sigma=\frac{1}{4\{(k\cdot p)^2-m^2M^2\}^{1/2}}\left\{\frac{e^4}{q^4}(L^{\mathrm{e}})^{\mu\nu}W_{\mu\nu}4\pi M\right\}\frac{d^3k'}{2E'(2\pi)^3}. \tag{8.33}$$

ただし $\overline{|\mathcal{M}|^2}$ は中括弧で与えられる ((6.18) 参照)。余分な因子 $4\pi M$ は，$W^{\mu\nu}$ の規格化に標準的な約束を採用したためである。(8.32) を (8.33) に代入すると次式を得る：

$$\boxed{\left.\frac{d\sigma}{dE'd\Omega}\right|_{\mathrm{lab}}=\frac{\alpha^2}{4E^2\sin^4(\theta/2)}\left\{W_2(\nu,q^2)\cos^2\frac{\theta}{2}+2\,W_1(\nu,q^2)\sin^2\frac{\theta}{2}\right\}.} \tag{8.34}$$

ここでは，よくやるように，電子の質量は無視した。

8.4 ep 散乱解析に対する定式化のまとめ

われわれはすでに目的を達成したが，この定式化を別の立場からみることは有益である。最後の結果 (8.34) は，次の形に書き直すことができる ((8.32) および (6.44) 参照)：

$$\frac{d\sigma}{dE'd\Omega}=\frac{\alpha^2}{q^4}\cdot\frac{E'}{E}(L^{\mathrm{e}})^{\mu\nu}W_{\mu\nu}. \tag{8.35}$$

比較のために $e\mu^-\to e\mu^-$ の断面積 (6.46)

$$d\sigma=\frac{1}{4ME}\frac{d^3k'}{(2\pi)^32E'}\frac{d^3p'}{(2\pi)^32p_0'}\left\{\frac{e^4}{q^4}(L^{\mathrm{e}})^{\mu\nu}L_{\mu\nu}^{\mathrm{muon}}\right\}(2\pi)^4\delta(p+q\to p') \tag{8.36}$$

を思い出してみよう。これはまた (8.35) の形に書くことができる。すなわち

$$W_{\mu\nu}=\frac{1}{4\pi M}\left(\frac{1}{2}\sum_s\sum_{s'}\right)\int\frac{d^3p'}{(2\pi)^32p_0'}<p,s\,|\,\tilde{J}_\mu{}^\dagger\,|\,p',s'>$$

---

† (訳註) 反応 a+b → c+X において，粒子 c のみを観測して，X に含まれているいろいろな粒子を観測しないとき，これを inclusive (包含) 反応と呼ぶ。これに対して $a+b\to c_1+c_2+\cdots+c_n$ のように，終状態の限定した粒子はすべて観測する反応を exclusive (限定とでもいうべきか) 反応と呼ぶ。命名は Feynman による。

$$\times <p', s'|\tilde{J}_\nu|p, s>(2\pi)^4\delta^4(p+q-p'), \tag{8.37}$$

ここで

$$<p', s'|\tilde{J}_\nu|p, s> \equiv \bar{u}^{(s')}(p')\gamma_\nu u^{(s)}(p). \tag{8.38}$$

(8.37) を (8.35) へ代入すると (6.49) が再現される。ここで行ったことはすべて，以前の計算に現れた因子の特別な組みかえを利用している。(8.13) で与えた [　] を用いて $\bar{u}$ [　] u を作り，(8.38) を置き換えると，ep → ep 散乱の結果を再現できる。ところで，この理由として次の点を注意しておく。ep → eX では，陽子が壊れて終わりのハドロン状態 X に多数の粒子を生成する。この場合の $W_{\mu\nu}$ は，(8.37) を一般化したものにすぎない。形式的には次のように書くことができる：

$$W_{\mu\nu}=\frac{1}{4\pi M}\sum_N\left(\frac{1}{2}\sum_s\right)\int\prod_{n=1}^N\left(\frac{d^3p_n'}{2E_n'(2\pi)^3}\right)\sum_{sn}<p, s|\tilde{J}_\mu{}^\dagger|X>$$
$$\times <X|\tilde{J}_\nu|p, s>(2\pi)^4\delta^4(p+q-\sum_n p_n'). \tag{8.39}$$

ここで，あらゆる可能な多粒子 (たとえば N 個の粒子) 状態 X に対する和が含まれている (図 8・5 参照)。

あとのために，形状因子について得た結果の概要をまとめておこう。図 6・10 の実験室系の運動学を用い，電子の質量は無視する。すべての反応に対して，散乱電子のエネルギー (E') と角度 (θ) に関する微分断面積は

$$\frac{d\sigma}{dE'd\Omega}=\frac{4\alpha^2E'^2}{q^4}\{\quad\} \tag{8.40}$$

の形に書くことができる。まず，質量 m のミューオン標的 (あるいは，クォークの分数電荷を e_q として，$\alpha^2 \to \alpha^2 e_q{}^2$ の置き換えをしたあとの質量 m のクォーク標的) に対して，

$$\{\quad\}_{e\mu\to e\mu}=\left(\cos^2\frac{\theta}{2}-\frac{q^2}{2m^2}\sin^2\frac{\theta}{2}\right)\delta\left(\nu+\frac{q^2}{2m}\right) \tag{8.41}$$

を得る。陽子標的からの弾性散乱に対して，

$$\{\quad\}_{ep\to ep}=\left(\frac{G_E{}^2+\tau G_M{}^2}{1+\tau}\cos^2\frac{\theta}{2}+2\tau G_M{}^2\sin^2\frac{\theta}{2}\right)\delta\left(\nu+\frac{q^2}{2M}\right) \tag{8.42}$$

である。ここで $\tau=-q^2/4M^2$, M は陽子の質量である。最後に，照射電子によって陽子標的が壊れたときは

$$\{\quad\}_{ep\to eX}=W_2(\nu, q^2)\cos^2\frac{\theta}{2}+2W_1(\nu, q^2)\sin^2\frac{\theta}{2} \tag{8.43}$$

となる。δ 関数を利用して，(8.41), (8.42) を E' につき積分することができる。結果は

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}=\frac{\alpha^2}{4E^2\sin^4\frac{\theta}{2}}\frac{E'}{E}(\quad) \tag{8.44}$$

となる((6.50) 参照)。

問題 8.13 上の結果では,(最低次の) 1 個の光子交換が主要な寄与をする。もし 2 光子交換が重要とすると, e^-p と e^+p 断面積は等しくないことを確かめよ。

8.5 (仮想) 光子・陽子全断面積としての非弾性電子散乱

上の議論から明らかなように, 重要なことは (仮想) 光子が陽子と相互作用する場所, すなわち図 8･5 の破線より下で何が起こっているかである。電子ビームは, 仮想光子を作り出す役割を果しているにすぎない。このことを, 定式化の中ではっきり示しておくのがよいだろう。エネルギー $q^0=\nu\equiv K$ と(横)偏極 ε を持つ実光子が, 前と同じ無偏極陽子から散乱し, 終状態に 2 つ, あるいはそれ以上の粒子を生成する場合の全断面積を書くことからはじめよう。これまでに開発してきた Feynman 則と断面積の運動学を用いて次式を得る：

$$\sigma^{\text{tot}}(\gamma \text{p}\to \text{X})=\frac{1}{(2K)(2M)}\sum_N\left(\frac{1}{2}\sum_s\right)\int\prod_{n=1}^N\left(\frac{d^3p_n{}'}{2E_n{}'(2\pi)^3}\right)$$
$$\times\sum_{s_n}(2\pi)^4\delta^4(p+q-\sum_n p_n{}')\varepsilon^{\mu *}\varepsilon^{\nu}e^2<p,s\,|\,\tilde{J}_\mu{}^\dagger\,|\,X><X\,|\,\tilde{J}_\nu\,|\,p,s>. \tag{8.45}$$

前と同様, すべての終状態 X についての和が含まれている。もし W を終状態の不変質量とすれば,

$$W^2=(p+q)^2=M^2+2MK \tag{8.46}$$

が得られる。ここでただちに, (8.39) で与えた $W_{\mu\nu}$ の形式的な表式と (8.45) の間の著しい類似性に気づく。たしかに (8.45) は, 単純に

$$\sigma^{\text{tot}}(\gamma \text{p}\to \text{X})=\frac{4\pi^2\alpha}{K}\varepsilon^{\mu *}\varepsilon^{\nu}W_{\mu\nu} \tag{8.47}$$

のように書くことができるだろう。だがここに重要な条件がある。実光子では, 入射光子の 2 つの横偏極についてのみ和をとればよかった。他方, ep → eX のハドロンテンソル $W_{\mu\nu}$ を光子・陽子全断面積として解釈するために, 光子が仮想的であり, 2 つの偏極状態だけに限られない点を思いおこすことが大切である。事実, 仮想光子の断面積は, 十分明確な概念ではない。$q^2=0$ のとき, $K=\nu$ であり, フラックス因子は $4\,MK$ で与えられる。しかし仮想光子 ($q^2\neq 0$) では, フラックスは任意でよい。それはふつう, 実験室系で K が (8.46) を満たす

ように選ぶ。すなわち

$$K=\frac{W^2-M^2}{2M}=\nu+\frac{q^2}{2M}. \tag{8.48}$$

これは，Hand の約束として知られている。他にも $K=|\boldsymbol{q}|$のように選ぶことができる。

構造関数の解釈を完全にするにあたって，仮想光子 (ヘリシティー λ) の偏極ベクトル $\varepsilon_\lambda{}^\nu$ を明確にしておかなければならない。z 軸を $\boldsymbol{q}$ に沿ってとり，次式を用いる ((6.92) 参照；さらに進んだ議論は，Budner et al. Phys. Rev. C15 **181** (1975) にある)。

$$\lambda=\pm 1: \quad \varepsilon_\pm=\mp\sqrt{\frac{1}{2}}(0\,;1,\pm i,0), \tag{8.49}$$

$$\lambda=0: \quad \varepsilon_0=\frac{1}{\sqrt{-q^2}}(\sqrt{\nu^2-q^2}\,;0,0,\nu). \tag{8.50}$$

問題 8.14 各 λ につき $q\cdot\varepsilon=0$ を確かめ，空間的光子 ($q^2<0$) に対して

$$\sum(-1)^{\lambda+1}\varepsilon^{\mu*}\varepsilon^\nu=-g^{\mu\nu}+\frac{q^\mu q^\nu}{q^2} \tag{8.51}$$

を示せ。ここで，和は (8.49) と (8.50) の 3 つの偏極状態についてとる。$q^2>0$ の場合には，因子 $(-1)^{\lambda+1}$ を落して q^2 を M で置き換え，(8.51) の和をとると，それは質量を持つベクトル粒子のスピン状態についての和と同じになる(6.12 節参照)。

こうして，無偏極陽子と相互作用する偏極光子 (ヘリシティー λ) の全断面積を評価できる：

$$\sigma_\lambda{}^{\rm tot}=\frac{4\pi^2\alpha}{K}\varepsilon_\lambda{}^{\mu*}\varepsilon_\lambda{}^\nu W_{\mu\nu}. \tag{8.52}$$

上記の偏極ベクトルとともに，$W_{\mu\nu}$ についての表式 (8.24) を用いると，横および縦断面積はそれぞれ，次のようになることがわかる：

$$\sigma_T\equiv\frac{1}{2}(\sigma_+{}^{\rm tot}+\sigma_-{}^{\rm tot})=\frac{4\pi^2\alpha}{K}W_1(\nu,q^2), \tag{8.53}$$

$$\sigma_L\equiv\sigma_0{}^{\rm tot}=\frac{4\pi^2\alpha}{K}\left[\left(1-\frac{\nu^2}{q^2}\right)W_2(\nu,q^2)-W_1(\nu,q^2)\right]. \tag{8.54}$$

問題 8.15 (8.53), (8.54) を確かめよ。$W_{\mu\nu}$ に対するテンソル分解を実験室系で書くと，計算はきわめて簡単になる。この場合，

$$p=(M\,;0,0,0),$$
$$q=(\nu\,;0,0,\sqrt{\nu^2-q^2}).$$

問題 8.16 ep → eX の微分断面積 (8.34) を $\sigma_{T,L}$ で表せ。すなわち

$$\left.\frac{d\sigma}{dE'd\Omega}\right|_{\text{lab}}=\Gamma(\sigma_T+\varepsilon\sigma_L) \tag{8.55}$$

を示せ。ここで,

$$\Gamma=\frac{\alpha K}{2\pi^2|q^2|}\frac{E'}{E}\frac{1}{1-\varepsilon}, \tag{8.56}$$

$$\varepsilon=\left(1-2\frac{\nu^2-q^2}{q^2}\tan^2\frac{\theta}{2}\right)^{-1}. \tag{8.57}$$

問題 8.17 次のように定式化が進められた。すなわち，$q^2\to 0$ のとき,

$$\begin{aligned}\sigma_{\rm T} &\longrightarrow \sigma^{\rm tot}(\gamma {\rm p}),\\ \sigma_{\rm L} &\longrightarrow 0.\end{aligned} \tag{8.58}$$

ここで，γ は実光子で，$\sigma^{\rm tot}(\gamma{\rm p})$ は (8.45) で与えられる。

一見，$W_{\mu\nu}$ は $q^2=0$ で特異性を持ちそうだが，そうなってはいけないことを確かめよ。そこで，$q^2\to 0$ のとき

$$W_2\longrightarrow 0 \quad \text{および} \quad \left(W_1+\frac{\nu^2}{q^2}W_2\right)\longrightarrow 0 \tag{8.59}$$

を示せ。つまり $\sigma_{\rm L}$ が 0 になることを確かめよ。

陽子がバラバラに壊されるような複雑な事象から，陽子の構造について，これ以上の情報を引き出すことができるのだろうか。事象の構造とその現象論的な解釈は，途方もなく難しいようにみえる。この疑問に対する解答は重要であり，次の 2 章の主題となる。

9

パートン

第8章で道具立てが準備できたので，いよいよ実験的情報を問題にして，"短波長光子は標的陽子内部のクォークを一つ一つ区別してみることができるだろうか"と問うてみよう。

9.1 Bjorken スケーリング

もしスピン1/2のクォークが，単なる点状粒子として陽子内に存在するならば，短波長(大きい $-q^2$) の仮想光子ビームを用いて (図 9·1)，それを明るみに出すことができるはずだ。このような光子が標的陽子をバラバラに壊すという事実は，前章の非弾性形状因子を用いて扱うことができる。陽子のように複雑な構造を持つ系の内部に，構造を持たない粒子が存在するという証拠は，短波長光子に対して，(8.43) で記述される陽子が突然自由 Dirac 粒子 (クォーク) のように振舞いはじめ，(8.43) が (8.41) に帰着するという事実にみることができる。つまり陽子の構造関数は簡単に

$$
\begin{aligned}
2W_1^{\text{点}} &= \frac{Q^2}{2m^2}\delta\left(\nu-\frac{Q^2}{2m}\right), \\
W_2^{\text{点}} &= \delta\left(\nu-\frac{Q^2}{2m}\right)
\end{aligned}
\tag{9.1}
$$

となる。便宜上，正の変数

$$Q^2 \equiv -q^2$$

を導入した。m はクォークの質量であり，"点"と書いたのは，クォークが構造を持たない Dirac 粒子であることを忘れないためである。(9.1) は次頁のように図解することができる。

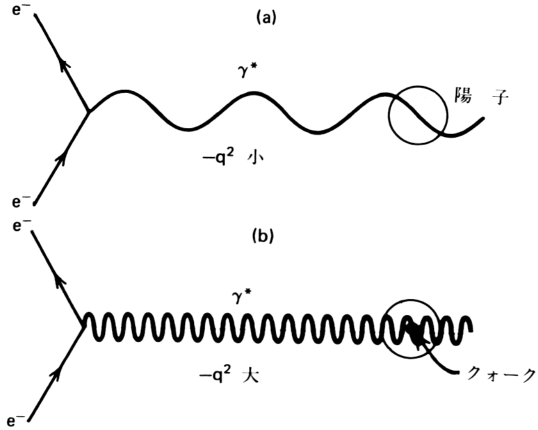
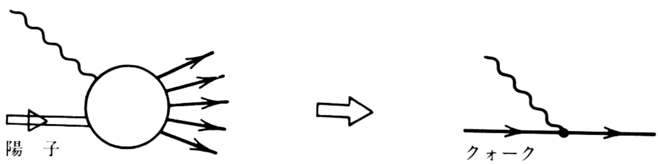


図 9·1 (a) 弾性散乱 ep→ep. 長波長 "光子ビーム" を用い，弾性形状因子の解析を通して陽子の大きさを測る。(b) 深非弾性散乱。短波長 "光子ビーム" が陽子内のクォークを構成要素として分解することができる。ただし $\lambda(\approx 1/\sqrt{-q^2}) \ll 1\text{fm}$ である。



(9.2)

つまり，大きな Q^2 の非弾性電子・陽子散乱は，単純に電子と陽子内の "自由" クォークの弾性散乱である，と考えてよい。

恒等式 $\delta(x/a) = a\delta(x)$ を用いれば，(9.1) は無次元の構造関数を導入して，

$$
\begin{aligned}
2mW_1{}^{点}(\nu, Q^2) &= \frac{Q^2}{2m\nu}\delta\left(1-\frac{Q^2}{2m\nu}\right), \\
\nu W_2{}^{点}(\nu, Q^2) &= \delta\left(1-\frac{Q^2}{2m\nu}\right)
\end{aligned}
\tag{9.3}
$$

と書き直すことができる。

これら "点" 関数は，比 $Q^2/2m\nu$ のみの関数であって，Q^2 と ν を独立変数とする関数ではない，という注目すべき性質を示す。この振舞いは，電子・陽子弾性散乱の構造関数と比較すると対照的である。簡単のため $\kappa=0$ とすれば，$G_E = G_M \equiv G$ である。(8.42) と (8.43) を比較して

$$W_1{}^{\text{弾性}}=\frac{Q^2}{4M^2}G^2(Q^2)\delta\left(\nu-\frac{Q^2}{2M}\right),$$
$$W_2{}^{\text{弾性}}=G^2(Q^2)\delta\left(\nu-\frac{Q^2}{2M}\right) \tag{9.4}$$

が得られる。(9.1) と異なり，(9.4) の構造関数は $G(Q^2)$ という因子を含み，1 個の無次元変数の関数に書き直すことはできない。構造関数には，質量のスケールがあらわに入っている。$G(Q^2)$ に対する 2 重極公式では，実験から決めた値 $M=0.71\,\mathrm{GeV}$ を用いている。これは陽子の大きさの逆数に対応する ((8.20) 参照)。Q^2 が $(0.71)^2\mathrm{GeV}^2$ を越えて増えていくと，形状因子のために弾性散乱が起こりにくくなり，むしろ陽子はバラバラに壊れやすくなる。他方，点構造関数は無次元変数 $Q^2/2m\nu$ だけに依存しており，質量の次元を持ったスケールは現れない。質量 m は，単に運動量 Q^2 と ν のスケールの意味しかない。

以上の話は次のようにまとめることができよう：もし大きな Q^2 の仮想光子が，陽子内の "点状" 構成要素まで分解できるならば，Q^2 を大きくした極限で次の関係式が成り立つ。

$$MW_1(\nu,Q^2)\xrightarrow[\text{大きい }Q^2]{}F_1(\omega),$$
$$\nu W_2(\nu,Q^2)\xrightarrow[\text{大きい }Q^2]{}F_2(\omega), \tag{9.5}$$

ただし
$$\omega=\frac{2q\cdot p}{Q^2}=\frac{2M\nu}{Q^2}. \tag{9.6}$$

(9.5) のスケールは，(9.3) で用いたものと違っていることに注意されたい。無次元変数 ω は，クォーク質量ではなく陽子質量を用いて定義した。自由クォークが存在するという証拠は，ある ω の値での非弾性構造関数が Q^2 に無関係であるという事実にみることができる ((9.5) 参照)。このことは，原子内の原子核の "点" 電荷をあばき出した Rutherford の実験で，運動量移行が大きくなると，断面積が $\sin^{-4}(\theta/2)$ のように振舞いはじめることと同じである。図 9·2 に実験データの一例を示す。$\omega=4$ の場合の νW_2 は Q^2 に無関係であることがわかる。つまり，光子は実際，点状粒子と相互作用しているのだ。(9.4) にあるような，さらに余分な Q^2 依存性を持った形状因子は存在しない。このような点状粒子 (Bjorken によりパートンと呼ばれる)† は，ハドロン分光学 (第 2 章) で発見されたクォークと同じものだろうか。

---

† (訳註)　歴史的には，はじめてパートン (parton) と呼んだのは Feynman であろう。パートンというのは，粒子 (particle) を構成する部分 (part) というほどの意味である。日本語で部分子と呼ぶ人もいる。

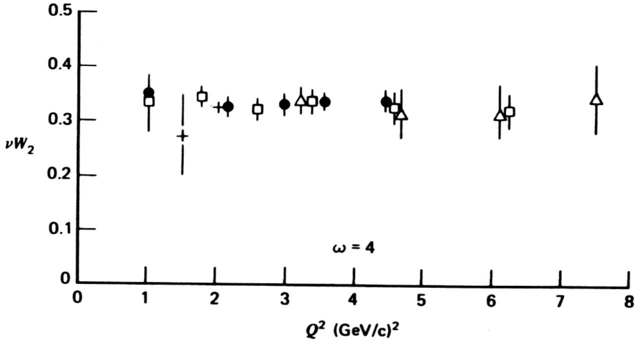
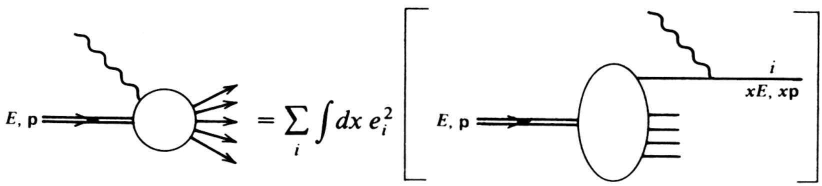


図 9·2　$\omega=4$ のとき，Q^2 の関数として電子・陽子散乱によって決定された構造関数 νW_2. 実験データは Stanford 線型加速器センターによる。

9.2　パートンと Bjorken スケーリング

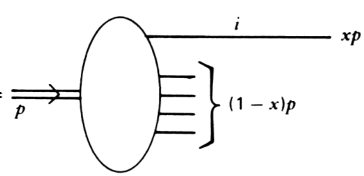
ところでスケーリングは近似的な実験事実である。(9.2) の関係を，はっきりと具体的な形で表してみよう。



(9.7)

(9.7) は，いろいろなタイプの "点" パートンが陽子を作り上げている，という事実を認めたものだ ($i=$u, d, $\cdots$ は，電荷 e_i のクォークおよびグルーオンを表す。もちろん，グルーオンは光子とは相互作用しない)。各パートンは，親の陽子の運動量とエネルギーをある割合 x で受けもつが，x はいろいろ異なる値をとりうる。そこでパートンの運動量分布

$$f_i(x) = \frac{dP_i}{dx} =$$



(9.8)

を導入する。これは，衝突するパートン i が，陽子の運動量 p をある割合 x で

担う確率を表している。したがって，x は全部加えれば1になるはずであり

$$\sum_{i'}\int dx\, x f_{i'}(x)=1 \tag{9.9}$$

が成り立つ。i' についての和は，光子と相互作用する荷電パートン i だけでなく，すべてのパートンを加え合わせることを意味する。運動学は次のようにまとめることができる：

	陽　子	**パートン**	
エネルギー	E	xE	
運 動 量	p_L	xp_L	(9.10)
	$p_T=0$	$p_T=0$	
質　　量	M	$m=(x^2E^2-x^2p_L{}^2)^{\frac{1}{2}}=xM$	

陽子も子供のパートンも，それぞれ縦運動量 p_L, xp_L で z 軸方向 ($p_T=0$) にだけ動いている。座標系の定義は，もっと慎重にしなくてはいけないので，この点については後で述べることにしよう。

運動量比 x で，単位電荷を持つパートンと電子の衝突に対しては，(9.3) と (9.5) から無次元構造関数は

$$\begin{aligned} F_1(\omega)&=\frac{Q^2}{4m\nu x}\delta\left(1-\frac{Q^2}{2m\nu}\right)=\frac{1}{2x^2\omega}\delta\left(1-\frac{1}{x\omega}\right),\\ F_2(\omega)&=\delta\left(1-\frac{Q^2}{2m\nu}\right)=\delta\left(1-\frac{1}{x\omega}\right)\end{aligned} \tag{9.11}$$

である。ここで (9.10) の運動学的関係を用いた。ω は (9.6) で定義した無次元変数である。1個のパートンに関する (9.11) の結果を，(9.7)，(9.8) にしたがって足し合わせると

$$\begin{aligned} F_2(\omega)&=\sum_i\int dx\, e_i{}^2 f_i(x)x\delta\left(x-\frac{1}{\omega}\right),\\ F_1(\omega)&=\frac{\omega}{2}F_2(\omega)\end{aligned} \tag{9.12}$$

が得られる。

$F_{1,2}(\omega)$ を $F_{1,2}(x)$ と定義し直して，いろいろな結果を x を用いて表すのが便利である。(9.5) の関係を思い出すと，Q^2 が大きいとき (9.12) は

$$\nu W_2(\nu, Q^2)\longrightarrow F_2(x)=\sum_i e_i{}^2 x f_i(x), \tag{9.13}$$

$$MW_1(\nu, Q^2)\longrightarrow F_1(x)=\frac{1}{2x}F_2(x) \tag{9.14}$$

となることがわかる。ここで

$$x=\frac{1}{\omega}=\frac{Q^2}{2m\nu}. \tag{9.15}$$

すなわち，パートンが担う陽子の運動量比 x は，第 8 章で導入した仮想光子の無次元の運動学的変数 x と同一のものである ((8.30) 参照)。いいかえれば，仮想光子の変数 x がとるべき正しい値は，その光子を吸収するパートンが持つ運動量比 x にほかならない。物理的意味がまったく違うこの 2 つの変数を，同じものだというのが (9.12) の中の δ 関数である。

非弾性構造関数 (9.13), (9.14) は，ただ 1 つの変数 x だけの関数である。したがって，x の値を固定すれば Q^2 の値には関係しない。これを，構造関数は Bjorken スケーリングを満足するという。

問題 9.1 x が運動量比であれば，当然，$0\leq x\leq 1$ でなければならないことを証明せよ。問題 8.11 を参考にせよ。

(9.10) の運動学的諸関係は少しおかしなところがある。xM のような変化する質量をパートンの質量とするのは問題外であろう。パートンの運動量を xp とすれば，$m=M=0$ とおいた場合にかぎり，パートンのエネルギーが xE になることは明らかである。同じことであるが，陽子，パートンともに質量 0 の場合にかぎり，陽子は自分と平行に運動する (ともに $p_T=0$) パートンのみを放出することができる。この結果，もし質量を持った粒子が崩壊すれば，崩壊粒子間の角度は 0 でないということがわかる。以前に得た結果を，

$$|\boldsymbol{p}|\gg M, m \tag{9.16}$$

すなわち，質量をすべて無視できるような Lorentz 系で計算してみて，それが正しいことを示すことができる。この系では，陽子は運動量無限大で動いており，(9.10) の運動量および (9.13), (9.14) の構造関数 $F_{1,2}(x)$ は厳密である。この系では，相対論的時間のおくれがパートン同士が相互作用する割合を小さくする。すなわち，短時間の間に仮想光子はパートンと相互作用するので ((9.7) 参照)，パートンは本質的に自由粒子のように振舞い，陽子内の他のパートンと相互作用することはない。$F_{1,2}(x)$ を導くにあたって，この非干渉性の仮定を暗黙のうちに用いていたのである。つまり，(9.7) は 1 個の自由パートンからの散乱の確率を (振幅ではない) 加え合わせたのだ。これは原子核物理で使われるインパルス近似に類似している。しかし，1 つ違いがある。衝突した核子は，完全に自由粒子として核外に飛び出すことができる。ところが衝突したカラーパー

トンは，相互作用に関与しない傍観者（スペクテーター）のパートンと再結合して無色のハドロンを作る。これが，陽子がバラバラに壊されて出てきた生成物である。カラーの閉じ込め（第1章参照）のために，これは確率1で起こる。また，陽子の大きさから考えて，パートンが仮想光子から受ける素速いパンチよりもずっと長い時間のスケールが必要になる。要約するとこういってよいであろう。ハードな衝突では，パートンはあたかも自由粒子のごとく反跳を受け，ep → eX の断面積を計算することができる（(8.43)，(9.13)，(9.14) 参照）。つづく閉じ込めによる終状態相互作用は結果に影響を与えることはない。この描像は，仮想光子の Q^2 および終状態のハドロン系の不変質量 W がともに大きいときに成り立つ。

問題 9.2 相互作用時間は，標的内のパートンが互いに相互作用する時間のスケールと比較してずっと短いことをきちんと確かめよ。J.D.Bjorken, E.A.Paschos, Phys. Rev. **185**, 1975 (1969) の論文で導かれている結果を読め。なお Perl (1974) も参照せよ。

問題 9.3 パートン模型の結果 (9.1)-(9.15) を，粒子の質量は無視した (6.29) の不変変数：

$$s \simeq 2k\cdot p, \qquad u \simeq -2k'\cdot p, \qquad t \equiv -Q^2 = -2k\cdot k'$$

を用いて，別の導き方をしてみるのも役に立つ。パートンの運動量を $\hat{p}=xp$ とおく。つまり，陽子の運動量に垂直な成分は無視する。以下に導出のあらましを示そう。(9.7) の関係で表されている基本的アイディアを用いて

$$\left(\frac{d\sigma}{dtdu}\right)_{\mathrm{ep}\to\mathrm{eX}} = \sum_i \int dx\, f_i(x) \left(\frac{d\sigma}{dtdu}\right)_{\mathrm{eq}_i\to\mathrm{eq}_i} \tag{9.17}$$

と書くことができる。すなわち，ep → eX が起こる割合は，すべてのパートンの寄与を単に非干渉的に加え合わせればよい。パートン過程の不変変数は

$$\hat{s}=xs, \qquad \hat{u}=xu, \qquad \hat{t}=t$$

で与えられることを示せ。これらの関係と (6.30) の eμ 散乱振幅を用いて

$$\left(\frac{d\sigma}{dtdu}\right)_{\mathrm{eq}_i\to\mathrm{eq}_i} = x\frac{d\sigma}{d\hat{t}d\hat{u}} = x\frac{2\pi\alpha^2 e_i{}^2}{t^2}\left(\frac{s^2+u^2}{s^2}\right)\delta(t+x(s+u)) \tag{9.18}$$

を示せ。また (9.17) の左辺を s, t, u で表せ。(8.31) を使うのがもっとも簡単だが，それは次のように表されることを確かめよ。

$$\left(\frac{d\sigma}{dtdu}\right)_{\mathrm{ep}\to\mathrm{eX}} = \frac{4\pi\alpha^2}{t^2 s^2}\frac{1}{s+u}[(s+u)^2 xF_1 - usF_2]. \tag{9.19}$$

ここで，$F_1 \equiv MW_1$，$F_2 \equiv \nu W_2$ である。(9.18)，(9.19) を (9.17) に代入せよ。us と s^2+u^2 の係数を比較すれば，パートン模型の基本公式が得られる：

$$\boxed{2xF_1(x) = F_2(x) = \sum e_i{}^2 x f_i(x).}$$

前と同じく $F_{1,2}$ はスケーリング変数 x のみの関数である。ここでは (9.18) の δ 関数により決定される：

$$x = \frac{-t}{s+u} = \frac{Q^2}{2M\nu}. \tag{9.20}$$

問題 9.4　第 8 章で標的陽子の静止系 (実験室) において，微分要素 $dE'd\Omega$ 内に散乱される ep → eX の微分断面積を計算した。そこで，次の関係を証明せよ：

$$dE'\,d\Omega=\frac{\pi}{EE'}dQ^2d\nu=\frac{2ME}{E'}\pi y dx dy. \tag{9.21}$$

ここで，x および y は無次元変数であり

$$x=\frac{Q^2}{2M\nu},\qquad y=\frac{p\cdot q}{p\cdot k}\underset{\text{(lab.)}}{=}\frac{\nu}{E} \tag{9.22}$$

のように定義される ((8.30) 参照)。 図 9·3 は運動学的に許される領域 ($0\leq x$, $y\leq 1$) を図示したものである。

ep → eX の断面積は，次のように Lorentz 不変な形で書けることを示せ。

$$M\nu_{\max}\frac{d\sigma}{dx\,dy}=\frac{2\pi\alpha^2}{x^2y^2}\left\{xy^2F_1+\left[(1-y)-\frac{Mxy}{2\nu_{\max}}\right]F_2\right\}. \tag{9.23}$$

ここで，$\nu_{\max}=E$ は実験室のエネルギーである。

問題 9.5　(9.23) を用いて，パートン模型の予言

$$\left(\frac{d\sigma}{dx\,dy}\right)_{\text{ep}\to\text{eX}}=\frac{2\pi\alpha^2}{Q^4}s[1+(1-y)^2]\sum_i e_i{}^2xf_i(x) \tag{9.24}$$

を示せ。ただし，粒子の質量は無視する。

問題 9.6　次の関係を証明せよ。

$$1-y=\frac{p\cdot k'}{p\cdot k}\simeq\frac{1}{2}(1+\cos\theta). \tag{9.25}$$

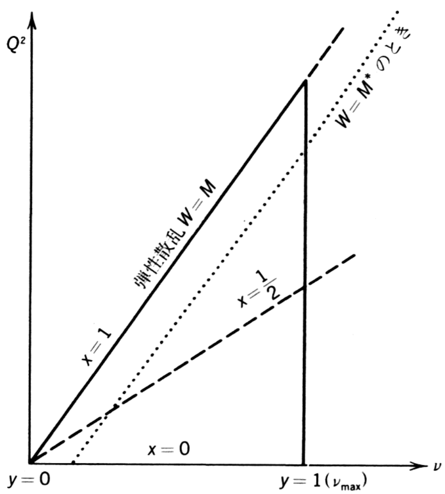


図 9·3　三角形は，ep → eX が運動学的に許される領域。$\nu_{\max}=E$ は実験室系の量で，W はハドロン状態 X の不変質量である ((8.29) 参照)。

ここで，θ は電子とクォークの重心系の散乱角である。これから，(9.24) の $(1-y)^2$ と 1 の項は，それぞれ逆ヘリシティーの電子・クォーク散乱および同ヘリシティーの電子・クォーク散乱に対応することを示せ。

パートン模型から導かれた $2xF_1=F_2$ は，Callan-Gross の関係として知られている。これは，クォークのスピンが 1/2 であることの必然的帰結であり，実験により確かめられている。

問題 9.7 x を一定にして $\nu, Q^2\to\infty$ の極限をとったとき，Callan-Gross の関係は，仮想光子・クォークの断面積 (8.53), (8.54) から

$$\sigma_L/\sigma_T \longrightarrow 0 \tag{9.26}$$

を満たすことを示せ。

問題 9.8 (6.51) から出発して，もしクォークのスピンが 0 だとすると，$F_2(x)$ はやはり (9.13) で与えられるが，$F_1(x)=0$ となり，したがって $\sigma_T=0$ となることを示せ。

上の問題から，クォークのスピンが 0 であれば，(9.26) とは異なり $\sigma_T/\sigma_L=0$ となる。この違いは，クォークと仮想光子の正面衝突を示す図 9·4 を一見すれば理解できるだろう。J_z (z 軸は $\boldsymbol{p}$ 方向にとる) の保存により，スピン 0 のクォークは，ヘリシティー $\lambda=\pm1$ の光子を吸収することができないので $\sigma_T=0$ となる。今度はクォークのスピンが 1/2 だとしよう。高エネルギー反応ではヘリシティーが保存することを思い起こすと (6.6 節参照)，これは光子が $\lambda=\pm1$ を持つ場合にのみ可能である。つまり，この場合は $\sigma_L\to0$ である。

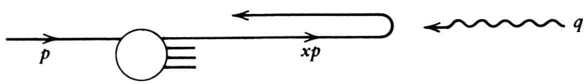


図 9·4 陽子を構成するクォークと仮想光子の正面衝突

9.3 陽子内部のクォーク

光子は第 1 章で述べたような陽子の構造をみることができるだろうか。つまり，仮想光子・陽子散乱は図 9·5 のようにみえるのだろうか。ちょうど，弾性形状因子の測定が，陽子の大きさに関する情報を与えたように，大きな Q^2 に対する非弾性構造関数は，陽子のクォーク構造を明らかにしてくれる。Bjorken スケーリングが確立し，陽子内に構成要素が存在するということになれば，(9.13), (9.14) はそれ以上の情報を引き出す道具になる。(9.13) の和は陽

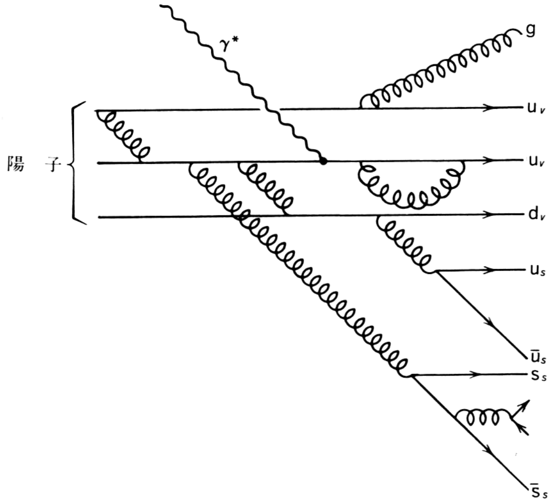


図9·5　価クォーク，グルーオンおよびおそいクォーク・反クォーク対の集団から作られる陽子

子内の荷電パートンについて加える。すなわち

$$\frac{1}{x}F_2^{\rm ep}(x)=\left(\frac{2}{3}\right)^2[u^{\rm p}(x)+\bar{u}^{\rm p}(x)]+\left(\frac{1}{3}\right)^2[d^{\rm p}(x)+\bar{d}^{\rm p}(x)]$$
$$+\left(\frac{1}{3}\right)^2[s^{\rm p}(x)+\bar{s}^{\rm p}(x)]. \tag{9.27}$$

ただし，$u^{\rm p}(x)$ および $\bar{u}^{\rm p}(x)$ は陽子内の u クォーク，反 u クォークの確率分布である。チャームクォークやもっと重いクォークも，陽子内にある程度存在するだろうが無視した。

6 個の未知のクォーク構造関数 $f_i(x)$ がある。一方，中性子の非弾性構造関数が，重陽子標的による電子散乱の実験からわかる。(9.27) に対応する式は

$$\frac{1}{x}F_2^{\rm en}=\left(\frac{2}{3}\right)^2[u^{\rm n}+\bar{u}^{\rm n}]+\left(\frac{1}{3}\right)^2[d^{\rm n}+\bar{d}^{\rm n}]+\left(\frac{1}{3}\right)^2[s^{\rm n}+\bar{s}^{\rm n}] \tag{9.28}$$

であるが，陽子と中性子はアイソスピン 2 重項を作っているから，これらに含まれるクォークの間に関係がついているはずだ。陽子内の u クォークの数と中性子内の d クォークの数は同じである。したがって

$$\begin{aligned} u^{\rm p}(x)&=d^{\rm n}(x)\equiv u(x),\\ d^{\rm p}(x)&=u^{\rm n}(x)\equiv d(x),\\ s^{\rm p}(x)&=s^{\rm n}(x)\equiv s(x). \end{aligned} \tag{9.29}$$

問題 9.9 上の関係から x の値に無関係に，不等式

$$\frac{1}{4} \leq \frac{F_2^{\mathrm{en}}(x)}{F_2^{\mathrm{ep}}(x)} \leq 4$$

が成り立つことを示せ。上 (下) 限は，陽子内に u (d) クォークだけが存在する場合の値である。

陽子の量子数が，第 2 章のように "価" クォークを uud と組んだものの量子数にほかならないということから，クォーク構造関数 $f_i(x)$ にさらに制限がつく。図 9·5 のように陽子は 3 個の構成要素，あるいは 3 個の値クォーク $\mathrm{u}_v \mathrm{u}_v \mathrm{d}_v$ で作られているが，これに多くのクォーク・反クォーク対 $\mathrm{u}_s \bar{\mathrm{u}}_s, \mathrm{d}_s \bar{\mathrm{d}}_s, \mathrm{s}_s \bar{\mathrm{s}}_s$ などを伴っている。これらを "海" クォーク ("sea" quarks) と呼んでいる。図 9·5 のように，海クォークを価クォークからの輻射だと考えれば，第一近似として 3 種の軽いクォーク (u, d, s) は，"海" の中にほぼ等しい頻度と運動量分布で存在するので，重いクォーク対 $\mathrm{c}_s \bar{\mathrm{c}}_s$ などは無視してよいだろう。陽子をこうみると，次のようにまとめることができる：

$$u_s(x) = \bar{u}_s(x) = d_s(x) = \bar{d}_s(x) = s_s(x) = \bar{s}_s(x) = S(x), \tag{9.30 a}$$

$$u(x) = u_v(x) + u_s(x), \tag{9.30 b}$$

$$d(x) = d_v(x) + d_s(x). \tag{9.30 c}$$

$S(x)$ はすべてのクォークに共通の海クォーク分布を表す。明らかに，重いストレンジクォークは，閾値で抑えられて輻射過程が起こりにくいだろうから，(9.30 a) は近似的にしか成り立たない。

寄与するパートンをすべて加え合わせれば，陽子の量子数を再現できるはずだ。したがって電荷 1，バリオン数 1，ストレンジネス 0 という条件から，次の関係が導かれる：

$$\begin{aligned} &\int_0^1 [u(x) - \bar{u}(x)]dx = 2, \\ &\int_0^1 [d(x) - \bar{d}(x)]dx = 1, \\ &\int_0^1 [s(x) - \bar{s}(x)]dx = 0. \end{aligned} \tag{9.31}$$

これらの和則は，それぞれの種類の価クォークの正味の数が，第 2 章でやった構成要素の uud という組み合わせになるべしという条件を表している。(9.31) は (9.30) で

$$\begin{aligned} u - \bar{u} &= u - \bar{u}_s = u - u_s = u_v, \\ d - \bar{d} &= d - \bar{d}_s = d - d_s = d_v, \\ s - \bar{s} &= s_s - \bar{s}_s = 0 \end{aligned}$$

とおけば出てくる。

ここで注意すべきことは，海はクォーク・反クォーク対から成り，陽子の量子数には影響しないので，どんな描像をとろうと和則は正しく成り立つという点である。したがって陽子の量子数は (9.31) で表されているように，価クォークだけで決定されるのである。(9.30) と (9.27) および (9.28) を組み合わせると

$$\frac{1}{x}F_2^{\mathrm{ep}}=\frac{1}{9}[4u_v+d_v]+\frac{4}{3}S,$$
$$\frac{1}{x}F_2^{\mathrm{en}}=\frac{1}{9}[u_v+4d_v]+\frac{4}{3}S \tag{9.32}$$

が得られる。4/3 は 6 個の海クォーク分布について，e_i^2 を加えた結果現れた因子である。グルーオンは海の中で $q\bar{q}$ 対を生成するから，$S(x)$ は x の小さいところで制動輻射的スペクトルを持つと考えられる。したがって，海クォークの数は $x\to0$ で対数的に増加する (問題 9.10 参照)。

問題 9.10　仮想光子・陽子の全断面積 (8.5 節) は，Q^2 を一定にした $x\to0$, $\nu\to\infty$ の極限では定数のように振舞うと仮定して，

$$f_i(x)\ \xrightarrow[x\to0]{}\ \frac{1}{x} \tag{9.33}$$

を証明せよ。したがって，x の小さいところでパートン数は対数的に増える。

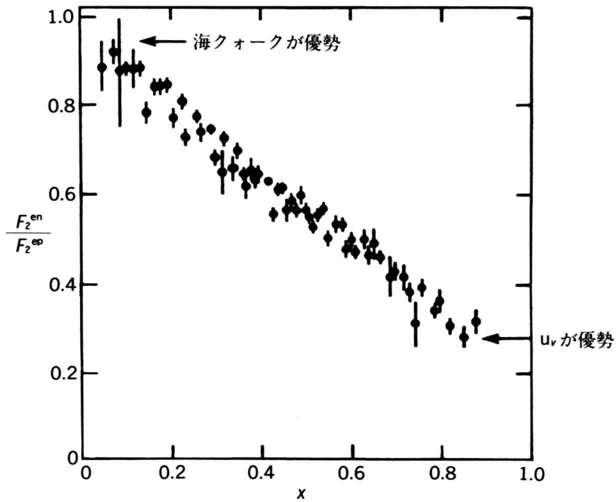


図 9·6　深非弾性散乱で測定された $F_2^{\mathrm{en}}/F_2^{\mathrm{ep}}$ を x の関数として示す。実験データは Stanford 線型加速器センターによる。

陽子内の小運動量の構成要素を探ろうとすると，3個の価クォークの存在が海 $S(x)$ を作り上げている多数の小さい運動量の $q\bar{q}$ 対の影に隠されてしまう，ということが予想される。(9.32) によれば，このことは

$$\frac{F_2^{\mathrm{en}}(x)}{F_2^{\mathrm{ep}}(x)} \xrightarrow[x\to 0]{} 1 \tag{9.34}$$

を意味する。このことは，図 9·6 の実験データからも確かめられる。他方，陽子構造の大きな運動量 ($x\simeq 1$) 部分を探ると，速い価クォークは海クォーク対にほとんど運動量を渡すことはない。この $x\to 1$ の極限では，(9.32) で価クォークが大勢を支配するから

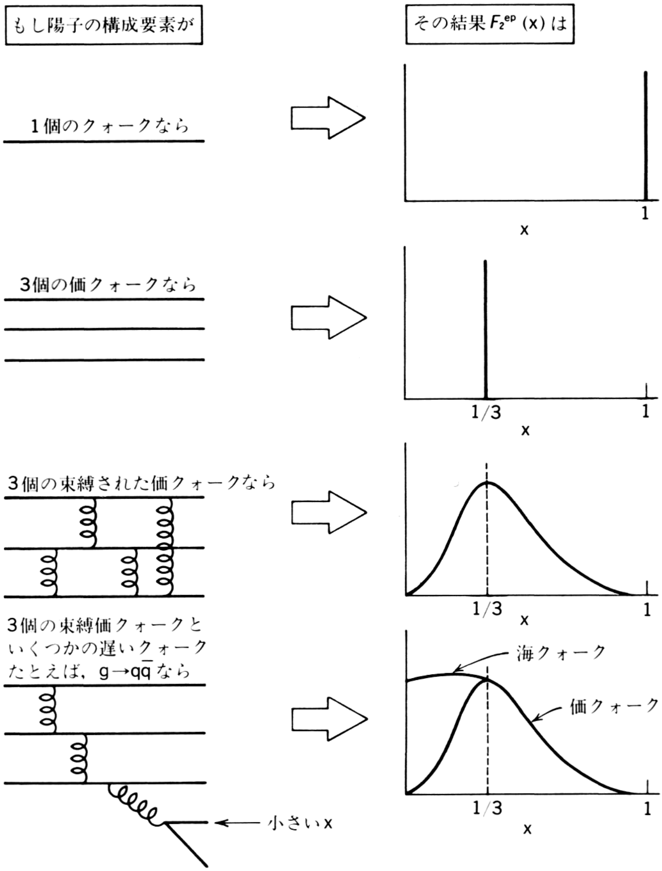


図 9·7　陽子の構成要素が異なるときの，対応する構造関数

$$\frac{F_2^{\mathrm{en}}(x)}{F_2^{\mathrm{ep}}(x)} \xrightarrow[x\to 1]{} \frac{u_v+4d_v}{4u_v+d_v} \tag{9.35}$$

が得られる。陽子に対しては，x の大きいところで $u_v \gg d_v$ という証拠がある。すると (9.35) の比は 1/4 に近づくが，図 9·6 はそれを示唆している。

問題 9.11　物理的な根拠に基づいて，パートン i が陽子の全運動量を担う $x\to 1$ の極限の場合，$f_i(x)$ がどう振舞うかを論ぜよ。計数則の主張は

$$f_i(x) \xrightarrow[x\to 1]{} (1-x)^{2n_s-1}$$

である。ただし，n_s は反応に関与しない (スペクテーター) 価クォークの数であり，これらが残りのほとんど 0 に近い陽子の運動量を担っている。$u^{\mathrm{p}}(x)$ の $x\to 1$ における振舞いを，π^+ メソンの u クォークの構造関数の振舞いと対比せよ。

陽子を図 9·5 のような描像で考えると，完全な $F_2(x)$ はいったいどのように見えるのだろうか。その形は逐次近似で推測することができる (図 9·7 参照)。図 9·7 の意味は説明するまでもないだろう。2 番目から 3 番目への変化は，いったんクォーク間相互作用がはじまると，運動量がクォーク同士の間で再分配されて，正確に定義された $x=1/3$ の運動量がならされて，$x=1/3$ を中心としたピークを持つ運動量分布が実現するという事情を反映している。大きな Q^2 に対する $F_2^{\mathrm{ep}}(x)$ の実験データは，図 9·5 に対応する 4 番目の図のような一般形を示している。しかし，(9.32) を辺々引き算すると

$$\frac{1}{x}[F_2^{\mathrm{ep}}(x)-F_2^{\mathrm{en}}(x)]=\frac{1}{3}[u_v(x)-d_v(x)] \tag{9.36}$$

となるから，相棒の海クォークの効果を除いて，価クォークだけをみることが

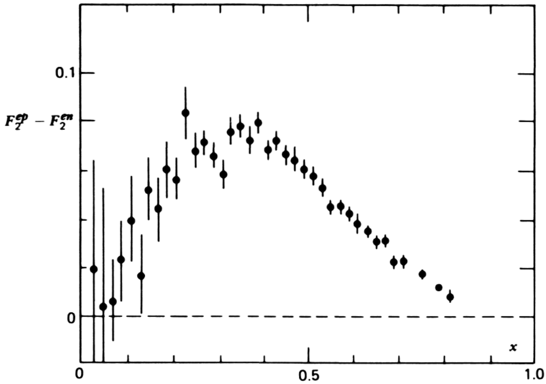


図 9·8　深非弾性散乱で測定された F_2^{ep}-F_2^{en} を x の関数として示す。実験データは Stanford 線型加速器センターによる。

できる。その結果は図9·7の第3図のようにみえるはずで，1/3のまわりにピークが現れる。事実，図9·8にみる通りである。

もう1つの現象論的手法は，大きなQ^2の$F_2^{ep,en}(x)$の実験データ全部を価クォーク分布と海クォーク分布を使ってパラメター化して，和則(9.31)に従うように各xの値に対するクォーク構造関数を求めることである。このような解析から得られた結果を図9·9(a)に示す。(a)には$\bar{q}$分布が示してあるが，これは(9.30)の仮定にも従っている。$u(x)=u_v(x)+u_s(x)$が，$xu_v(x)\to 0$に従ってxの小さいところで，どのように$\bar{u}(x)$に近づいていくかがわかる。図9·9(b)は全価クォーク成分，全海クォーク成分の一般形を示す。これらは図9·7の第3図と第4図に対応している。海クォークは，相棒の価クォークに比べて非常に遅いという点に注意せよ。

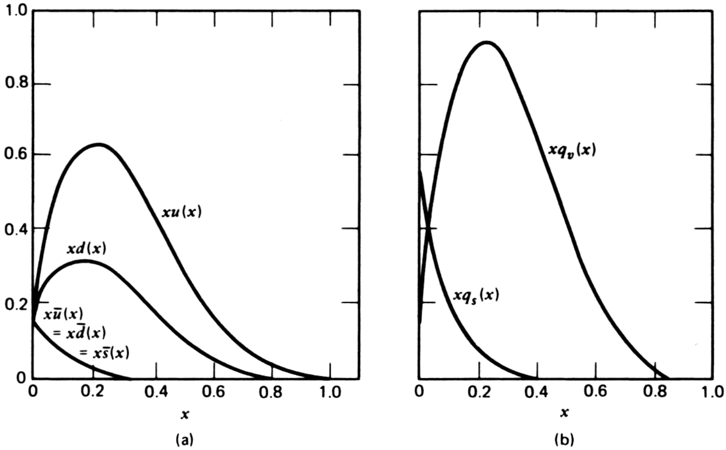


図9·9　深非弾性散乱の実験データ解析から得られたクォーク構造関数。図(b)は価クォークと海クォークの陽子の構造への寄与を示す。

9.4 グルーオンはどこに？

パートンの運動量を全部加えれば，陽子の全運動量pが再現されるはずだ((9.8)参照)。すなわち

$$\int_0^1 dx(xp)[\mathrm{u}+\bar{\mathrm{u}}+\mathrm{d}+\bar{\mathrm{d}}+\mathrm{s}+\bar{\mathrm{s}}]=p-p_9, \tag{9.37}$$

あるいは p で割って

$$\int_0^1 dx\, x[\mathrm{u}+\bar{\mathrm{u}}+\mathrm{d}+\bar{\mathrm{d}}+\mathrm{s}+\bar{\mathrm{s}}]=1-\varepsilon_{\mathrm{g}}.$$

運動量比 $\varepsilon_{\mathrm{g}} \equiv p_{\mathrm{g}}/p$ はグルーオンが担う割合であって，光子を試験体にして直接取り出すことはできない (グルーオンは電荷を持たないから)。したがって右辺から差し引いてある。$F_2{}^{\mathrm{ep,en}}(x)$ の実験データについて積分すれば，次の情報が得られる：

$$\begin{aligned}\int_0^1 dx F_2{}^{\mathrm{ep}}(x)&=\frac{4}{9}\varepsilon_{\mathrm{u}}+\frac{1}{9}\varepsilon_{\mathrm{d}}=0.18,\\ \int_0^1 dx F_2{}^{\mathrm{en}}(x)&=\frac{1}{9}\varepsilon_{\mathrm{u}}+\frac{4}{9}\varepsilon_{\mathrm{d}}=0.12.\end{aligned} \tag{9.38}$$

ここで

$$\varepsilon_{\mathrm{u}} \equiv \int_0^1 dx\, x(\mathrm{u}+\bar{\mathrm{u}})$$

は u クォークと $\bar{\mathrm{u}}$ クォークが担う運動量を表す。ε_{d} も同様の意味である。核子の運動量のごく一部しか担っていないストレンジクォークを無視すれば，(9.38) は (9.27) と (9.28) から導くことができる。(9.37) から

$$\varepsilon_{\mathrm{g}} \simeq 1-\varepsilon_{\mathrm{u}}-\varepsilon_{\mathrm{d}}$$

が得られ，(9.38) を解いた結果と合わせて

$$\varepsilon_{\mathrm{u}}=0.36, \qquad \varepsilon_{\mathrm{d}}=0.18, \qquad \varepsilon_{\mathrm{g}}=0.46 \tag{9.39}$$

を得る。これから，グルーオンが運動量の約 50％を担っていることがわかる。これは荷電クォークだけでは説明することができない。

要約すると，レプトンの核子による深非弾性散乱データの解析から，ハドロン内部には点状 Dirac 粒子が存在するということが Bjorken スケーリングを通して明らかにされた。これらパートンの量子数を調べてみると，パートンと第 2 章のハドロン分光学で導入したクォークは同じものだと考えてよい。クォークの運動量分布から必然的に，陽子の運動量の相当部分がクォークではなくて，中性のパートンによって担われているという結論が導かれる。これが QCD のグルーオンである。

10

量子色力学

10.1　グルーオンの二重の役割

前章で深非弾性散乱実験から，必然的に陽子内には荷電構成要素はもちろん，電気的に中性の構成要素が存在しなければならないことを学んだ。われわれは一連のハドロンスペクトルの実験値を説明するために，荷電パートンは第2章で導入したカラークォークと同定できると結論した。中性パートンとグルーオンを同定したくなるが，それを正当化することができるだろうか。つまり，グルーオンが存在しなければならないというそもそもの動機となった形式的論拠とは別に，実験は本当にグルーオンを必要としているのだろうか。

クォークのカラー荷は，もともと Δ^{++} の波動関数の統計の問題の困難を救うために導入されたのであった (2.11 節参照)。同じカラー荷を強い相互作用の荷量とするのは経済的である。また，グルーオン交換で伝達される力が漸近的自由であるために (1.3 節および 7.9 節参照)，摂動論が使える。かといって，これらの議論は量子色力学 (Quantum Chromodynamics, QCD) が正しい理論であるという直接的証拠になるものではない。

第1章と第2章で導入したグルーオンが，深非弾性散乱において“見失った運動量 (missing momentum)”としてみつけられた中性パートンと同定できる，という点を確かめることこそ決定的に重要である。次に，もっと徹底的に問いつめて，そのダイナミカルな性質が，まさにカラー力の担い手の性質に一致していることを実証できるのである。

話を進めるには，この段階ではカラーゲージ理論としての QCD を形式的に展開する必要はない。理論の重要な性質を思い出すだけで十分だろう。それはすでに，第1章と第2章で学んだことである。

- クォークは電荷と同時にカラーを持つ。カラーは3色あって，R, G, B で

ある。

- カラーは, 8 個の重色 (bicolored) グルーオン交換で入れ替わる (図 1·4 参照)。
- カラー相互作用は電磁相互作用のコピーであると考えてよい。正確にいえば, クォーク・グルーオン相互作用は, QED の計算規則で各バーテックスで (図1·9 参照) $\sqrt{\alpha} \to \sqrt{\alpha_s}$ と置き換え, 2.15 節の方法で求めたカラー因子を導入すれば, QED と同じように計算することができる。すなわち, バーテックス qqg はバーテックス ee γ と同じ構造を持つ。8 個のグルーオンは質量 0, スピン 1 である。
- グルーオン自身もカラーを持っている。したがって, グルーオン同士が相互作用することができる。つまり, 理論の中にはバーテックス qqg とバーテックス ggg の両方が存在する (図 1·4 (d) 参照)。
- 近距離では α_s が十分小さい。したがって, QED でおなじみの摂動論の手法でカラー相互作用を計算することができる。

“カラー相互作用は電磁相互作用のコピーである” という重要な主張の形式的な意味は第 14 章で与えるが, そこで QED も QCD もともに局所ゲージ対称性の必然的結果であることがわかるだろう。

パートンのカラー力学 (クォークおよび グルーオン) が, 前 2 章の深非弾性散乱にどう影響するだろうか。図 10·1 に図式的に表したのが第 9 章でやったパートンだが, これは, カラークォークが関与する強い力の担い手としてのグルーオンのダイナミカルな役割をまったく考えていない。たとえば, クォークがグルーオンを輻射できることも無視している。したがって, 図 10·1 のクォークは, 仮想光子 γ^* との衝突の前後のいずれでもグルーオンを輻射できるという可能性を考慮しなければならない。図 10·2 はこの可能性を示している。さらに, 標的の構成要素であるグルーオンも, 図 10·3 のように $\gamma^* g \to q\bar{q}$ のクォー

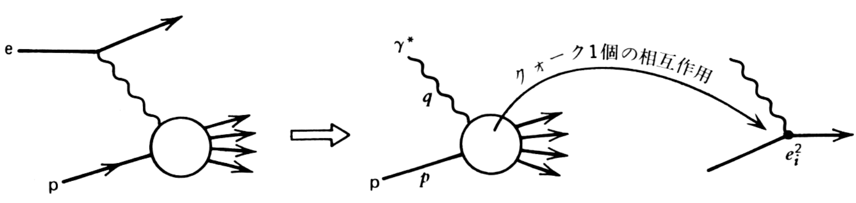


図 10·1 ep → eX のパートン模型の図式的表現

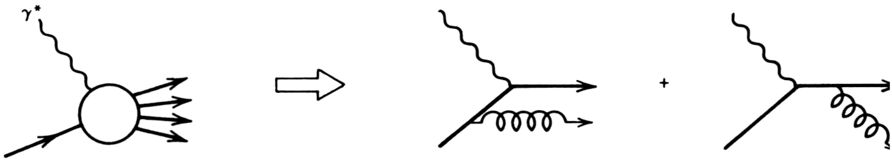


図 10·2　ep → eX に対する $O(\alpha\alpha_S)$ の寄与 (γ^*q → qg)

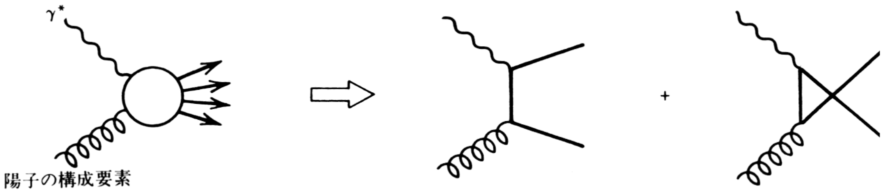


図 10·3　ep → eX に対する $O(\alpha\alpha_3)$ のグルーオンが引き起こす“ハード”散乱の寄与 (γ^*g → q$\bar{\text{q}}$)

ク対生成を通して深非弾性散乱に寄与する。摂動計算的にみれば，図 10·2，図 10·3 の過程の断面積の寄与は $O(\alpha\alpha_s)$ であるが，図 10·1 の過程からの主要な寄与は $O(\alpha)$ である。

図 10·2 と図 10·3 のような QCD の図を取り入れると，2 つの実験的に観測可能な結果が必然的に導かれる：(1) もはや構造関数のスケーリングは成り立たない。(2) 出ていくクォーク (したがって，そのクォークからのハドロンジェットの方向) は，もはや仮想光子と同一直線上にはない。図 10·4 は (2) の内容を具体的に図示したものである。第 9 章のパートン模型では，衝突したクォークが作るジェットの中にある終状態のハドロンは，図 10·4 (a) のように仮想光子の方向 (実験で測定できる) に生成された。ところがグルーオンが放出されると (図 10·4 (b))，クォークはその反跳を受ける。その結果，矢印のように 2 つのジェットが生成され，それぞれ仮想光子の方向に対して横運動量 p_T を持つ。

カラーを取り入れたクォーク・グルーオンの理論 (QCD) によって，図 10·2 と図 10·3 からの寄与を計算することができる。したがって，QCD を使えば，仮想光子の方向に対するジェットの角分布も，スケーリングの破れも予言できるのである。その結果は実験との比較ができて，クォーク・グルーオンの力学は，定量的かつ完全にダイナミカルな意味でデータとつき合わせることが可能となる。

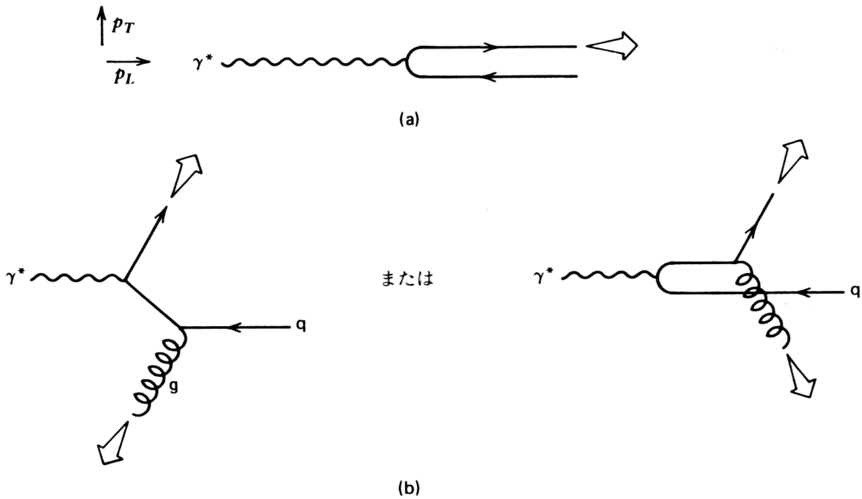


図 10·4 (a) $p_T=0$ のジェットを生成する $\gamma^* q \to q$ のパートン模型の図，(b) $p_T \neq 0$ のジェットを生成するグルーオン放出の図

10.2 非弾性散乱への γ^*・パートン過程の埋め込み

前節の γ^*・パートン散乱を表す図から，深非弾性散乱の断面積への寄与を計算するにはどうすればよいだろうか。ep → eX の断面積は構造関数 $W_{1,2}$，すなわち

$$F_1 = MW_1(\nu, Q^2), \tag{10.1}$$
$$F_2 = \nu W_2(\nu, Q^2)$$

によって表される ((8.34) 参照) ということから出発しよう。われわれはパートン模型を超えていくのだから，もはや $F_{1,2}$ はスケールしないと考える。つまり，それらは $x=Q^2/2M\nu$ のように，Q^2 と $2M\nu$ の比だけの関数ではなく，

$$\nu = \frac{p \cdot q}{M} \quad \text{および} \quad Q^2 = -q^2 \tag{10.2}$$

という 2 つの変数の関数なのである。第 8 章で構造関数を仮想光子・陽子散乱の断面積によって解釈した ((8.53) および (8.54) 参照)。深非弾性散乱の極限ではこれらの関係は簡単になって

$$2F_1 = \frac{\sigma_T}{\sigma_0} \tag{10.3}$$

$$\frac{F_2}{x}=\frac{\sigma_T+\sigma_L}{\sigma_0} \tag{10.4}$$

と書ける。ここで σ_T と σ_L はそれぞれ横仮想光子・陽子，縦仮想光子・陽子の全断面積で，

$$\sigma_0=\frac{4\pi^2\alpha}{2MK}\simeq\frac{4\pi^2\alpha}{s} \tag{10.5}$$

である。

問題 10.1　(10.3)-(10.5) を導け。実験室系でやるのがもっともやさしい。6.8 節の変数を用いる。深非弾性散乱の極限では，電子ビームのエネルギーは $E\gg E'$ の関係にある。したがって $\nu^2\sim E^2$, $Q^2\simeq 4EE'\sin^2(\theta/2)$ であるから，$\nu^2\gg Q^2$ となる。さらに γ^*・陽子の重心系のエネルギーの 2 乗

$$s=(q+p)^2=M^2+2M\nu-Q^2\simeq 2MK \tag{10.6}$$

も用いるが，K は (8.48) の γ^* フラックス因子に関連している。

σ_T と σ_L への γ^*・パートン散乱断面積の寄与を計算しようとすると問題が起きる。(10.3) と (10.4) は γ^*・陽子の断面積に関するものであり，γ^*・パートンの断面積ではない。たとえば，図 10・5 のような 1 個のグルーオン放出 ($\gamma^*q\to qg$) を考えよう。2 つの座標系の間の関係は次の通りである：

γ^*・陽子系		**γ^*・パートン系**
p	$\longrightarrow$	$p_i=yp$
$x=\dfrac{Q^2}{2p\cdot q}$	$\longrightarrow$	$z=\dfrac{Q^2}{2p_i\cdot q}=\dfrac{x}{y}$

ここでは，広く行われているように，どちらの座標系も衝突粒子が同一直線上を無限大の運動量で走っている，という事実に依拠している。

さて，この 2 つの座標系で計算した断面積の比を，互いに関係づけることができる。たとえば，(10.3) の比に対しては

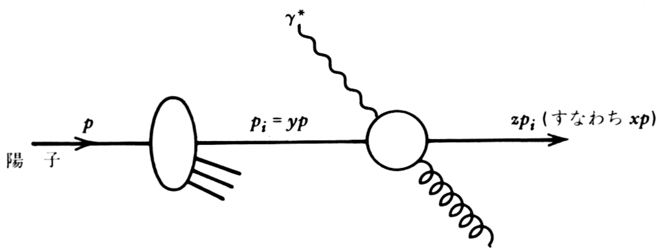


図 10・5　$\gamma^*q\to qg$

$$\left(\frac{\sigma_{\mathrm{T}}(x, Q^2)}{\sigma_0}\right)_{\gamma^*\mathrm{p}} = \sum_i \int_0^1 dz \int_0^1 dy f_i(y) \delta(x - zy) \left(\frac{\hat{\sigma}_{\mathrm{T}}(z, Q^2)}{\hat{\sigma}_0}\right)_{\gamma^* i} \tag{10.7}$$

である。ここで，$f_i(y)$ はパートン構造関数（親の運動量 p に対して y の割合の運動量を担うパートン i が存在する確率）であり，$\hat{\sigma}_{\mathrm{T}}$ は運動量 q の横光子が運動量 p_i のパートンに吸収される全断面積である。x を一定に保ち，z と y は $x=zy$ という条件で積分しなければならない。δ 関数を使って z 積分を実行すれば

$$\boxed{\left(\frac{\sigma_{\mathrm{T}}(x, Q^2)}{\sigma_0}\right) = \sum_i \int_x^1 \frac{dy}{y} f_i(y) \left(\frac{\hat{\sigma}_{\mathrm{T}}(x/y, Q^2)}{\hat{\sigma}_0}\right)} \tag{10.8}$$

が得られる。本章を通じて，γ^*・パートン系の量には $\hat{\sigma}, \hat{s}, \hat{t}$ などを用いて親過程の σ, s, t などの量と区別しよう。

10.3 ふたたびパートン模型

かりにグルーオンの効果がないとすれば，パートン模型の結果が (10.8) から再現できるはずだ。この場合，$\hat{\sigma}_{\mathrm{T}}$ と $\hat{\sigma}_{\mathrm{L}}$ は図 10・1 の $\gamma^*\mathrm{q} \to \mathrm{q}$ によって与えられる。出ていくクォークの質量を無視すれば $(q+p_i)^2=0$ であるから，

$$z = \frac{Q^2}{2p_i \cdot q} = 1 \tag{10.9}$$

となり，$\hat{\sigma}(z, Q^2)$ は $\delta(1-z)$ に比例する。

問題 10.2 図 10・1 のパートン模型の図から

$$\frac{\hat{\sigma}_{\mathrm{T}}(z, Q^2)}{\hat{\sigma}_0} = e_i^2 \delta(1-z), \tag{10.10}$$

$$\hat{\sigma}_{\mathrm{L}}(z, Q^2) = 0 \tag{10.11}$$

が得られることを示せ。

計算の各段階のあらましを示そう。まず，$\gamma^*(q)\mathrm{q}(p) \to \mathrm{q}(p')$ に対して

$$\overline{|\mathcal{M}|^2} = 2e_i^2 e^2 p \cdot q \tag{10.12}$$

を示す。ただし，入射光子の横偏極状態について平均してある。4.3 節から

$$F d\hat{\sigma}_{\mathrm{T}} = \overline{|\mathcal{M}|^2} (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p' - p - q) \frac{d^3 p'}{2p_0'(2\pi)^3} \tag{10.13}$$

である。ここで F は $\gamma^*\mathrm{q}$ のフラックス因子を表す。(6.47) を使って $F\hat{\sigma}_{\mathrm{T}}$ を計算せよ。$F\hat{\sigma}_0 = 8\pi^2\alpha$ の関係を用いよ ((10.5) 参照)。

(10.4) の F_2/x に対するパートン模型の予言を導くために，(10.8) の右辺の

$\gamma^* \mathrm{q} \to \mathrm{q}$ の断面積比に

$$\frac{1}{\hat{\sigma}_0}(\hat{\sigma}_T + \hat{\sigma}_L) = e_i{}^2 \delta(1-z) \tag{10.14}$$

を代入する ((10.10), (10.11) 参照)。その結果

$$\frac{F_2(x, Q^2)}{x} = \sum_i e_i{}^2 \int_x^1 \frac{dy}{y} f_i(y) \delta\left(1 - \frac{x}{y}\right) = \sum e_i{}^2 f_i(x) \tag{10.15}$$

が得られる。$2F_1$ に対する表現もまったく同じになる。たしかに (9.13), (9.14) のパートン模型の結果が再現されたわけである。

10.4 グルーオン放出の断面積

さて，図 10·2 のグルーオン放出過程を含めた計算をする準備ができた。$\gamma^* \mathrm{q} \to \mathrm{qg}$ を計算するには，Compton 散乱の結果がそのまま使える。6.14 節で，これと密接に関係した QED 過程 $\gamma^* \mathrm{e} \to \gamma \mathrm{e}$ を計算して

$$\overline{|\mathcal{M}|^2} = 32\pi^2 \alpha^2 \left(-\frac{u}{s} - \frac{s}{u} + \frac{2tQ^2}{su}\right) \tag{10.16}$$

を得た。ここで γ^* の偏極は $\sum \varepsilon_\mu{}^* \varepsilon_\nu = -g_{\mu\nu}$ を用いて加えてある ((6.98) 参照)。$\gamma^* \mathrm{q} \to \mathrm{qg}$ に対する結果は，$\alpha^2 \to e_i{}^2 \alpha \alpha_s$ と置き換え，カラー因子 4/3 を乗じ，出ていく粒子の順序の違いを考慮した $\mathrm{u} \leftrightarrow \mathrm{t}$ の置き換えによってただちに得られる。すなわち

$$\overline{|\mathcal{M}|^2} = 32\pi^2 (e_i{}^2 \alpha \alpha_s) \frac{4}{3} \left(-\frac{\hat{t}}{\hat{s}} - \frac{\hat{s}}{\hat{t}} + \frac{2\hat{u}Q^2}{\hat{s}\hat{t}}\right). \tag{10.17}$$

不変変数 $\hat{s}, \hat{t}, \hat{u}$ は，パートン過程を考えていることを示す。

因子 4/3 は，カラーに関して終状態について加え，始状態について平均した結果である。これは，図 10·6 でカラーを持った粒子を表す線の数を数えればすぐわかる。各カラー線は，とりうる 3 個のカラーの中から 1 個とるのだから，

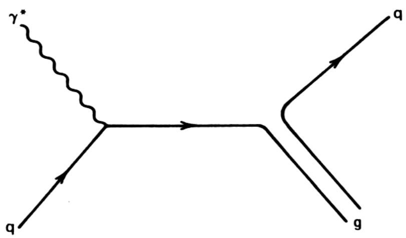


図 10·6 $\gamma^* \mathrm{q} \to \mathrm{qg}$ に対するカラーの流れ

2.15 節で説明したようにカラー 1 重項を差し引いて，(3×3−1) 個の異なるカラー配位が可能である。始状態の 3 個のクォークのカラーに関して平均すれば 8/3 を得る。ところが，歴史的に不幸な定義を α_S に与えてしまったので，2 で割っておかなければいけない (2.15 節参照)。

もっとも簡単な QCD の図は QED のそれと完全に類似している。したがって，QCD の断面積は

$$\alpha^n \longrightarrow C_F \alpha_s{}^n \tag{10.18}$$

の置き換えで求められる。ただし，n は図中のクォーク・グルーオン (またはグルーオン・グルーオン) バーテックス数である。カラー因子 C_F は，スピンの場合と同様に，終状態の和 と 始状態の平均から出てくる。しかし，断面積を変えずに，α_s を定義しなおしてカラー因子を変えることができる。たとえば，

$$\alpha_s{}^n C_F \longrightarrow (2\alpha_s)^n (C_F/2^n) = (\alpha_s{}')^n C_F{}' \tag{10.19}$$

とすることができる。ふつう α_S の定義は，この (10.19) の第二の定義に対応している。ふつう出てくるカラー因子を求めるための最終的な規則は簡単だ：“指でカラーの数を勘定せよ。しかる後それを 2^n で割れ。” これが図 10·6 の因子 8/3 を 2^1 で割った理由である。

さて中心問題にもどろう。γ^*q → qg の断面積を (10.17) から計算する準備として，必要な運動学をまとめておく。

問題 10.3　図 10·7 の $\gamma^* q_1 \to q_2 g$ 過程の重心系で次の関係を示せ：

$$\hat{s} = 2k^2 + 2kq_0 - Q^2 = 4k'^2, \tag{10.20}$$
$$\hat{t} = -Q^2 - 2k'q_0 + 2kk'\cos\theta = -2kk'(1-\cos\theta), \tag{10.21}$$
$$\hat{u} = -2kk'(1+\cos\theta). \tag{10.22}$$

ここで，k および k' は重心系の運動量 $\boldsymbol{k}, \boldsymbol{k}'$ の大きさである。仮想光子については $q_0{}^2$

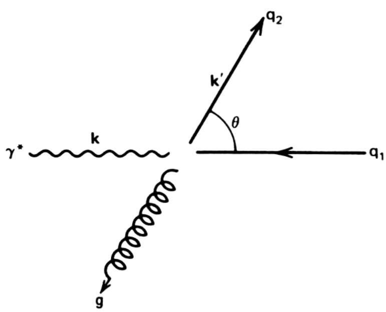


図 10·7　$\gamma^* q_1 \to q_2 g$ の重心系

$=k^2-Q^2$ が成り立つことに注意せよ。次の関係は役に立つだろう：

$$4kk'=-\hat{t}-\hat{u}=\hat{s}+Q^2. \tag{10.23}$$

興味深い量は，出ていくクォークの横運動量 $p_T=k'\sin\theta$ である。そこで次の関係を示せ：

$$p_T{}^2=\frac{\hat{s}\hat{t}\hat{u}}{(\hat{s}+Q^2)^2}, \tag{10.24}$$

または，散乱角が小さい極限 $-\hat{t}\ll\hat{s}$ では

$$p_T{}^2=\frac{\hat{s}(-\hat{t})}{\hat{s}+Q^2} \tag{10.25}$$

を示せ。さらに小角度散乱 $(\cos\theta\simeq 1)$ に対して

$$d\Omega=\frac{4\pi}{\hat{s}}dp_T{}^2 \tag{10.26}$$

を示せ。

(10.17) から，高エネルギー $(\hat{s}\to\infty)$ では，$\gamma^*\mathrm{q}\to\mathrm{qg}$ の断面積は $-\hat{t}\to 0$ でピークを持つことがわかる。図 4・8 とそれに関連した議論を振り返ってみると，これは t チャネルのクォーク交換による過程だということがわかる。したがって，その断面積を前方ピークで近似することができる。前方散乱に対しては，(10.26) および (4.35) から

$$\frac{d\hat{\sigma}}{dp_T{}^2}\simeq\frac{1}{16\pi\hat{s}^2}\overline{|\mathcal{M}|^2} \tag{10.27}$$

が得られる。

問題 10.4　(10.26), (10.20) および (4.34) を用いて (10.27) を導け。また，(8.48) の定義を用いて $\gamma^*\mathrm{q}$ 衝突のフラックス因子は $2\hat{s}$ であることを示せ。

(10.17) を (10.27) に代入すれば，$\gamma^*\mathrm{q}\to\mathrm{qg}$ の断面積は，$-\hat{t}\ll\hat{s}$ ならば

$$\frac{d\hat{\sigma}}{dp_T{}^2}\simeq\frac{8\pi e_i{}^2\alpha\alpha_s}{3\hat{s}^2}\left(-\frac{1}{\hat{t}}\right)\left[\hat{s}+\frac{2(\hat{s}+Q^2)Q^2}{\hat{s}}\right] \tag{10.28}$$

となる。(10.25) と

$$z\equiv\frac{Q^2}{2p_i\cdot q}=\frac{Q^2}{(p_i+q)^2-q^2}=\frac{Q^2}{\hat{s}+Q^2} \tag{10.29}$$

を用いて，(10.28) は最終的に

$$\boxed{\frac{d\hat{\sigma}}{dp_T{}^2}\simeq e_i{}^2\hat{\sigma}_0\frac{1}{p_T{}^2}\frac{\alpha_s}{2\pi}P_{\mathrm{qq}}(z)} \tag{10.30}$$

と書くことができる。ここに $\hat{\sigma}_0=4\pi^2\alpha/\hat{s}$ である ((10.5) 参照)。

$$P_{\mathrm{qq}}(z)=\frac{4}{3}\left(\frac{1+z^2}{1-z}\right) \tag{10.31}$$

はクォークがグルーオンを放出し，その結果クォークの運動量が元の $1/z$ に減少する確率を表す。$z \to 1$ で現れる特異性は，質量 0 のソフトグルーオン放出と関係する。これは第 7 章で述べた赤外発散の一例であるが，仮想グルーオンを考慮することにより，発散がどのように相殺されるかは 10.2 節で説明しよう。

断面積 (10.30) は $p_T{}^2 \to 0$ でも特異性を持つ。ところで，図 10·1 と 図 10·3 は寄与しないか (パートンの図では仮想光子の方向に対して，出ていくパートンの横運動量は常に 0 である)，$-\hat{t} \ll \hat{s}$ の極限では $\gamma^* q \to qg$ と比較して無視できるか，のいずれかである。図 10·3 の対生成の場合はそうなっている。したがって領域 $-\hat{t} \ll \hat{s}$ では，(10.30) は終状態のパートンジェットの $p_T{}^2$ の全領域に対する分布を表す。

この結果の実験的特徴は何か。図10·4 をみてみよう。グルーオンが放出されたという証拠は，終状態のクォークジェットとグルーオンジェットであって，どちらも出ていく方向は仮想光子の方向ではない。ジェットあるいはジェットに含まれる制動輻射ハドロン (第 1 章参照) の横運動量は 0 ではない。事実，その p_T 分布は (10.30) で与えられる。10.3 節のパートン断面積に対する場合と同

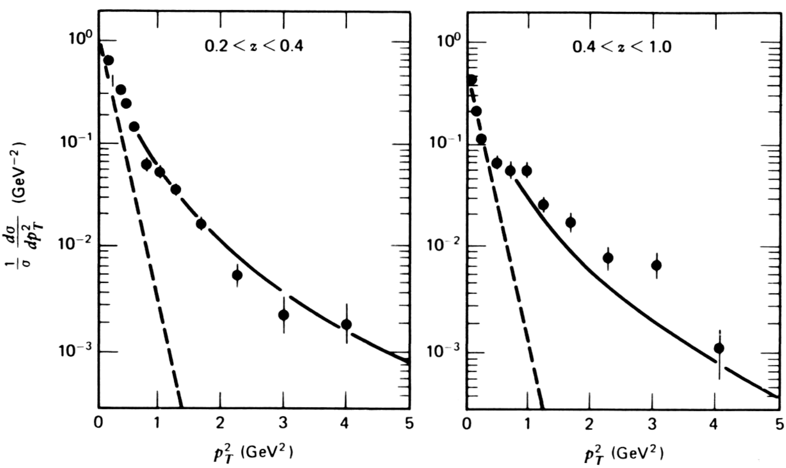


図 10·8 μN 相互作用で生成されたハドロンの仮想光子の方向に対する $p_T{}^2$ 分布。破線はグルーオン放出がない場合に対する予想である。データは CERN の EMC (European Muon Collaboration) 共同実験グループによる。(μN, eN ともに同じ曲線を与える。)

じように，(10.8) を使って今度は電子・陽子系に適用しなければならない。図10·8 は，このような計算結果を実験データと比較したものである。

この実験との比較について注意しておくことがいくつかある。図 10·8 に示した計算は，実際は図 10·1～図 10·3 のすべての寄与を含み，$-\hat{t} \ll \hat{s}$ の極限におけるものではない。さらに，クォークやグルーオンがどのようにハドロン化するかという点に関して模型が必要である。別の言葉でいえば，その情報を別の実験から推測しなければならない。これは次章で説明しよう。大事なことは，$p_T \neq 0$ のハドロン放出という定性的観察であり，これがグルーオン放出の証拠になる。グルーオンを考えないパートン模型の場合は，終状態のジェットはすべて仮想光子と同一直線上に出ていくであろう。したがって，ジェットから破片のように生成されるハドロンも，ほとんどそれと同じ方向に出ていく。すなわち，クォークの閉じ込めによる不確定関係から生ずる約 300 MeV の横運動量の広がりを持って出ていくのである。この予測が図 10·8 の破線である。実験データは，明らかに大きな p_T を持つハドロンが多く作られていることを示している。このハドロンは，クォークとその反跳グルーオンジェットからの破片なのだ。

この "QCD の Rutherford 実験" は，$e^+e^- \to$ ハドロンあるいは $pp \to$ 大 p_T ハドロン過程において，さまざまな形で現れる (第 1 章参照)。その考え方と計算の手法は，ここで論じた例とよく似ている。最終的に，光子の Q^2 が大きいことが，α_s の小さい短距離相互作用を扱っていることを保証するのである (第 1 章および第 7 章参照)。図 10·8 の大きな p_T を持つハドロンの数が (10.30) の断面積の規格化を決める。つまり，$\alpha_S(Q^2)$ の大きさを決めることになる。ここで問題にしている Q^2 の値に対しては，データから $\alpha_S \simeq 0.2$ である。

10.5 スケーリングの破れ：Altarelli-Parisi 方程式

(10.30) で表されるグルーオン制動輻射は，核子の構造関数にどう寄与するのだろうか。構造関数は，(10.8) (および (10.3)，(10.4)) でみたようにパートンの断面積と関係していた。これは γ^*・パートン衝突の断面積を積分したものである。すなわち，

$$\hat{\sigma}(\gamma^* q \to qg) = \int_{\mu^2}^{\hat{s}/4} dp_T{}^2 \frac{d\hat{\sigma}}{dp_T{}^2}$$

$$\simeq e_i{}^2 \hat{\sigma}_0 \int_{\mu^2}^{\hat{s}/4} \frac{dp_T{}^2}{p_T{}^2} \frac{\alpha_s}{2\pi} P_{qq}(z) \simeq e_i{}^2 \hat{\sigma}_0 \left(\frac{\alpha_s}{2\pi} P_{qq}(z) \log \frac{Q^2}{\mu^2} \right). \qquad (10.32)$$

問題 10.5　2 体相互作用 $\gamma^* q \to qg$ において，最大横運動量は

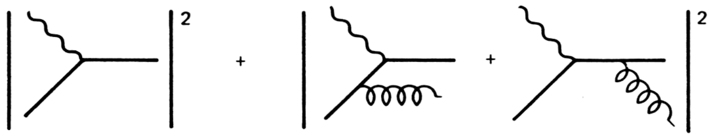
$$(p_T{}^2)_{\max} = \frac{\hat{s}}{4} = Q^2 \frac{1-z}{4z} \tag{10.33}$$

で与えられることを示せ。

(10.32) を導くとき，グルーオンの最大横運動量まで積分し，(10.33) を用いて大きな Q^2 の極限で $\log(\hat{s}/4) \simeq \log Q^2$ と書いた。横運動量積分の下限 μ は，$p_T{}^2 \to 0$ で現れる発散を正則化するために導入した切断である。

QCD では，パートン模型の断面積 (10.14) に $\hat{\sigma}\ (\gamma^* q \to qg)$ を加えて，(10.15) が次のように修正される。

$$\frac{F_2(x, Q^2)}{x} =$$



$$= \sum_q e_q{}^2 \int_x^1 \frac{dy}{y} q(y) \left(\delta\left(1 - \frac{x}{y}\right) + \frac{\alpha_s}{2\pi} P_{qq}\left(\frac{x}{y}\right) \log \frac{Q^2}{\mu^2} \right). \tag{10.34}$$

ここで $q(y) \equiv f_q(y)$ はクォークの構造関数を表す。$\log Q^2$ という因子が現れたのは，パートン模型による構造関数のスケーリングの予言が破れたことを意味する。つまり，QCD では F_2 は x の関数であると同時に，また Q^2 の関数でもあるのだ。しかし，Q^2 に関しては対数的変化にすぎない。Bjorken スケーリングの破れはグルーオン放出の証拠である。

問題 10.6　$\log Q^2$ 項の由来を調べよ。$\gamma^* q \to qg$ の断面積 $d\hat{\sigma}/dp_T{}^2$ は，前方ピークの部分が大半を占めていることはすでに知っている。$\hat{t}$ チャネルのクォーク伝播関数から $1/p_T{}^4$ が出る。グルーオン放出のバーテックスにおけるヘリシティー保存から分子に $p_T{}^2$ が出て，伝播関数の特異性を弱めることを示せ。

(10.34) は，α_s についてのべき級数の最初の 2 項と考えてよいだろう。$\alpha_s \sim (\log Q^2)^{-1}$ なので，α_s は大きな Q^2 に対しては展開のパラメターとしては有効である。しかし，(10.34) の主要項と次のオーダーの項とを比較すると，展開パラメターに $\log(Q^2/\mu^2)$ がかかっていることがわかる。(7.65) から，$\alpha_s \log(Q^2/\mu^2)$ は大きな Q^2 の値に対して 0 にはならないこと，したがって，(10.34) はそのままの形ではあまり役に立ちそうにないことがわかる。ではどうしたらよいだろう。$\log Q^2$ 項を修正されたクォークの確率分布に吸収させることがで

きるだろうか。そのために，(10.34) を“パートン的”な形に書き直してみる。

$$\frac{F_2(x, Q^2)}{x} \equiv \sum_{q} e_q{}^2 \int_x^1 \frac{dy}{y} (q(y) + \Delta q(y, Q^2)) \delta\left(1 - \frac{x}{y}\right)$$
$$= \sum_{q} e_q{}^2 (q(x) + \Delta q(x, Q^2)). \tag{10.35}$$

ここで

$$\Delta q(x, Q^2) \equiv \frac{\alpha_s}{2\pi} \log\left(\frac{Q^2}{\mu^2}\right) \int_x^1 \frac{dy}{y} q(y) P_{qq}\left(\frac{x}{y}\right). \tag{10.36}$$

今度はクォーク密度 $q(x, Q^2)$ は Q^2 にも依存する。これは大きな Q^2 を持って，陽子内で $p_T{}^2$ のより広い領域を探る光子との相互作用によるものと解釈できる。

これに対して，次のような描像を描くことができよう。Q^2 がたとえば $Q_0{}^2$ から Q^2 に増加すると，光子には陽子内に点状価クォークが存在する証拠が“みえ”てくる (図 10·9 参照)。もしクォークが相互作用していないとすれば，Q^2 を大きくしてもそれ以上の構造がはっきりみえてくることはない。したがって，厳密にスケーリング ($q(x)$ で表される) が成り立ち，パートン模型は満足すべきものということになるだろう。ところが QCD では，分解能を増していくと ($Q^2 \gg Q_0{}^2$), 個々のクォークがパートンの雲で囲まれているのが“みえ”てくるのだ，と予言する。われわれは，図 10·9 (b) のような特定の Feynman 図について計算したが，他にも多くのパートンが関与している Feynman 図があることはもちろんである。

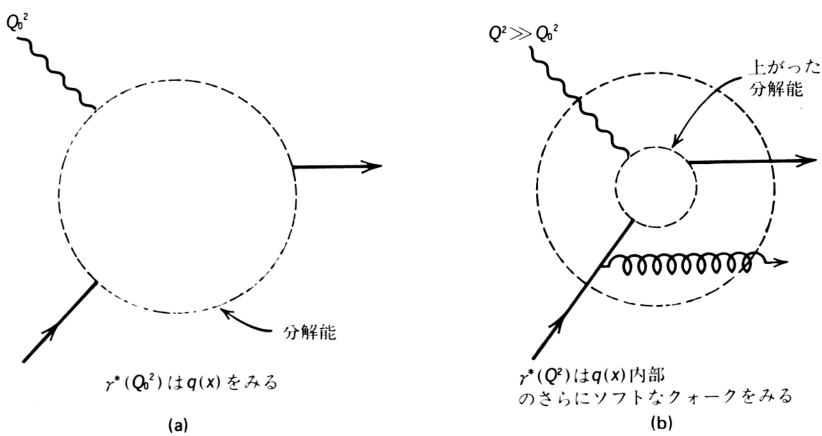


図 10·9　Q^2 が増加するとき，仮想光子による陽子のクォーク構造の見え方

陽子の運動量を担う，一つ一つ区別してみえるパートンの数は，Q^2 とともに増加する。運動量の大きいクォークはグルーオン輻射で運動量を失うので，x の小さいクォークを見出す確率は増大し，x の大きいクォークをみつけるチャンスは減少する。

クォーク密度の Q^2 発展を決めるのは QCD であり，(10.36) によって表される。さらに $\Delta\log Q^2$ の区間を探ったら，クォーク密度が $\Delta q(x, Q^2)$ だけ変化したとすれば，(10.36) は $q(x, Q^2)$ に関する微積分方程式に書き換えられる。

$$\boxed{\frac{d}{d\log Q^2}q(x, Q^2)=\frac{\alpha_s}{2\pi}\int_x^1\frac{dy}{y}q(y, Q^2)P_{\rm qq}\left(\frac{x}{y}\right).} \tag{10.37}$$

これが Altarelli-Parisi の "発展方程式 (evolution equation)" である。この方程式は，運動量比 x を持ったクォーク [左辺の $q(x, Q^2)$] が，グルーオンを輻射して大きい運動量比 y を持った親のクォーク [右辺の $q(y, Q^2)$] から出てきたという事実を数学的に表している。グルーオン放出の確率は $\alpha_s P_{\rm qq}(x/y)$ に比例する。(10.37) の積分は，親クォークのとりうる運動量比 y ($>x$) について，すべて加え合わせる意味である。

要約すると，QCD はスケーリングの破れを予言し，構造関数の Q^2 依存性を具体的に計算することができる。ある参照値 $Q^2=Q_0{}^2$ におけるクォークの構造関数 $q(x, Q_0{}^2)$ が与えられると，Altarelli-Parisi 方程式 (10.37) を用いて，任意の Q^2 の値に対して $q(x, Q^2)$ を計算することができる。$q(x, Q^2)$ の実験結果，もっと正確にいえば $F_2(x, Q^2)$ の実験結果を図 10·10 に示す。

構造関数が，Q^2 とともにどう変化するかを表したのが (10.37) の微分方程式であるが，そのことを示すのによく使われるのがモーメント解析である。これは完全に技術的なことであって興味の対象にはしないが (ただし問題 10.16 参照)，Q^2 依存性の規則性には注意を払うべきだろう。$x=0.25$ ($\omega=4$) 近傍で構造関数はスケールする。図 9·2 が示すように，この x の特別の値に対しては Q^2 依存性がない。しかし，構造関数は $x\lesssim 0.25$ では Q^2 とともに増加し，$x\gtrsim 0.25$ では減少する。換言すれば，Q^2 が増加するにつれて，一つ一つ区別してみえてくる "ソフト" クォークの数が増加するといってよい。大運動量 ($x\simeq 1$) のクォーク成分が減少して，運動量の小さい ($x\simeq 0$) ほうへ移動する。これは，大きな Q^2 の高分解能光子は，グルーオンを放出して運動量が小さくなった "よりソフト" なクォークをみるチャンスが増えるという，前にやった議論と一致している。

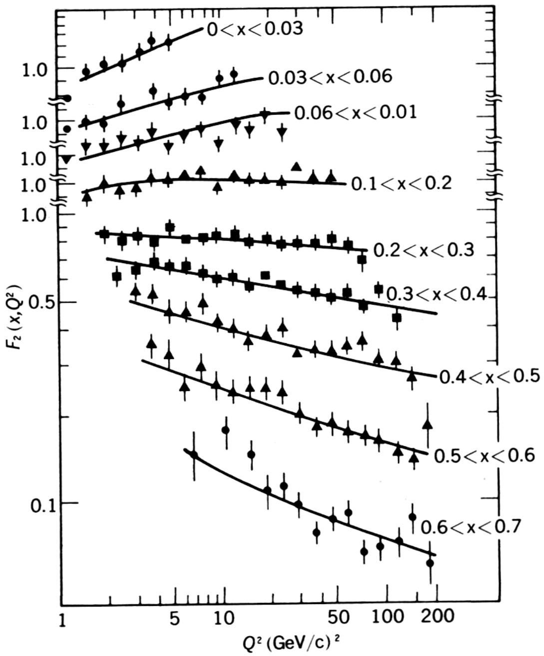


図 10·10　スケーリングからのずれ。Q^2 が増加するにしたがい，構造関数 $F_2(x, Q^2)$ は x の小さいところで増加し，大きいところで減少する。実験データは CERN の CDHS 共同実験グループのカウンター実験による。

問題 10.7　(10.37) の $q(x, Q^2)$ のスケーリングの破れの起源は，(10.32) までさかのぼることができる。(10.32) では，α_S は定数と仮定した。(10.37) は実効結合定数に対しても成り立つことを示せ。(10.32) の α_S は，(7.65) で与えられる $\alpha_S(p_T^2)$ であると仮定せよ。

コメント　α_S の引数（アーギュメント）として p_T^2 を選んだ理由を示すには，高次の Feynmam 図を議論しなければならない。しかし，ここで問題にしているのは，2 つの大きな量 p_T^2 と Q^2 を持つ運動学の枠内であり，かつ主として寄与するのは，$p_T^2 \ll Q^2$ の領域である。こういう極限では，高次の議論は α_S の引数として p_T^2 を用いる（たとえば Reya (1981) や Dokshitzer et al. (1980) 参照)。

10.6　グルーオンによるクォーク対生成過程の寄与

これまで深非弾性散乱 ep → eX への寄与として，クォークがひき起こす過

程 $\gamma^*\mathrm{q}\to\mathrm{q}$ や $\gamma^*\mathrm{q}\to\mathrm{qg}$ だけを考えてきた。α_S の次数では，始状態の陽子内のグルーオンがクォーク・反クォーク対を作り，それと仮想光子が相互作用する $\gamma^*\,\mathrm{g}\to\mathrm{q\bar{q}}$ (図10・3) の寄与も考えなければならない。これは 10.4 節のCompton 散乱に似ている。

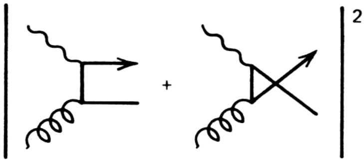
問題 10.8　$\gamma^*\mathrm{g}\to\mathrm{q\bar{q}}$ に対するカラー因子は 1/2 であることを示せ。

問題 10.9　$\gamma^*\mathrm{g}\to\mathrm{q\bar{q}}$ に対して

$$\overline{|\mathcal{M}|^2}=32\pi^2(e_\mathrm{q}^2\alpha\alpha_S)\frac{1}{2}\left(\frac{\hat{u}}{\hat{t}}+\frac{\hat{t}}{\hat{u}}-\frac{2\hat{s}Q^2}{\hat{t}\hat{u}}\right) \tag{10.38}$$

を証明せよ。γ^* の偏極の和に対しては $\sum\varepsilon_\mu{}^*\varepsilon_\nu=-g_{\mu\nu}$ を用いよ。これから，陽子の構造関数 (10.34) には，次の寄与がさらに加わることを示せ：

$$\left.\frac{F_2(x,Q^2)}{x}\right|_{\gamma^*\mathrm{g}\to\mathrm{q\bar{q}}}= \tag{10.39}$$



$$=\sum_\mathrm{q}e_\mathrm{q}^2\int_x^1\frac{dy}{y}g(y)\frac{\alpha_S}{2\pi}P_\mathrm{qg}\left(\frac{x}{y}\right)\ \log\frac{Q^2}{\mu^2}. \tag{10.40}$$

ここで $g(y)$ は陽子内のグルーオン密度であり，

$$P_\mathrm{qg}(z)=\frac{1}{2}(z^2+(1-z)^2) \tag{10.41}$$

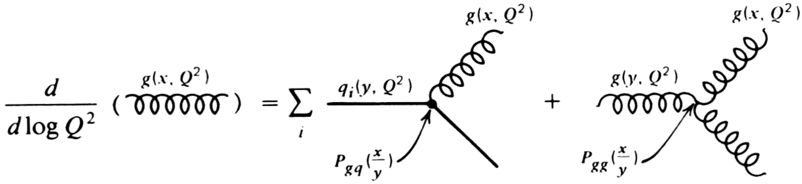
はグルーオンが $\mathrm{q\bar{q}}$ 対に転化する確率を，z はクォークの運動量比を表す。$F_2(x,Q^2)$ のスケーリングの破れの詳しい測定から，陽子内グルーオン分布を (10.40) により調べることができる。

10.7　パートン密度に対する完全な発展方程式

クォーク密度の発展方程式に対するクォーク対生成の寄与を取り入れると，(10.37) は次のようになる：

$$\frac{dq_i(x,Q^2)}{d\log Q^2}=\frac{\alpha_S}{2\pi}\int_x^1\frac{dy}{y}\left(q_i(y,Q^2)P_\mathrm{qq}\left(\frac{x}{y}\right)+g(y,Q^2)\ P_\mathrm{qg}\left(\frac{x}{y}\right)\right). \tag{10.42}$$

ここで，i はクォークのフレーバーである。第 2 項は前にはなかった項であり，これは運動量比 x を持ったクォークが，運動量比 y $(>x)$ を持つ親のグルーオンによって対生成されたことを表す。その確率は $\alpha_SP_\mathrm{qg}(x/y)$ である。陽子内のグルーオン密度の発展方程式も必要だから，まだこのままの枠組では不完全である。前と同じ議論をくり返して，グルーオンの発展方程式を図式的に次のように書くことができる。



(10.43)

つまり

$$\frac{dg(x,Q^2)}{d\log Q^2}=\frac{\alpha_S}{2\pi}\int_x^1\frac{dy}{y}\left(\sum_i q_i(y,Q^2)P_{gq}\left(\frac{x}{y}\right)+g(y,Q^2)P_{gg}\left(\frac{x}{y}\right)\right). \quad (10.44)$$

ここに i に関する和は $i=1,2,\cdots,2n_f$ で，すべてのフレーバーのクォークと反クォークにわたる。クォークの質量を無視すれば，P_{gq} は添字 i によらない。

問題 10.10 次の関係式を証明するにはどこから手をつければよいか。

$$P_{gq}(z)=\frac{4}{3}\frac{1+(1-z)^2}{z}, \quad (10.45)$$

$$P_{gg}(z)=6\left(\frac{1-z}{z}+\frac{z}{1-z}+z(1-z)\right). \quad (10.46)$$

問題 10.11 (10.42) を図式的に表してみよ。

問題 10.12 次の組み合わせ

$$q_{NS}\equiv q_i-q_j \quad (10.47)$$

$$q_S\equiv\sum_i q_i \quad (10.48)$$

に対して発展方程式を導け。添字は普通に用いられるもので，それぞれクォークの非1重項 (non-singlet) および1重項 (singlet) の組み合わせを表す。

10.8 *P* 関数の物理的解釈

QCD は，われわれをどこへ導いたのかを調べてみよう。Q^2 の大きいところでは，ep → eX の構造関数は "パートン模型的" 公式で与えられる。パートン密度はスケールせず Q^2 発展をするが，それは QCD で計算できる。深非弾性散乱を調べた結果，Q^2 依存性を持ったパートン密度が得られたが，この密度はただ標的陽子を特徴づけるだけであって，試験体の性質には無関係である。いいかえれば，パートン密度は，それによって異なる過程で見出された構造関数の間の関係をつけることができるという意味で普遍的である。

Q^2 発展は，関数 P_{qq}, P_{gq}, P_{qg} および P_{gg} によって支配される。これら P 関数の物理的意味は，(10.35) にもどって，それを (10.7) の形に書き直してみると

はっきりする：

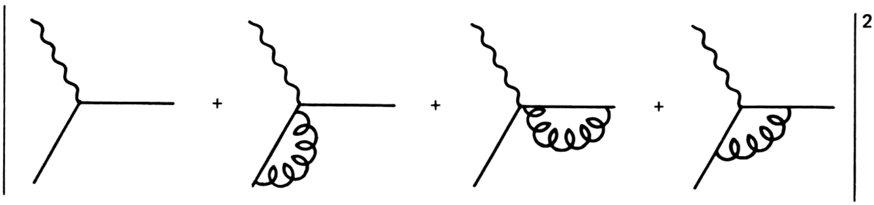
$$q(x, Q^2)+\Delta q(x, Q^2)=\int_0^1 dy\int_0^1 dz\ q(y, Q^2)\mathcal{P}_{qq}(z, Q^2)\delta(x-yz). \quad (10.49)$$

ここで

$$\mathcal{P}_{qq}(z, Q^2)\equiv\delta(1-z)+\frac{\alpha_s}{2\pi}P_{qq}(z)\log\frac{Q^2}{\mu^2}. \quad (10.50)$$

$\mathcal{P}_{qq}(z, Q^2)$ を，親のクォークに対して運動量比 z を持ったクォークが，クォーク内部に α_s の 1 次で存在する**確率密度**と解釈するのは自然であろう。$\delta(1-z)$ は，$q(x, Q^2)$ に変化がないということに対応する。$O(\alpha_s)$ の寄与を考慮すると，クォークが状態を変えないでいる確率は明らかに減少する。

ここで，今まで無視してきた仮想グルーオンの Feynman 図を含めることが決定的になる。これらの図を含めると，(10.34) の右辺第 1 項は次のように拡張される：



したがって，仮想グルーオンを含む 3 つの Feynman 図とパートンの図との干渉から $O(\alpha\alpha_s)$ の寄与が生ずる。この干渉も $z=1$ で特異性を持つ。この特異性は，不完全な $O(\alpha_s)$ の計算 (10.50) の $z=1$ における特異性と完全に打ち消し合う。これらの寄与をいちいち計算しないでも，どういう結果を生ずべきかということは容易にわかる。つけ加わる寄与は完全に $z=1$ に集中し，$\delta(1-z)$ の形をしている。全確率 $P_{qq}(z)$ は

$$\int_0^1 P_{qq}(z)\,dz=0 \quad (10.51)$$

という条件を満たさなければならない。この条件は，全クォーク数と全反クォーク数の差が 保存することを示す。　クォーク内部に クォークを見出す確率 $\mathcal{P}_{qq}(z)$ は，z について積分すれば 1 になるはずである。もし $\mathcal{P}_{qq}(z)$ の積分が 1 でなければならないとすると，(10.50) から (10.51) の条件が必要であることがわかる。仮想粒子の Feynman 図は，(10.31) の $P_{qq}(z)$ の特異性 $1/(1-z)$ を正則化して (10.51) が成り立つ役割を果しているのだ。この特異性を消して $P_{qq}(z)$ を修正することを，便宜上，“プラス処方”の正則化と呼ぼう。つまり，

$1/(1-z)$ を下に定義する $1/(1-z)_+$ で置き換えるのである：

$$\int_0^1 dz \frac{f(z)}{(1-z)_+} = \int_0^1 dz \frac{f(z)-f(1)}{1-z}. \tag{10.52}$$

ただし，$z<1$ で $(1-z)_+ = (1-z)$，$z=1$ で無限大である。

問題 10.13　(10.51), (10.52) を用いて

$$P_{qq}(z) = \frac{4}{3}\frac{1+z^2}{(1-z)_+} + 2\delta(1-z) \tag{10.53}$$

を証明せよ。

問題 10.14　運動量保存を用いて

$$\int_0^1 dz \cdot z(q_S(z, Q^2) + g(z, Q^2)) = 1 \tag{10.54}$$

を確かめよ。これから P_{gg} の中の $\delta(1-z)$ を含む項を決定し，次式を証明せよ：

$$P_{gg}(z) = 6\left(\frac{1-z}{z} + \frac{z}{(1-z)_+} + z(1-z)\right) + \left(\frac{11}{2} - \frac{n_f}{3}\right)\delta(1-z). \tag{10.55}$$

ただし n_f はクォークのフレーバーの数である。

問題 10.15　QCD の Feynman 図のバーテックスにおける運動量保存から，$z<1$ に対して

$$\begin{aligned} P_{qq}(z) &= P_{gq}(1-z), \\ P_{qg}(z) &= P_{qg}(1-z), \\ P_{gg}(z) &= P_{gg}(1-z) \end{aligned} \tag{10.56}$$

が成り立つことを示せ。分岐関数 (splitting function) の具体的な形が，これらの関係を満足していることを確かめよ。

問題 10.16　もし $\alpha_S(Q^2) = c/\log Q^2$ ならば，(10.37) から

$$\frac{\int_0^1 x^{n-1} q(x, Q^2)\, dx}{\int_0^1 x^{n-1} q(x, Q_0{}^2)\, dx} = \left(\frac{\log Q^2}{\log Q_0{}^2}\right)^{A_n}$$

が成り立つことを示せ。ただし

$$\begin{aligned} A_n &= \frac{c}{2\pi}\int_0^1 x^{n-1} P_{qq}(x)\, dx \\ &= \frac{c}{2\pi}\frac{4}{3}\left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{n(n+1)} - 2\sum_{j=2}^{n}\frac{1}{j}\right) \end{aligned}$$

である。つまり，QCD ではクォークの構造関数は $\log Q^2$ のベキで減少するが，それは具体的に計算することができる。上式の c は (7.65) で与えられる。

賢明な読者は，P 関数の解釈はおかしいようだと気がつかれただろう。たとえば P_{qq} の項を，グルーオン放出によるクォーク密度の変化に対する補正因子と考えた。しかし，寄与する Feynman 図は 2 つあって，一方は始状態クォークから，他方は終状態クォークからグルーオンが放出されている (図 10･2 参照)。

われわれの解釈は，第一の場合が主に効く場合にだけ成り立つのである。この場合，放出されたグルーオンは陽子構造の一部と考えることができる。つまり"パートン的"な図である。振幅のゲージ不変性を保証するためには両方の図が必要だが，この第二の Feynman 図は，グルーオンの非物理的偏極状態からの寄与を相殺する役割を果しているにすぎない。グルーオンの横偏極だけを加える物理的ゲージを採用すれば，最初の Feynman 図だけが残る。

10.9　Altarelli-Parisi の方法のレプトンと光子への応用：Weizsäcker-Williams の公式

Altarelli-Parisi の方法が，驚くほど簡単であることを強調して本章をしめくくることにする。(10.30) にもどってみよう。これは，$\gamma^*\mathrm{q}\to\mathrm{qg}$ において運動量比 $1-z$，横運動量 p_T のグルーオンが生成される確率である。これは，本当は次のように 2 階微分の形に書くべきだった：

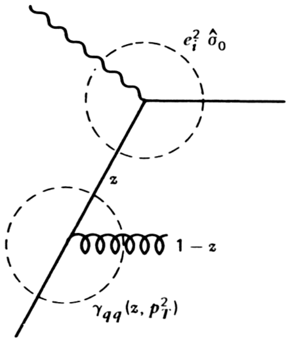
$$\frac{d\hat{\sigma}}{dzdp_T{}^2}=(e_i{}^2\hat{\sigma}_0)\gamma_{\mathrm{qq}}(z,p_T{}^2). \tag{10.57}$$

ここで

$$\gamma_{\mathrm{qq}}(z,p_T{}^2)=\frac{\alpha_s}{2\pi}\frac{1}{p_T{}^2}P_{\mathrm{qq}}(z). \tag{10.58}$$

この $\gamma^*\mathrm{q}\to\mathrm{qg}$ の断面積は，図式的には次のように表すことができる：

$$\frac{d\hat{\sigma}}{dzdp_T{}^2}= \tag{10.57'}$$



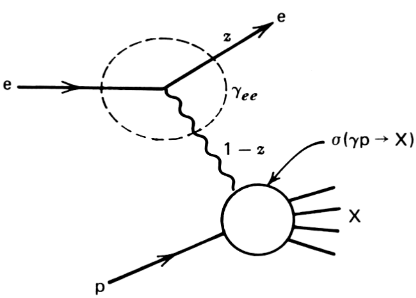
(z が実際，グルーオン輻射後のクォークの運動量比であることは，光子の運動量にクォークの運動量 zp_i を加え，出ていくクォークが質量殻上にある条件 $(q+zp_i)^2=0$ に注意すれば容易にわかる。これは，この z が前に (10.29) で定義したものにほかならないことを示している。)

(10.57′) をみてわかるように，オーダー $O(\alpha\alpha_S)$ の断面積はオーダー $O(\alpha)$ のパー

トン模型の断面積 $(e_i^2\hat{\sigma}_0)$ と，クォークが運動量比 $1-z$，横運動量 p_T のグルーオンを輻射する確率 γ_{qq} とに因子分解される。これはどのようにしてできるのだろうか。断面積は確率振幅から計算されるのであるが，その過程に寄与するいろいろな異なる振幅の和の絶対値の2乗をとっている。ここで，次のことがわかった。すなわちグルーオンの p_T があまり大きくない極限では，(10.30) を導くときと同じように，全 p_T 分布の中で p_T^{-2} という特異的な振舞いをする部分だけを残せば，(10.57′) の計算は2段階の現象と考えることができる。そうすれば相互作用の確率 $e_i^2\hat{\sigma}_0$ とグルーオン放出の確率 γ_{qq} は独立に計算できて，その積をとればよい。すなわち，確率的パートン描像をグルーオン放出に適用することができる。

この手法はクォークとグルーオン (QCD) に特有のことではない。実際，1934年の Weizsäcker と Williams の仕事以来，レプトンに対しても光子に対しても (QED)，ともに有効に使えることがわかっている。たとえば，$ep \to eX$ を考えよう。この断面積を次のように書いてよいだろう：

$$\frac{d\sigma}{dz\,dp_T^2}=$$



$$=\gamma_{ee}(z, p_T^2)\,[\sigma(\gamma p \to X)]_{E_\gamma=(1-z)E}. \tag{10.59}$$

ここで

$$\gamma_{ee}(z, p_T^2)=\frac{\alpha}{\pi}\frac{1}{p_T^2}P_{ee}(z) \tag{10.60}$$

で，z および p_T は出ていく電子の運動量比および横運動量である。$P_{ee}(z)$ は次式で与えられる：

$$P_{ee}(z)=\frac{1+z^2}{1-z}. \tag{10.61}$$

Weizsäcker-Williams 近似については，たとえば Chen and Zerwas (1975) Phys. Rev. **D 12** (187) を参照されたい。α と α_S の定義の因子2の違いを考慮して $\alpha_S \to 2\alpha$ ((10.19) 参照) とすれば，(10.60) は (10.58) から導かれる。$P_{ee}(z)$

はカラー因子を別にすれば，(10.31) の $P_{\mathrm{qq}}(z)$ にほかならない。(10.60) は，QED で等価光子（equivalent photon）分布として知られている。同様に，(10.41) の P_{qg} に対応する QED の量 $P_{\mathrm{e}\gamma}$ を次のように定義する：

$$P_{\mathrm{e}\gamma}(z)=z^2+(1-z)^2. \tag{10.62}$$

この手法が $\mathrm{e^+e^-} \to \mathrm{q\bar{q}g}$ の断面積を計算するのに偉力を発揮することは次章で例示しよう。$\mathrm{e^+e^-} \to \mathrm{q\bar{q}g}$ を $\mathrm{e^+e^-} \to \mathrm{q\bar{q}}$ のクォーク（反クォーク）がグルーオンを 1 個放出する過程とみて計算するのである。$\gamma_{\mathrm{qq}}(z, p_T{}^2)$ は一度計算しておけば，あとは必要に応じて他の Feynman 図の一部分をこれで置き換えればよい。

11

e^+e^- 消滅と QCD

前章では QCD を歴史的実験，すなわちハドロンによるレプトンの非弾性散乱の枠内で学んだ。レプトンの非弾性散乱で作られた大きい Q^2 の短波長仮想光子 (図 11・1 (a)) によって陽子を探ったところ，陽子の構成要素 (第 9 章) とそのカラー相互作用 (第 10 章) が明らかになったのである。その結果得られた物理的描像を解釈することは容易だ。なぜなら，クォークとグルーオンの相互作用は近距離 (α_s が小さい) 力なので，実験結果を摂動計算と比較することができるからである。

高分解能を持った光子は，高エネルギー電子と陽電子を正面衝突させて作ることもできる (図 11・1 (b))。この実験技術の驚くべき偉力は，図 11・2 の Feynman 図をみれば一目瞭然だろう：e^+e^- 衝突型加速器 (コライダー) は QED，弱い相互作用，クォーク，グルーオンの研究，あるいは重いクォークやレプトンの探索と研究にも用いられる。 さらに， e^+e^- 消滅はレプトン (複雑なパートン構造を持ったハドロンではなく) が始状態に現れるという意味で “きれいな” 反応過程である。このような理由から，第 9 章と第 10 章で学んだ考え方や技術を，他の実験的情況にどのように適用できるかという主要な作業例として e^+e^- 過程を選ぶのである。

11.1 e^+e^- のハドロン消滅：$e^+e^- \to \bar{q}q$

e^+e^- 消滅で作られた大量のハドロンは，$e^+e^- \to \bar{q}q$ 過程で作られたクォークや反クォークの砕片(フラグメント)である (次章で $e^+e^- \to \bar{q}qg$ の高次過程を計算して，この主張が正しいことを示す)。図 11・2 (c) の QED 過程 $e^+e^- \to \bar{q}q$ の断面積は，図 11・2 (a) の過程に対する断面積

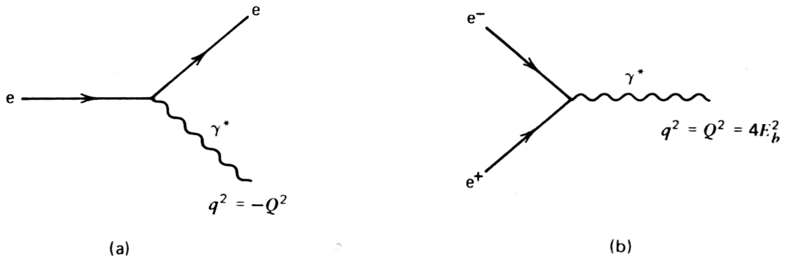


図 11·1 (a) 深非弾性散乱による仮想光子で探る。(b) ビームエネルギー E_b の電子・陽電子正面衝突による仮想光子で探る。

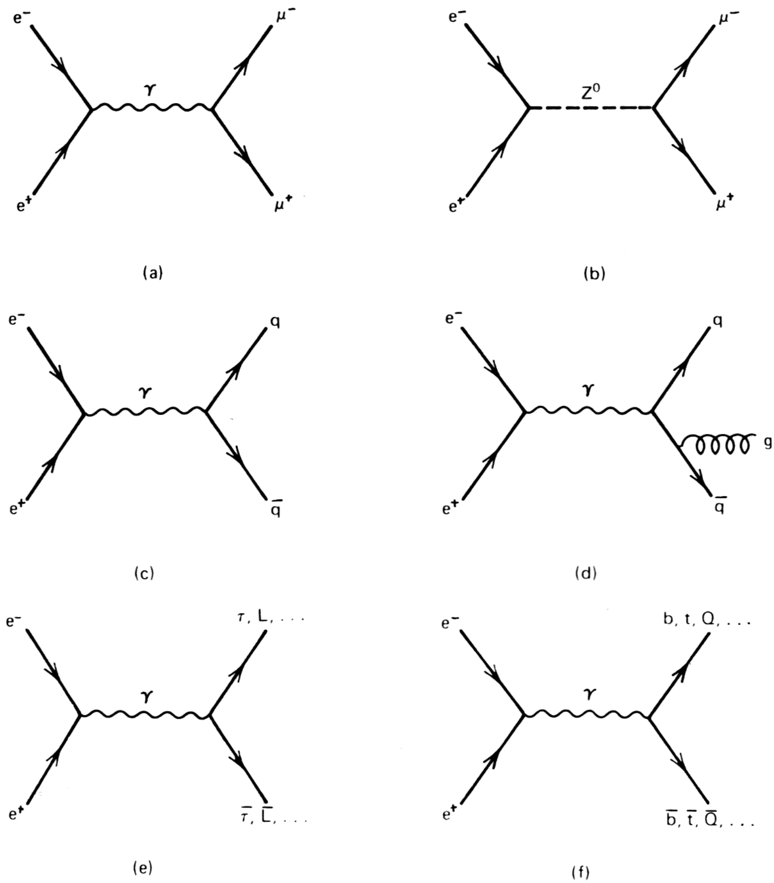


図 11·2 e^+e^- 消滅実験で可能な過程

$$\sigma(e^+e^- \to \mu^+\mu^-) = \frac{4\pi\alpha^2}{3Q^2} \tag{11.1}$$

からただちに求めることができる。(6.33) がその結果である。ここで重心系のエネルギーの 2 乗を

$$s = Q^2 = 4E_b{}^2 \tag{11.2}$$

と書こう (図 11･1 (b) 参照)。求める断面積は

$$\sigma(e^+e^- \to \bar{q}q) = 3e_q{}^2\sigma(e^+e^- \to \mu^+\mu^-) \tag{11.3}$$

となる。ただしクォークの電荷は分数なので e_q と表しておいた。3 という余分な因子はクォークの各カラーごとに同じ Feynman 図があり，それぞれの断面積を加えるので現れる。あらゆる種類のハドロンを生成する断面積を求めるには，すべてのクォークフレーバーについて加え合わせなければならない。こうして次の断面積が得られる：

$$\sigma(e^+e^- \to \text{ハドロン}) = \sum_q \sigma(e^+e^- \to \bar{q}q) \tag{11.4}$$

$$= 3\sum_q e_q{}^2\sigma(e^+e^- \to \mu^+\mu^-). \tag{11.5}$$

この簡単な計算からドラマティックな予言ができるのだ：

$$\boxed{R \equiv \frac{\sigma(e^+e^- \to \text{ハドロン})}{\sigma(e^+e^- \to \mu^+\mu^-)} = 3\sum_q e_q{}^2.} \tag{11.6}$$

$\sigma(e^+e^- \to \mu^+\mu^-)$ はよくわかっているから (図 6･6)，e^+e^- のハドロンへの全消滅断面積の測定が，カラーはもちろん，クォークの数，すなわちフレーバーの種類に関する情報を直接与えることになる。すなわち

$$\begin{aligned} R &= 3\left[\left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2\right] = 2 && \text{u, d, s クォークの場合} \\ &= 2 + 3\left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{10}{3} && \text{u, d, s, c クォークの場合} \\ &= \frac{10}{3} + 3\left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{11}{3} && \text{u, d, s, c, b クォークの場合} \end{aligned} \tag{11.7}$$

図 11･3 はこれらの予言と R の実験値とを比較したものである。$R=2$ という値は，明らかにチャーム粒子生成の閾値 $Q=2(m_c+m_u)\simeq 3.7$ GeV 以下に対応している。5 種類のクォークフレーバーすべての閾値以上では ($Q>2m_b\simeq 10$ GeV)，$R\simeq 11/3$ で予言通りである。カラーが 1 種類だけだとすると $R=11/3$ は 1/3 になってしまうから，この R の実験値はクォークのカラーが 3 種類だということを立証したのだ ((11.3) 参照)。

R に関するこれらの結果は，QCD を念頭において解釈すると修正しなく

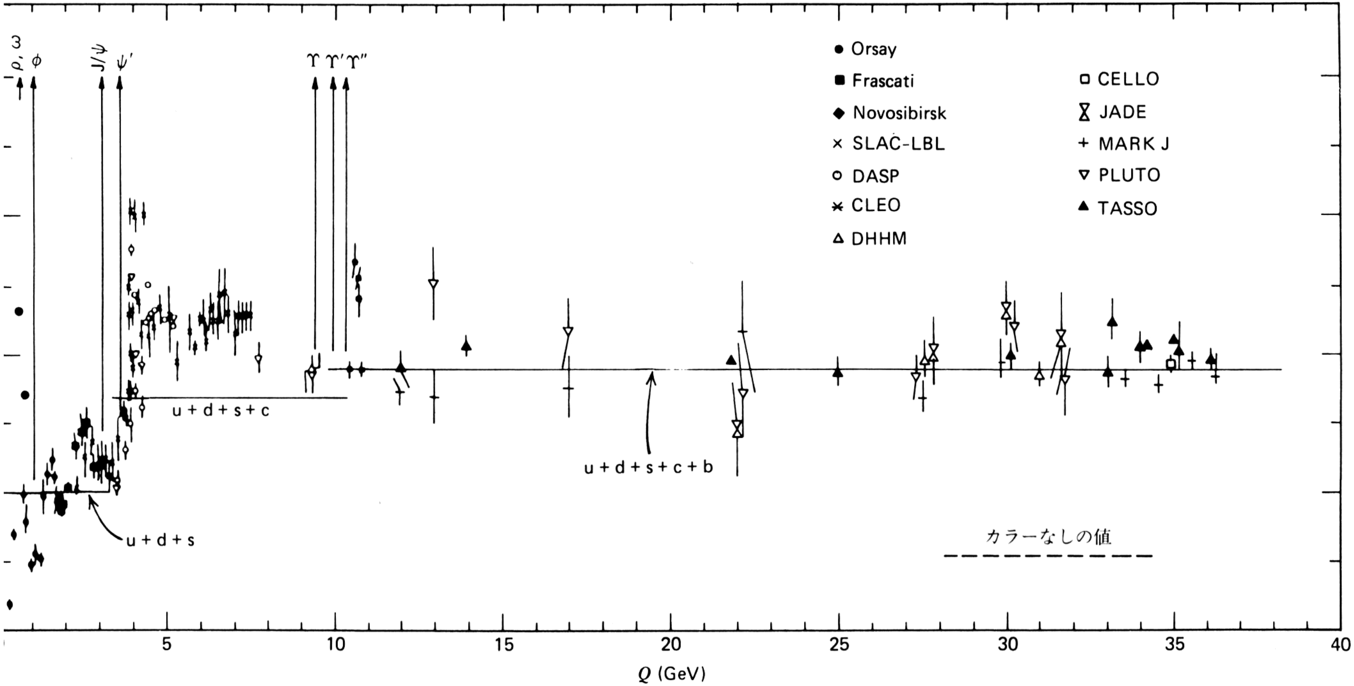


図 11·3 (11.6) の比 R を e^+e^- の重心系の全エネルギーの関数として表す。(鋭いピークはフレーバーの閾値のちょうど下，あるいはその近傍での幅の狭い 1^- 共鳴の生成に対応している。)

てはならない。(11.4) は (最低次の) 過程 $e^+e^- \to \bar{q}q$ に基づく結果である。しかしクォーク (反クォーク) からのグルーオン輻射の Feynman 図からの寄与も含めなければならない。$O(\alpha_s)$ の次数まで考慮すると，(11.6) は次のように修正される：

$$R = 3\sum_{q} e_q{}^2 \left(1 + \frac{\alpha_s(Q^2)}{\pi}\right).$$

すなわち，R が Q^2 に依存しないという (11.6) のスケールする結果は，α_s が $\log Q^2$ 的に振舞うために対数的に破れる ((7.65) 参照)。現在の実験では，この R に加わる寄与を検出することはできない。したがって上で行った実験データとの比較はよい近似になっている。補正項 α_s/π を導くことは 11.7 節に譲るが，そこでは 3 ジェット現象 $e^+e^- \to \bar{q}qg$ の研究の副産物として現れる。

11.2 破砕関数とそのスケーリング

これまでは，クォークがどのようにして，検出器にかかるハドロンに変わるのかという問題はまともに論じなかった。クォークは 100％ 破砕化(フラグメント)してハドロンに変わるといっておけば十分だった。こうして (11.4) が得られたのだ。もっと詳しい計算をするには，このハドロン化の問題は避けて通ることはできない。

重心系で生成されたクォークと反クォークは，大きさが等しく逆向きの運動量を持って離れていき，2 つの互いに反対方向に向かうハドロンジェットになって出てくるが，その運動量ははじめの q および $\bar{q}$ のそれとほとんど同じ直線上にある。ハドロンは q あるいは $\bar{q}$ に対して横方向の運動量を与えられて曲がるが，その大きさは約 300 MeV を越えない程度である。

第 1 章では，いったん q と $\bar{q}$ が約 1 fm 離れると，ハドロンの制動輻射としてジェットが形成されるという描像をとった。すると α_s が大きくなり，強いカラー力が離れていこうとする q と $\bar{q}$ を引っ張る。ポテンシャルエネルギーは非常に大きくなるので，1 個あるいはもっとたくさんのクォークが作られる (図 11·4)。結局，すべてのエネルギーは，ほとんど q と $\bar{q}$ の方向に動くハドロンから成る 2 つのジェットに消費されてしまう。

クォークのハドロンへの破砕化を記述するには，第 9 章でハドロン内部のクォークを記述した定式化に類似したものを用いる。図 11·4 はハドロン h を観測して，そのエネルギー E_h を測定したことを示す。これに対応する微分断面積は次頁のように書くことができる：

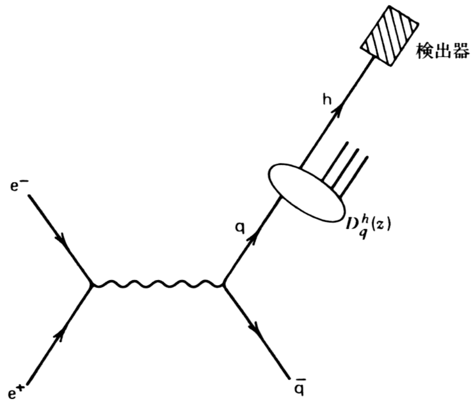


図 11·4　クォークに対するエネルギー比 $z=2E_h/Q$ をもって観測されるハドロン

$$\frac{d\sigma(\mathrm{e^+e^-}\to \mathrm{hX})}{dz}=\sum_{\mathrm{q}}\sigma(\mathrm{e^+e^-}\to \bar{\mathrm{q}}\mathrm{q})[D_{\mathrm{q}}{}^{\mathrm{h}}(z)+D_{\bar{\mathrm{q}}}{}^{\mathrm{h}}(z)]. \tag{11.8}$$

この式は，図 11·4 を 2 つの引き続いて起こった事象として記述している。すなわち，$\mathrm{q\bar{q}}$ が生成され，それに $\mathrm{q}, \bar{\mathrm{q}}$ のどちらかの破砕化が続いて，検出されるハドロン h が作られるのである。したがって D 関数は，クォークに対してエネルギー比 z を持ったハドロンを，クォーク（あるいは反クォーク）の破片群中に見出す確率を表す。すなわち

$$z\equiv\frac{E_{\mathrm{h}}}{E_{\mathrm{q}}}=\frac{E_{\mathrm{h}}}{E_{\mathrm{b}}}=\frac{2E_{\mathrm{h}}}{Q}. \tag{11.9}$$

(11.8) はクォークフレーバーすべてにわたり加えるが，それは検出器が観測されるハドロンの親の量子数を知らない，という事実を認めていることにあたる。

破砕関数† $D(z)$ は，パートン → ハドロン遷移を記述するが，これは第 9 章の構造関数 $f(x)$ が，ハドロン → パートン遷移を記述したことと同様の事情である。f 関数と同じように，D 関数は運動量保存と確率保存による束縛条件に従っている：

$$\sum_{\mathrm{h}}\int_0^1 zD_{\mathrm{q}}{}^{\mathrm{h}}(z)\,dz=1, \tag{11.10}$$

† (訳註)　うまい訳語ではないが，クォークがハドロン化していく事情を頭に描いて，その意味をくみとっていただきたい。

$$\sum_q \int_{z_{\min}}^1 [D_q{}^h(z) + D_{\bar{q}}{}^h(z)]dz = n_h. \tag{11.11}$$

ここで $z_{\min}$ は質量 m_h のハドロン生成のエネルギー閾値 $2m_h/Q$，n_h はハドロン h の平均多重度である。(11.10) は，すべてのハドロンのエネルギーを加えると，親のクォークのエネルギーになるということを表しているにすぎない。同じ関係は当然 $D_{\bar{q}}{}^h(z)$ に対しても成り立つ。ハドロン h の多重度 n_h は，すべての可能な親，すなわち，すべてのフレーバー q あるいは $\bar{q}$ から h が作られる確率の和として求められる。

問題 11.1 破砕関数は次のような形にパラメター化することが多い：

$$D_q{}^h(z) = N\frac{(1-z)^n}{z}.$$

ただし n と N は定数である。破砕した後，ハドロン h が持っていくクォークのエネルギーの平均値を $\langle z \rangle$ とするとき，次の関係を示せ：

$$N = (n+1)\langle z \rangle.$$

さらに図 11･4 で表される 2 ジェット過程に対して

$$n_h \sim \log\left(\frac{Q}{2m_h}\right)$$

が成り立つことを示せ。すなわち，ハドロン h の多重度は消滅エネルギーとともに対数的に増大する。

(11.8) と (11.4) の比をとって (11.3) を使えば

$$\frac{1}{\sigma}\frac{d\sigma(e^+e^- \to hX)}{dz} = \frac{\sum_q e_q{}^2[D_q{}^h(z) + D_{\bar{q}}{}^h(z)]}{\sum_q e_q{}^2} \tag{11.12}$$

$$= \mathcal{F}(z). \tag{11.13}$$

すなわち，包含反応断面積 $d\sigma(e^+e^- \to hX)/dz$ をハドロンに消滅する全断面積で割った量はスケールすると予測される。全断面積 σ および $d\sigma/dz$ は消滅エネルギー Q に依存するが，(11.12) によればその比は Q に依存しない。このようにスケールする結果が得られたのは驚くにはあたらない。というのは，スケールするパートン模型を信用して (11.12) を導いたからである (図 11･4 参照)。

図 11･5 は異なる Q^2 の値に対して，$(1/\sigma)(d\sigma/dz)$ を z の関数として示したものである。スケーリングは完全には成り立っていない。クォークまたは反クォークからのグルーオン放出がスケーリングを破って，(11.13) が $\log Q^2$ にも依存する。その定性的な傾向は，電子の深非弾性散乱の場合と同じである。つまり $\mathcal{F}(z, Q^2)$ は z の小さいところで Q^2 とともに増加するが，z が 1 の近くでは減少する。図 11･5 にみられる $z \lesssim 0.2$ における大きなスケーリングの破

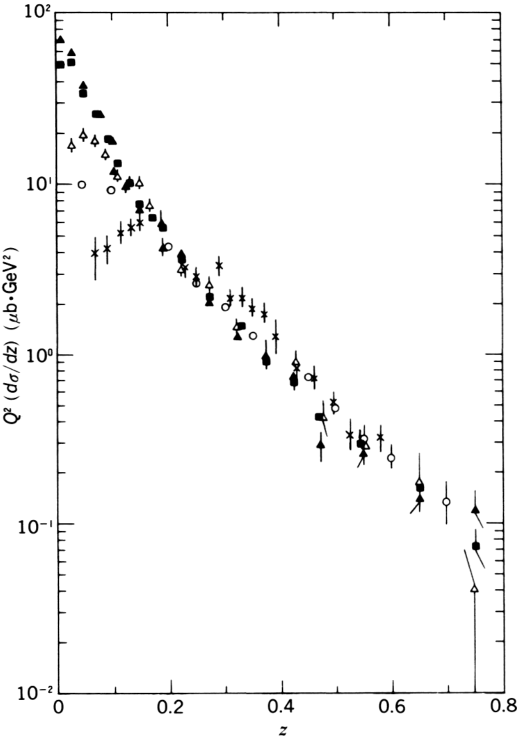


図 11·5　異なる重心系のエネルギーにおける $e^+e^- \to hX$ の $Q^2\dfrac{d\sigma}{dz}\sim\dfrac{1}{\sigma}\dfrac{d\sigma}{dz}$ を z の関数として表す。(×) 5 GeV；(○) 7.4 GeV；(△) 12 GeV；(■) 27.4–31.6 GeV；(▲) 35.0–36.6 GeV．実験データは Stanford 線型加速器センターおよび PETRA による。

れは，グルーオン放出のみによるものではない。その理由が次節の主題である。

問題 11.2　破砕関数 $D(z)$ はパートンの性質を記述しているから，パートンの作られ方には関係なく同じはずである。電子による包含生成断面積 $\sigma(\mathrm{ep}\to\mathrm{hX})$ において次の関係が成り立つことを示せ：

$$\frac{1}{\sigma}\frac{d\sigma(\mathrm{ep}\to\mathrm{hX})}{\mathrm{dz}}=\frac{\sum_{\mathrm{q}} e_{\mathrm{q}}{}^2 f_{\mathrm{q}}(x)\,D_{\mathrm{q}}{}^{\mathrm{h}}(z)}{\sum e_{\mathrm{q}}{}^2 f_{\mathrm{q}}(x)}.$$

ここで，$f_{\mathrm{q}}(x)$ は第 9 章に出てきた陽子の構造関数である (図 11·6 参照)。和は h の親となりうるクォークおよび反クォーク全部にわたる。

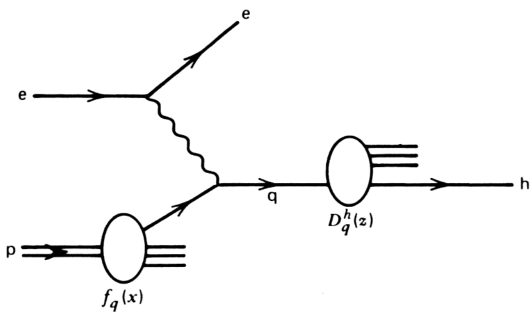


図 11·6　深非弾性レプトン散乱によるハドロン生成；ep →hX

問題 11.3　荷電共役およびアイソスピン不変性を仮定して次の関係を示せ。

$$D_{\mathrm{u}}^{\pi^+}=D_{\bar{\mathrm{u}}}^{\pi^-}=D_{\mathrm{d}}^{\pi^-}=D_{\bar{\mathrm{d}}}^{\pi^+},$$
$$D_{\mathrm{u}}^{\pi^-}=D_{\bar{\mathrm{u}}}^{\pi^+}=D_{\mathrm{d}}^{\pi^+}=D_{\bar{\mathrm{d}}}^{\pi^-},$$
$$D_{\mathrm{s}}^{\pi^+}=D_{\bar{\mathrm{s}}}^{\pi^-}.$$

問題 11.4　p, n に対して価クォーク近似を用い，

$$N_{\mathrm{p}}^{\pi}(z)\equiv\frac{1}{\sigma}\frac{d\sigma(\mathrm{ep}\to\pi\mathrm{X})}{dz}$$

と書けば

$$\frac{\int dz\,[N_{\mathrm{n}}^{\pi^+}-N_{\mathrm{n}}^{\pi^-}]}{\int dz\,[N_{\mathrm{p}}^{\pi^+}-N_{\mathrm{p}}^{\pi^-}]}=\frac{2}{7}$$

であることを示せ。

11.3　重いクォーク生成についてのコメント

e^+e^- 消滅とレプトンによる粒子生成過程 (深非弾性散乱は代表的) はますますよく似てきたが，1つ大きな違いがある点を忘れてはならない。レプトンの生成過程の場合，u, d, s クォークは核子標的内にたくさんあるので，これらが主役を演ずる。チャームクォークはだいたい 10 イベントに 1 個ぐらいであるから，第 9 章の現象論的な議論では無視した。e^+e^- 消滅の場合には事情はまったく違う。閾値以上 ($Q^2>4m_c{}^2$) では断面積は急激に立ち上がって，漸近的な値のかなり近くまで達する (図 11·3 参照)。c クォークと u クォークはともに $e_{\mathrm{q}}=+2/3$ だから，同じ断面積を持つことは (11.3) から明らかだ。しかし閾値

近くでは，このしばしば起こるチャームクォークのイベントが示す終状態ハドロンの構造は，軽いクォークを含む典型的なイベントである2ジェット構造とは非常に違っている。この場合cと$\bar{c}$はほとんど静止して生成され，続いてzの小さいソフトハドロンに弱崩壊していく。したがって，zの小さいイベントの増加はチャーム閾値をよぎったことと関連している。これがスケーリングの破れをもたらすが，これをグルーオン放出による破れと混同することがある。事実，見かけ上はよく似ている。

図11·5において，$z \lesssim 0.2$にみられるスケーリングの大きな破れはcクォークとbクォーク生成に関係している。すなわちc, bクォークの閾値をよぎったとき，多重度が大きくzの小さいイベントが現れるのが観測されるのである。この機構は1つの積極的な側面を持っている。重いクォークのイベントの特徴的な性質は，e^+e^-コライダーのエネルギーを増していって表1-5のtクォークのようにまだみつかっていない重いクォークを探す場合，その実験的な特徴として役立つ。Rの値の“とび”も新しいクォーク生成のしるしであり，図11·3にはチャームの例がみられる。しかし$e_q = -1/3$の場合は，このとびは1/4になるので実験的観測は容易ではなくなる。軽いクォークの特徴である2ジェット構造からのずれを探すほうが，もっと敏感なテストになることが多い。

11.4　3ジェットイベント：$e^+e^- \to \bar{q}qg$

摂動的QCDの観点から，これまでは$\sigma(e^+e^- \to$ ハドロン$)$に対する主要次数$O(\alpha^2)$の寄与だけを考えてきた。$\alpha^2\alpha_s$の次数ではqおよび$\bar{q}$はグルーオンを放出することができる(図11·2(d))。この$\bar{q}qg$イベントは終状態に3つの破砕していくジェットを作る。もう1つのジェットでは，グルーオンが親パートンである。$\alpha_s(Q^2) \simeq 0.1-0.2$になる消滅エネルギーの場合には，3ジェットイベントは終状態の約10％を占める。まず第一になすべきことは，このようなイベ

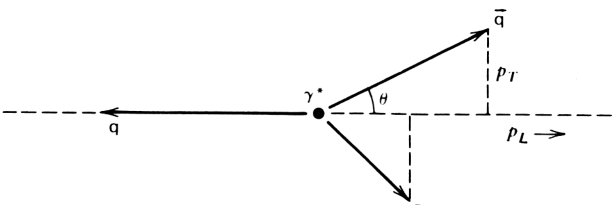


図11·7　重心系における$e^+e^- \to \gamma^* \to \bar{q}qg$

ントを記述する運動学的変数を導入することである。

静止した仮想光子 (γ^*) によって生成された q, $\bar{\text{q}}$ および g の運動量ベクトルは，図 11·7 に示す通りである。(11.9) と同じようにエネルギーを使うことにして，e^-(e^+) ビームエネルギーでスケールさせたパートンの縦運動量

$$x_{\rm q}\equiv\frac{2E_{\rm q}}{Q},\qquad x_{\bar{\rm q}}\equiv\frac{2E_{\bar{\rm q}}}{Q},\qquad x_{\rm g}=\frac{2E_{\rm g}}{Q} \tag{11.14}$$

および横運動量

$$x_T\equiv\frac{2p_T}{Q} \tag{11.15}$$

を導入しよう。(11.9) の z と同じく，すべてこれらの比は 0 と 1 の間に限られる。図 11·7 の q, $\bar{\text{q}}$ および g の運動量比は次の通りである。

$$\begin{aligned}(x_{\rm q}\,;\,0,\ 0,\ -x_{\rm q}):&\quad \text{q}\\(x_{\bar{\rm q}}\,;\,x_T,\ 0,\ x_L):&\quad \bar{\text{q}}\\(x_{\rm g}\,;\,-x_T,\ 0,\ x_{\rm q}-x_L):&\quad \text{g}\end{aligned} \tag{11.16}$$

この変数はもっともエネルギーの大きいジェットに相対的に定義されている。たとえば，図 11·7 では q ジェットに関して定義してある。その方向を "スラスト (Thrust) 軸†" と呼ぶ。q, $\bar{\text{q}}$ および g はすべて $y=0$ 平面上にのっている。縦運動量および横運動量保存は (11.16) に取り入れられているが，エネルギー保存は付加条件

$$x_{\rm q}+x_{\bar{\rm q}}+x_{\rm g}=2 \tag{11.17}$$

として導入する。$\bar{\text{q}}$ および g の質量が 0 ということから，さらに

$$\begin{aligned}x_{\bar{\rm q}}{}^2-x_T{}^2-x_L{}^2&=0\\x_{\rm g}{}^2-x_T{}^2-(x_L-x_{\rm q})^2&=0\end{aligned} \tag{11.18}$$

の制限がつく ((11.16) 参照)。(11.18) と (11.17) から次式が成り立つ：

$$x_T{}^2=\frac{4}{x_{\rm q}{}^2}(1-x_{\rm q})(1-x_{\bar{\rm q}})(1-x_{\rm g}). \tag{11.19}$$

問題 11.5 (11.19) を導け。また図 11·7 で q と $\bar{\text{q}}$ の間の角 θ は次式で決定されることを示せ：

$$x_{\bar{\rm q}}=\frac{2(1-x_{\rm q})}{2-x_{\rm q}-x_{\rm q}\cos\theta}. \tag{11.20}$$

さて図 11·7 に対する過程の断面積を求めよう。この特別な図では $\bar{\text{q}}$ がよりソ

---

† (訳註) ある軸方向 $\hat{\boldsymbol{n}}$ への核子の運動量成分の和を最大にするとき，それをスラスト軸と呼び，$T=\text{Max}\left(\sum_i \boldsymbol{p}_i\cdot\hat{\boldsymbol{n}}/\sum_i|\boldsymbol{p}_i|\right)$ をスラストという。

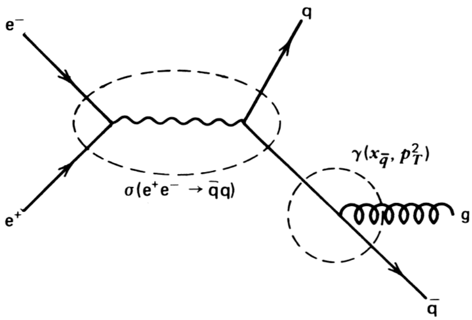


図 11·8　10.9 節の確率的手法を用いた $e^+e^- \to \bar{q}qg$ の計算

フトなグルーオンを放出しているから

$$x_q \geq x_{\bar{q}} \geq x_g \tag{11.21}$$

である。もっともはっきりしたグルーオン放出の実験的特徴は，q と $\bar{q}$ が互いに反対方向に生成されなくなることである。$\bar{q}$ は q の方向に対して横運動量比 x_T を持って生成される。したがって適切な観測量は $d\sigma/dx_T{}^2$ である。この断面積は，10.9 節の Altarelli-Parisi-Weizsäcker-Williams の方法を使って容易に求めることができる。図 11·8 と (10.57) を参照して

$$\frac{d\sigma}{dx_{\bar{q}}\,dp_T{}^2} = \sigma(e^+e^- \to \bar{q}q)\,\gamma_{\bar{q}\bar{q}}(x_{\bar{q}},\ p_T{}^2) \tag{11.22}$$

が得られる。ここで σ は $q\bar{q}$ 対生成の確率，$\gamma_{\bar{q}\bar{q}}$ は $\bar{q}$ が続いて運動量比 $(1-x_{\bar{q}})$ で，横運動量 $|p_T|$ のグルーオンを放出する確率である。(11.3) と (10.58) から次の関係式が得られる：

$$\begin{aligned} \sigma(e^+e^- \to \bar{q}q) &= \frac{4\pi\alpha^2}{Q^2} e_q{}^2, \\ \gamma_{\bar{q}\bar{q}}(x_{\bar{q}},\ p_T{}^2) = \gamma_{qq}(x_{\bar{q}},\ p_T{}^2) &= \frac{\alpha_s}{2\pi}\frac{1}{p_T{}^2} P_{qq}(x_{\bar{q}}). \end{aligned} \tag{11.23}$$

(11.23) を (11.22) に代入して

$$\frac{1}{\sigma}\frac{d\sigma}{dx_{\bar{q}}\,dx_T{}^2} = \frac{\alpha_s}{2\pi}\frac{1}{x_T{}^2} P_{qq}(x_{\bar{q}}) \tag{11.24}$$

を得る。$d\sigma/dx_T{}^2$ を計算するには，すべての可能な $\bar{q}$ のエネルギー比 $x_{\bar{q}}$ について積分すればよい。P_{qq} に対しては，(10.31) を用いて次のように計算される：

$$\frac{1}{\sigma}\frac{d\sigma}{dx_T{}^2}=2\cdot\frac{\alpha_s}{2\pi}\frac{1}{x_T{}^2}\int_{(x_{\bar{q}})_{\min}}^{(x_{\bar{q}})_{\max}}dx\cdot\frac{4}{3}\left(\frac{1+x^2}{1-x}\right). \tag{11.25}$$

余分な因子 2 がかかっているのは，$q \leftrightarrow \bar{q}$ で同じ確率が得られるためである。

(11.25) の積分は $x_{\bar{q}} \to 1$ で発散する。したがって，$x_{\bar{q}}$ が最大値をとるような運動学的状況にとくに興味がある。(11.21) から $x_{\bar{q}}$ の最大値は

$$x_{\bar{q}}=x_q \tag{11.26}$$

であることがわかる。$x_{\bar{q}}$ がこの最大値に近づくのは，放出されるグルーオンができるだけソフトな場合である。x_T が固定されていることを考慮すると，これは

$$x_g=x_T \tag{11.27}$$

のとき実現する。この運動学的状況を示したのが図 11·9 である。したがって，(11.17) から次の関係を得る：

$$(x_q)_{\min}=(x_{\bar{q}})_{\max}\simeq 1-\frac{x_T}{2}. \tag{11.28}$$

θ または x_T が，あまり大きくなければ運動量は保存するが，x_g は $\theta \to 0$ の場合にかぎって x_T と正確に等しくなる。このような近似は，(11.25) の Altarelli-Parisi の計算で暗黙のうちに行っていたのである (第 10 章参照)。(11.28) を用いると，(11.25) は次のように書ける：

$$\frac{1}{\sigma}\frac{d\sigma}{dx_T{}^2}\simeq\frac{8\alpha_s}{3\pi}\frac{1}{x_T{}^2}\int_{(x_{\bar{q}})_{\min}}^{1-\frac{1}{2}x_T}\frac{dx}{1-x}. \tag{11.29}$$

ここで $1+x^2$ を 2 と近似した。主にきく対数的な項以外は無視すれば，最終的に断面積は

$$\boxed{\frac{1}{\sigma}\frac{d\sigma}{dx_T{}^2}\simeq\frac{4\alpha_s}{3\pi}\frac{1}{x_T{}^2}\log\left(\frac{1}{x_T{}^2}\right)} \tag{11.30}$$

となる。

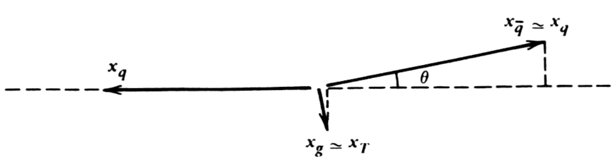


図 11·9 与えられた x_T に対し $x_{\bar{q}}$ の最大値を与える運動学的状況

11.5　$e^+e^- \to \bar{q}qg$ の断面積の別の導き方

$e^+e^- \to \bar{q}qg$ に対する断面積(11.30)は第6章の Feynman 則を用いても計算できる。前に，これと似た過程を計算したことがある。たとえば，$\gamma^* q \to qg$ は(10.17)で与えられたし，$\gamma^* g \to q\bar{q}$ は(10.38)で求めた。同様にして，図11·10の $\gamma^* \to \bar{q}qg$ の2つの寄与の振幅を加えて絶対値の2乗をとると

$$|\mathcal{M}|^2 = N\left(\frac{t}{s}+\frac{s}{t}+\frac{2uQ^2}{st}\right) \tag{11.31}$$

が得られる。ここで N は規格化定数と結合定数を含み，

$$\begin{aligned} s &= (p_\gamma - p_q)^2 \\ t &= (p_\gamma - p_{\bar{q}})^2 \\ u &= (p_\gamma - p_g)^2 \end{aligned} \tag{11.32}$$

で，$Q^2 \equiv p_\gamma{}^2$ である。やかましくいえば，パートン過程に対しては Mandelstam 変数を $\hat{s}, \hat{t}, \hat{u}$ と書くべきであった。

(11.31)を(11.14)で導入したエネルギー比 x を使って書き変えるために

$$s = Q^2(1-x_q), \qquad t = Q^2(1-x_{\bar{q}}), \qquad u = Q^2(1-x_g) \tag{11.33}$$

の関係を使う。これらの関係は4元運動量保存

$$p_\gamma{}^2 = (p_q + p_{\bar{q}} + p_g)^2 = 2p_g\cdot p_{\bar{q}} + 2p_q\cdot p_g + 2p_{\bar{q}}\cdot p_g \tag{11.34}$$

から導くことができる。たとえば

$$\begin{aligned} s &= (p_{\bar{q}} + p_g)^2 = 2p_{\bar{q}}\cdot p_g = p_\gamma{}^2 - 2p_q\cdot(p_{\bar{q}} + p_g) \\ &= p_\gamma{}^2 - 2p_q\cdot p_\gamma = Q^2\left(1-\frac{2E_q}{Q}\right) = Q^2(1-x_q). \end{aligned}$$

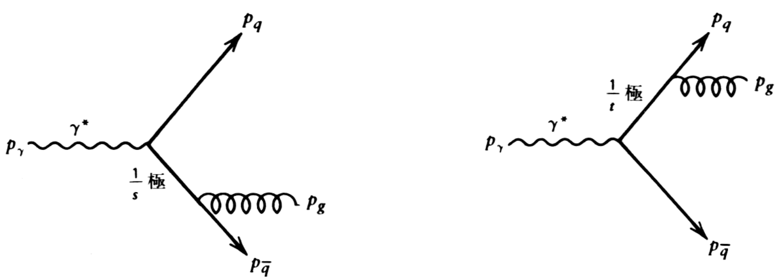


図 11·10　粒子の4元運動量を示した $\gamma^* \to q\bar{q}g$ の Feynman 図

(11.33) を (11.31) に代入すれば $\gamma^* \to \bar{q}qg$ に対して

$$|\mathcal{M}|^2 = N\frac{x_q{}^2 + x_{\bar{q}}{}^2}{(1-x_q)(1-x_{\bar{q}})}. \tag{11.35}$$

が得られる。ただし x_g を消去するために (11.17) を用いた。これに e^+e^- 対をくっつければ，全体にかかる因子 ($N \to N'$ に変える) は別として，(11.35) は $e^+e^- \to \bar{q}qg$ の断面積を与える：

$$\boxed{\frac{d\sigma}{dx_q dx_{\bar{q}}} = N'\frac{x_q{}^2 + x_{\bar{q}}{}^2}{(1-x_q)(1-x_{\bar{q}})}.} \tag{11.36}$$

(11.36) が前に求めた結果 (11.24) と同等であることを確かめるには，変数 x_q を $x_T{}^2$ に変換してやらなければならないが，まず次の関係に注意する。

$$\frac{d\sigma}{dx_{\bar{q}}\,dx_T{}^2} = \frac{d\sigma}{dx_{\bar{q}}\,dx_q}\frac{dx_q}{dx_T{}^2}. \tag{11.37}$$

Altarelli-Parisi の結果 (11.24) にもともと用いられていた，p_T が小さいという近似を使えば十分である。(11.19) を用いて $x_q \simeq 1$ の場合

$$\left|\frac{dx_T{}^2}{dx_q}\right| \simeq 4x_{\bar{q}}(1-x_{\bar{q}}) \tag{11.38}$$

と近似することができる。こうして (11.36) は次のように書ける：

$$\frac{d\sigma}{dx_{\bar{q}}\,dx_T{}^2} \simeq N'\left(\frac{1+x_{\bar{q}}{}^2}{1-x_{\bar{q}}}\right)\left[\frac{1}{4(1-x_q)(1-x_{\bar{q}})x_{\bar{q}}}\right]. \tag{11.39}$$

ここでふたたび $x_q \simeq 1$ を仮定した。この極限では $x_{\bar{q}} \simeq (1-x_g)$ であるから，(11.19) からわかるように，[　] の中の因子は $x_T{}^{-2}$ になる。こうして (11.39) は

$$\frac{d\sigma}{dx_{\bar{q}}\,dx_T{}^2} \simeq N'\frac{3}{4}P_{qq}(x_{\bar{q}})\frac{1}{x_T{}^2} \tag{11.40}$$

となる。ここに P_{qq} は (10.31) で与えられる。これは (11.24) の Altarelli-Parisi の結果と同じである。事実，規格化の係数を

$$N' = \frac{2\alpha_s}{3\pi}\sigma$$

と同定することができて，$O(\alpha_s)$ の正確な結果は次のようになる：

$$\boxed{\frac{1}{\sigma}\frac{d\sigma}{dx_q dx_{\bar{q}}} = \frac{2\alpha_s}{3\pi}\frac{x_q{}^2 + x_{\bar{q}}{}^2}{(1-x_q)(1-x_{\bar{q}})}.} \tag{11.41}$$

これに対して (11.24) は，一番きく対数的な項をとった近似 (leading logarithmic approximation) である。

11.6　3ジェット

$e^+e^- \to \bar{q}qg$ のイベントは，終状態で3つのハドロンジェットになった。(11.30) の分布は

$$\frac{1}{\sigma}\frac{d\sigma}{dp_T{}^2} \sim \alpha_s \frac{1}{p_T{}^2}\log\left(\frac{Q^2}{4p_T{}^2}\right) \tag{11.42}$$

と書くことができる。p_T はグルーオン放出の結果生じた q と $\bar{q}$ の間の横運動量である (図11・7参照)。$\bar{q}$ (あるいは q) が g を放出して反跳を受ける場合にかぎり，その q ($\bar{q}$) に対する横運動量 p_T は0と異なる。2ジェットのイベント $e^+e^- \to \bar{q}q$ の場合は $p_T=0$ である。ところで (11.42) では，p_T を固定すると断面積の比は Q^2 とともに増大する。すなわち，q ジェットに対して横運動量 p_T を持った $\bar{q}$ ジェットの数は Q^2 とともに増大する。これは消滅エネルギーが増大すると，ある決まった p_T を持ったグルーオンを放出する確率が大きくなるためである。これは電子による生成 (深非弾性散乱) の場合とまったく同じである。あの場合も γ^* の方向に対して横運動量 p_T を持ったジェットの生成断面積は log ($Q^2/p_T{}^2$) で増大した ((10.30) と (11.24) を比較せよ)。

$\bar{q}$ から出てくる破砕ハドロンも，クォーク方向に対して大きな p_T を持つことになるだろう。なぜなら，これらハドロンの p_T 分布はジェットの p_T 分布と同じ傾向になるからである。両者の分布は11.2節で導入した D 関数を用いてはっきりと関係づけることができる。その結果得られたハドロンのスラスト軸に関する $p_T{}^2$ および Q^2 依存性を図11・11に示す。あるイベントでは，親ジェットに対する子供のハドロンの横運動量が $k_T \simeq 300$ MeV 程度にもかかわらず，3つのジェットがはっきり分離している。このようなイベントを示したのが図11・12である。

(11.42) において α_s が定数であるという仮定は説明を要する。かりに $\alpha_s(Q^2) \sim 1/\log Q^2$ とすると上の議論は意味がなくなる。重要なことは，われわれが議論しているのは2つの運動量スケール $p_T{}^2$ および Q^2 (ただし $p_T{}^2 \ll Q^2$) を持つ過程だという点である。こういう状況はすでに問題10.7でも現れた。そのときは，α_s は実際は $\alpha_s(p_T{}^2)$ だが，α_s を定数のままにしておくと，主にきく次数では正しい結果が得られるという議論をしたのである。

問題 11.6　(11.30) の x_T 分布は "acollinearity†" 分布 $d\sigma/d\theta$ に書きかえることがで

---

† (訳註)　q と $\bar{q}$ が共線的，つまり同一直線上にある配位からのずれを表す，非共線度とでも呼ぶべき量。

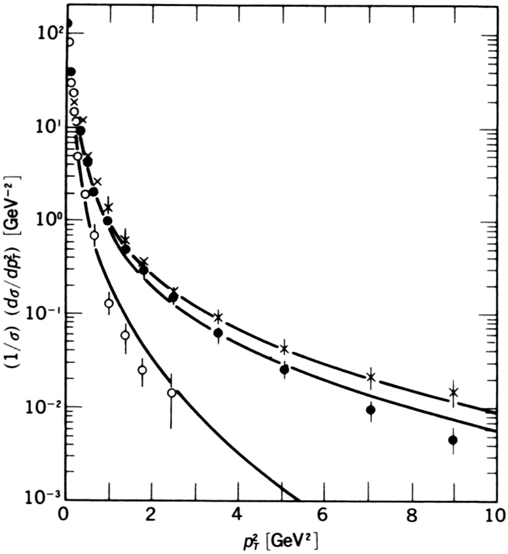


図 11·11 e^+e^- の重心系のエネルギーの値 Q の異なる値に対して，スラスト軸に対するハドロンの横運動量分布 $d\sigma/dp_T{}^2$;（○） $Q=12$ GeV ;（●） $27.4 \leq Q \leq 31.6$ GeV ;（×） $35.0 \leq Q \leq 36.6$ GeV. 曲線は QCD の計算。実験データは PETRA による。

きる。ただし θ は (11.20) と図 11·7 で定義された q と $\bar{q}$ ジェットの間の角度である。θ があまり大きくないとき，近似的に

$$\frac{1}{\sigma}\frac{d\sigma}{d\theta} \simeq \frac{8\alpha_s}{3\pi}\frac{1}{\theta}\log\left(\frac{1}{\theta^2}\right)$$

が成り立つことを示せ。(11.30) のかわりに (11.41) を使えば正確な結果が得られる。

クォークあるいは他のパートンの破砕化で生成されるハドロンは，$\boldsymbol{p}_q$ のまわりに円錐を作るという事実にくり返し注目してきた。破砕ハドロンの $\langle k_T \rangle$ が約 300 MeV というのは実験事実である。ただし T は $\boldsymbol{p}_q$ に対する横方向である。高エネルギーになるに従い，破砕ハドロンの作る円錐は狭くなる。つまり

$$\langle\theta\rangle \simeq \frac{\langle k_T \rangle}{p_q} \simeq \frac{0.3\ \text{GeV}}{Q/2} \tag{11.43}$$

と考えると，ジェットは Q が増大するにつれて，高エネルギー粒子の細い束になってしまうと思うかもしれないが，実はそうはならないのである。グルーオ

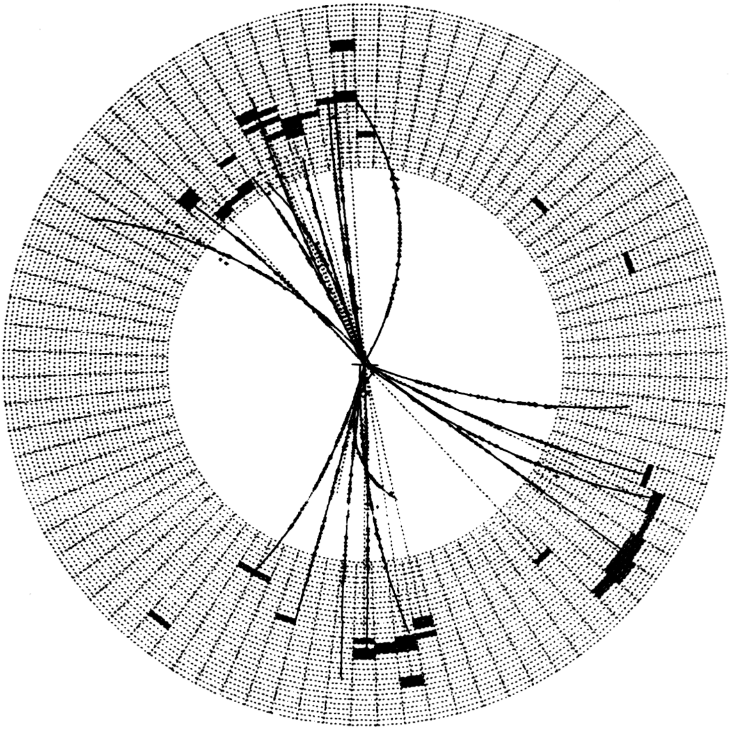


図 11·12　PETRA の JADE 測定器で観測された 3 ジェットイベント

ン放出の結果，元々のクォークまたは反クォークジェットから生成されたハドロンの $\langle k_T \rangle$ が増大する。非常に高エネルギーの 2 ジェットイベントの場合には，観測されるジェットの 1 つは，q または $\bar{\text{q}}$ によるグルーオン放出の結果，実際は qg あるいは $\bar{\text{q}}$g 状態の破砕生成物と考えるのが自然だろう。実験家はこういうジェットを“比較的平たい (flatter)”ジェット，つまり $\langle k_T \rangle$ が増大したジェットとみなしている。この θ のダイナミカルな広がりは，(11.43) で与えられる運動学的な理由で，ジェットが鋭くなる傾向をほとんど打ち消してしまう。その結果，Q^2 の増大とともにジェットが鋭くなっていく様子は対数的になり線形ではない。すなわち

$$\langle \theta \rangle \sim \frac{1}{\log Q^2} \tag{11.44}$$

で与えられる。この結果を導くには注意しなければならない。ここではその概

略を説明する。定義により

$$\langle k_T \rangle \sim \int_0^Q k_T \frac{d\sigma}{dk_T} \tag{11.45}$$

である。広がったジェットの中のハドロンの k_T は，まさに q または q̄，および放出されたグルーオンの相対的な k_T を反映しているのだと仮定しよう。すると (11.45) に現れた $d\sigma/dk_T$ は，おなじみのグルーオン放出の横運動量分布

$$\frac{d\sigma}{dk_T} \sim \frac{\alpha_s}{k_T}$$

にほかならない。ここでは対数的変化はすべて無視するから，α_s は定数と考える。この近似では $d\sigma/dk_T$ は (11.42) と同じである。(11.45) に代入すれば

$$\langle k_T \rangle \sim \alpha_s \int_0^Q dk_T \sim \alpha_s Q$$

を得る。また (11.43) から $\langle\theta\rangle \sim \alpha_s$ がわかる。α_s の変動 $\alpha_s \sim 1/\log Q^2$ と組み合わせると，ジェットが対数的に鋭くなっていくという (11.44) の結果が得られる。この結果をきちんと証明することは難しい（Dokshitzer et al (1980) 参照)。しかしその現象論的内容は明らかである。すなわち，低エネルギーでは e^+e^- → ハドロンのイベントをうまく統計的に解析してようやく可能となったジェットの同定が，高エネルギー実験では (11.44) で予期される集中度の増大のためもっと簡単にできるはずである。

11.7 e^+e^- → ハドロンに対する QCD の補正

$\sigma(e^+e^- \to \bar{q}q)$ から導いたパートン模型の結果である

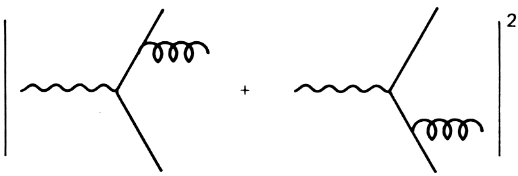
$$R \equiv \frac{\sigma(e^+e^- \to \text{ハドロン})}{\sigma(e^+e^- \to \mu^+\mu^-)} = 3\sum_q e_q{}^2 \tag{11.46}$$

は，q または q̄ からのグルーオン放出の可能性を考慮すると修正される。α_s の次数の Feynman 図は図 11·10 に示してあり，断面積 $d\sigma/dx_q dx_{\bar{q}}$ は (11.41) で与えられる。R に対する α_s の次数の補正を計算するには，$x_q, x_{\bar{q}}$ ともに 0 から 1 まで積分しなければならない。これを実行するとき，摂動論的 QCD に共通の問題にぶつかる。被積分関数 (11.41) は x_q あるいは $x_{\bar{q}}$ が 1 に近づくと発散する。この発散の問題の由来をつきとめるために，たとえば分母の $1-x_q$ という因子を考えよう。(11.33) を用いて次頁のように書きかえる：

$$1-x_q=\frac{s}{Q^2}=\frac{2p_{\bar{q}}\cdot p_g}{Q^2}$$
$$=(2/Q^2)E_{\bar{q}}E_g(1-\cos\theta_{\bar{q}g}). \qquad (11.47)$$

したがって $1-x_q$ はグルーオンがソフトになるか，あるいは $\bar{q}$ と g が同方向になるか ($\cos\theta_{\bar{q}g}\to 1$) の，いずれかの場合に 0 になる。第一の場合の発散を赤外発散 (第 7 章参照)，第二の場合の発散をコリニアー発散という (または質量特異性ともいう。それは，もしクォークかグルーオンのどちらかが質量を持っていれば，$\cos\theta_{\bar{q}g}=1$ は運動学的に不可能になるからである)。レプトンが質量を持っている QED ではこのような特異性は生じない。

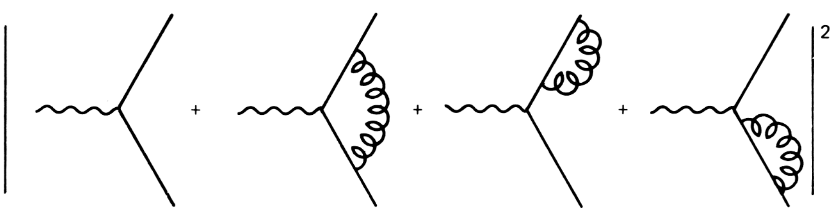
先に進むためには，これら赤外特異性と質量特異性を正則化しなければならない。その 1 つの方法はグルーオンに仮想的な質量 m_g を与えて，(11.41) を導いた図 11·10 の Feynman 図の計算をくり返すことである。正直に長い計算をしてやると

$\sigma_{実} =$ 

$$=\int dx_q dx_{\bar{q}}\frac{d\sigma}{dx_q dx_{\bar{q}}}$$
$$=\sigma_q\frac{\alpha_s}{2\pi}\frac{4}{3}\left\{\log^2\left(\frac{m_g}{Q}\right)+3\log\left(\frac{m_g}{Q}\right)-\frac{\pi^2}{3}+5\right\} \qquad (11.48)$$

となる。ここで σ_q は $\sigma(e^+e^-\to\bar{q}q)$ を表す。予想通り (11.48) は $m_g\to 0$ で発散する。

(11.48) は仮想的に与えた質量 m_g に依存しているが，正しい結果ではそんなことがあってはならないから，これは最終的な答えではないことは明らかだろう。しかし，他にも $O(\alpha_s)$ の寄与がある。加わるべき $O(\alpha_s)$ の項は



の中に現れ，$\gamma^* \to q\bar{q}$ の図との干渉項に対応し，仮想グルーオンの閉線を含む 3 つの項の和である (10.8 節参照)。この干渉項は次のような寄与をする：

$$\sigma_{\text{仮想}} = \sigma_q \frac{\alpha_s}{2\pi}\frac{4}{3}\left\{-\log^2\left(\frac{m_g}{Q}\right) - 3\log\left(\frac{m_g}{Q}\right) + \frac{\pi^2}{3} - \frac{7}{2}\right\}. \tag{11.49}$$

$O(\alpha_s)$ の全部の寄与は

$$\sigma = \sigma_{\text{実}} + \sigma_{\text{仮想}} = \sigma_q(\alpha_s/\pi) \tag{11.50}$$

となる。これは有限であり，かつ当然のことながら m_g に依存していない。

実グルーオン放出と仮想グルーオン放出の寄与の間での発散の相殺は，単にここで考えた特別の過程の性質というわけではない。ほかにいくらでも例がある。たとえば 10.8 節ですでに，深非弾性散乱における類似の相殺を議論した。この特別な発散の相殺は，Kinoshita(木下)-Lee(李)-Nauenberg の一般定理の一例である。本章でこれまでこの発散の相殺の機構が出てこなかったのは， 0 でないある決まった p_T を持つグルーオン生成の断面積を計算していたからである。その場合は x_q と $x_{\bar{q}}$ は 1 をとることができないので，(11.41) の分母は 0 になることはない。また $p_T=0$ の仮想グルーオンを含む Feynman 図を除く結果にもなっている。

(11.46) の R に $O(\alpha_s)$ の補正を加えると

$$\boxed{R = 3\sum_q e_q{}^2\left[1 + \frac{\alpha_s(Q^2)}{\pi}\right]} \tag{11.51}$$

となる。$\alpha_s \sim 0.2$ に相当する代表的な Q^2 の値に対してはこの補正は小さいので，現在の実験の誤差の範囲では補正なしの場合と区別するのは難しい。しかし，α_s が Q^2 の関数であるから ((7.65) 参照)，R の値が正確に定数ではないという点は注意しておかなければならない。これは，スケールするパートン模型の結果が，グルーオン放出のために生ずる $\log Q^2$ 的補正によって変更されるというもう 1 つの例になっている。

11.8 摂動論的 QCD

深非弾性散乱 ($ep \to hX$) でも e^+e^- 消滅 ($e^+e^- \to h$) でも予期しなかったような，大横運動量のハドロン生成の起源は共通しているということがわかった。これは一方の過程に対するパートンの Feynman 図が交叉すれば，他の過程のそれになっているという例の 1 つである。こうしてその基礎にある QCD 過程が，まったく違う実験状況で検証されることになる。その二，三の例が図 11・13

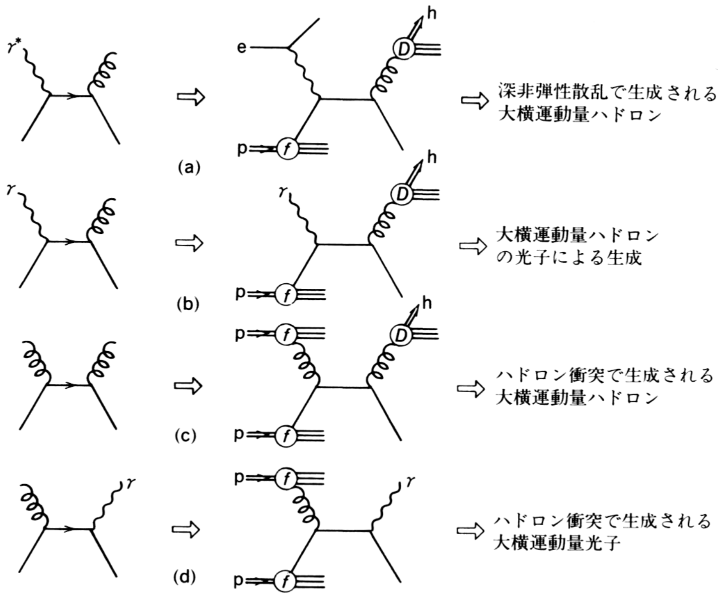


図 11·13 パートン過程として γ(またはグルーオン)・クォーク Compton 散乱，あるいはその交叉過程を含む各種実験で観測される過程。f および D はそれぞれ構造関数および破砕関数を表す。

である。図に現れる要素は q, $\bar{\mathrm{q}}$, g, γ, γ^*，レプトン対 (e^-e^+, $\mu^-\mu^+$)，親ハドロン内にパートンを見出す確率を表す構造関数 $f(x)$，パートンから生成されて出てくる終状態ハドロンを表す破砕関数 $D(z)$ である。図 11·13 は，これらの要素を組み合わせて作ることができる図を例示したものにほかならない。

QCD の検証に役立つためには，その過程が短距離相互作用であること，したがって，摂動論が使えるくらい $\alpha_s(Q^2)$ が十分小さいということが重要である。図 11·13 の諸過程はこの条件を満たしている。第 9 章のパートン模型 (QCD に対する最低次近似) の適用条件も思い起こさなければならないだろう。パートン模型の計算に使ったインパルス近似が正しいといえるためには，エネルギーおよび運動量移行が大きいことが必要だ。不確定性原理によって，エネルギーが大きければパートン相互作用の時間スケールは短いことが保証される。したがって，“傍観者(スペクテーター)” パートン (QCD 過程に直接関与しないパートン) との相互作用は無視することができる。大運動量 (Q^2, $p_T{}^2$, 重いクォーク質量など) は，

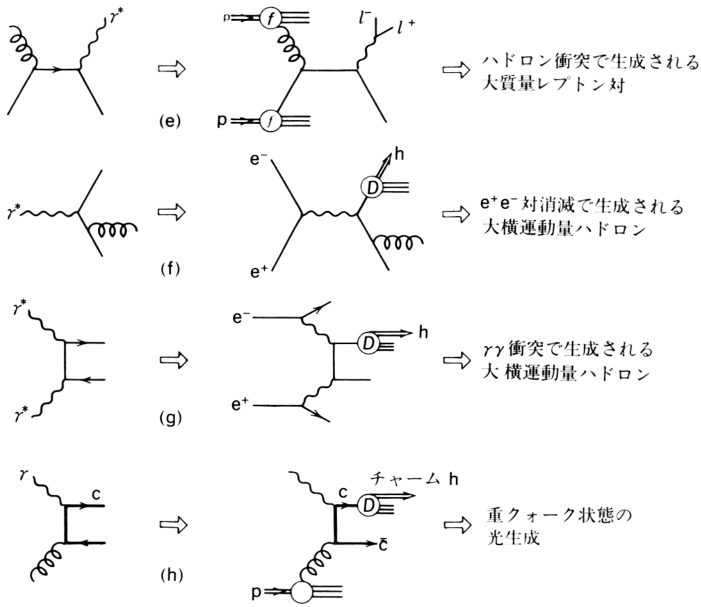


図 11·13　（つづき）

この過程が近距離相互作用，つまり α_s が小さいということを保証する。

一例として図 11·13 の過程 (d) と (e) を考えよう。始状態の陽子が非常に高いエネルギーで衝突したときでも，やはりこの過程における運動量移行は，摂動論的 QCD が使えるためには大きくなければならない。過程 (d) では光子が大横運動量で生成されるべきだ，とすればそれは保証される。過程 (e) では光子に大きな Q^2 を与え，終状態で大きな不変質量を持ったレプトン対を検出すればよい。

図 11·13 は各過程に対して，パートン（クォーク）1 個だけが関与する Feynman 図を示したものである。実験と比較できる結果を得るためには，別の Feynman 図も計算しなければならない。たとえば過程 (c) では，グルーオン交換によるクォーク・クォーク散乱を考えることができる。この場合，ビーム内のクォークが標的内のクォークを大角度に散乱させて，終状態に大横運動量を持った 2 つのクォークジェットを生成することになる（問題 11.7 参照）。

摂動論的 QCD の応用は多い。総合報告には次のようなものがある：

Field(1979), Ellis and Sachrajda(1979), Reya(1981), Altarelli(1982), Collins

and Martin(1982), Pennington(1983).

すべての場合に理論がうまく実験と比較できるという現象論的証拠はあるが，残念ながら主としてカラー閉じ込めのために，QED におけるレプトンの磁気能率の計算に匹敵する精度の QCD の検証はまだできていない。

問題 11.7 図 11·13 (c) に同じ α_s の次数で寄与するパートン過程をすべて挙げよ。とくに pp 反応と p$\bar{\text{p}}$ 反応を比較して，寄与する各過程の相対的な強さについて論ぜよ。

11.9 最後の例：Drell-Yan 過程

図 11·13(e) は，ハドロンによるレプトン対生成の断面積に $O(\alpha^2\alpha_s)$ の寄与をする。しかし，これは Drell-Yan 過程として知られている図 11·14 の低次過程 $\bar{q}q \to \gamma^* \to l^+l^-$ に対する補正である。Drell-Yan 過程は e^+e^- 消滅および深非弾性レプトン生成とともに，構造関数の決定やパートン模型，およびその QCD 補正の検証に重要な役割を演じてきた。

図 11·14 に対応する断面積を計算するには，その下のレベルのパートン過程の断面積

$$\hat{\sigma}(\bar{q}q \to l^+l^-) = \frac{4\pi\alpha^2}{3Q^2}e_q{}^2 \tag{11.52}$$

から出発する ((11.3) 参照)。(11.52) をハドロン過程の中に埋め込むため，これをまず，不変質量 $\sqrt{Q^2}$ のレプトン対生成の微分断面積に書きかえる。ただし，Q^2 は

$$Q^2 = \hat{s} = (p_q + p_{\bar{q}})^2 \tag{11.53}$$

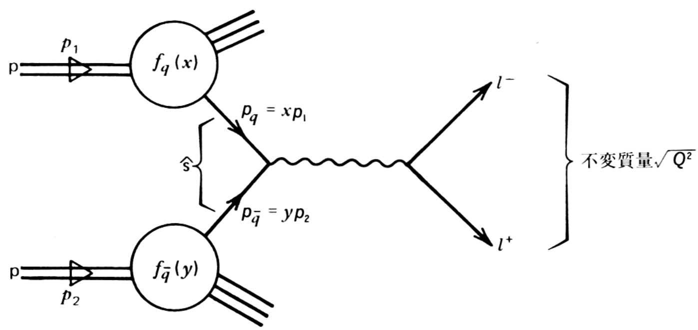


図 11·14 Drell-Yan 過程：pp → l^-l^+X

で定義されている。すなわち

$$\frac{d\hat{\sigma}}{dQ^2}=\frac{4\pi\alpha^2}{3Q^2}e_q{}^2\delta(Q^2-\hat{s}) \tag{11.54}$$

と書くことができる。ハドロンによる断面積は深非弾性散乱（第 9 章）でよく知っているように，構造関数 $f_i(x)$ を用いて表される。すなわち

$$\frac{d\sigma(\mathrm{pp}\to l\bar{l}\mathrm{X})}{dQ^2}=\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{3}\right)3\sum_q\int dx\int dy\, f_q(x)f_{\bar{q}}(y)\frac{d\hat{\sigma}}{dQ^2} \tag{11.55}$$

となる。和はクォークのフレーバーについて加える。前の因子 1/3 はそれぞれ始状態の q および $\bar{q}$ のカラーについての平均，3 は消滅して無色の仮想光子になる $\bar{q}q$ のカラーの組み合わせについて加えることを意味する。q と $\bar{q}$ はそれぞれ，陽子に対して運動量比 x および y を持つから，(11.53) は次のように書ける：

$$\hat{s}=(xp_1+yp_2)^2\simeq xys. \tag{11.56}$$

ここで $s\simeq 2p_1\cdot p_2$ は，衝突陽子の重心系のエネルギーの 2 乗である。(11.54)－(11.56) から

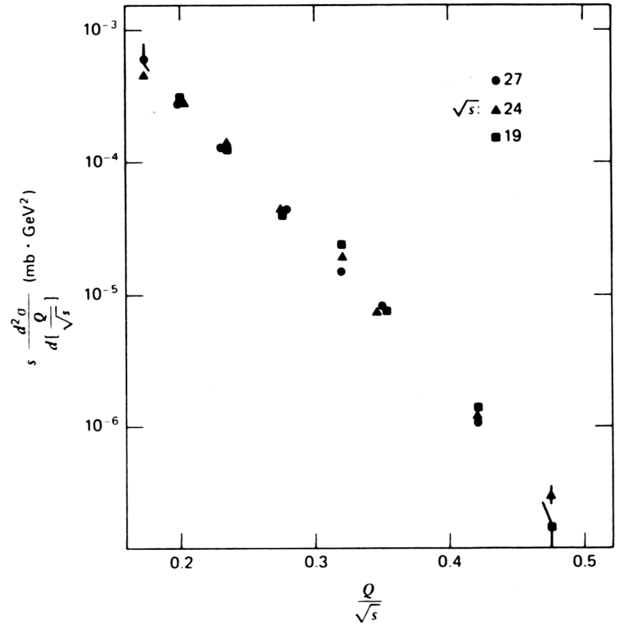


図 11·15　Drell-Yan 過程のスケーリング。ここに示されたスケーリングのテストは (19.58) と同等である。$\sqrt{s}$ は GeV 単位。実験データは Fermi 研究所による。

$$\boxed{\frac{d\sigma(\mathrm{pp}\to l\bar{l}\ \mathrm{X})}{dQ^2}=\frac{4\pi\alpha^2}{9Q^4}\sum_{\mathrm{q}}e_{\mathrm{q}}{}^2\int dx\int dy\, f_{\mathrm{q}}(x)f_{\bar{\mathrm{q}}}(y)\delta\left(1-xy\frac{s}{Q^2}\right)} \quad (11.57)$$

を得る。

グルーオン放出がない最低次では，スケールする結果が期待できるだろう。それが (11.57) の中に隠されている。断面積は衝突エネルギー $\sqrt{s}$ とレプトン対の質量 $\sqrt{Q^2}$ の両方の関数であるが，

$$Q^4\frac{d\sigma}{dQ^2}=\mathcal{F}\left(\frac{s}{Q^2}\right)$$

という量は比 s/Q^2 だけの関数である。図 11·15 に示すように，実験データはこのスケーリング則をかなりよく満たしている。

問題 11.8 (11.57) に現れた和を，第 9 章で導入した価クォークと海クォークの構造関数を用いて表せ。同様のことを，$\bar{\mathrm{p}}\mathrm{p}$ および $\pi^{\pm}\mathrm{p}$ によるレプトン対生成の場合について実行せよ。

問題 11.9 炭素標的 (アイソスカラー) による実験データは，比

$$\frac{\sigma(\pi^+\mathrm{C}\to\mu^-\mu^+\mathrm{X})}{\sigma(\pi^-\mathrm{C}\to\mu^-\mu^+\mathrm{X})}$$

が，Q^2/s の値が小さいときは近似的に 1 に等しいが，Q^2/s が 1 に近づくと 1/4 に減少することを示している。なぜこれが Drell-Yan の予言と一致するかを説明せよ。$xy=Q^2/s$ であることに注意せよ。

問題 11.10 グルーオンが関与する Feynman 図を考慮すると，(11.58) に対数的なスケーリングの破れが入ってくる。レプトン対生成の断面積に $O(\alpha^2\alpha_s)$ で寄与する Feynman 図を書け。図 11·13 (e) の Feynman 図に対応する断面積を計算せよ。

12

弱い相互作用

パイオンやミューオンの寿命の実験値は，カラー（強い相互作用）や電磁相互作用を通して崩壊する粒子の寿命よりずっと長い。すなわち，実験的に

$$\begin{aligned} \pi^- \to \mu^- \bar{\nu}_\mu: \quad & \tau = 2.6 \times 10^{-8}\text{sec} \\ \mu^- \to e^- \bar{\nu}_e \nu_\mu: \quad & \tau = 2.2 \times 10^{-6}\text{sec} \end{aligned} \tag{12.1}$$

が知られている。一方，カラー相互作用によって崩壊する粒子の寿命は 10^{-23}sec，電磁相互作用による崩壊の場合は 10^{-16}sec（例えば $\pi^0 \to \gamma\gamma$）の程度である。寿命は，これらの相互作用の結合定数の逆数の 2 乗に比例しているから，π^0 の寿命が長いということは，$\alpha \ll \alpha_s$ を反映している。パイオンやミューオン崩壊は，電磁相互作用よりもっと弱い結合定数を持った別種の相互作用が存在する証拠である。

ハドロンやレプトンは，すべて弱い相互作用をする。したがって，それらは弱崩壊しうるのだが，カラーや電磁相互作用によるずっと速い崩壊のために，隠されてしまうことが多い。しかし，$\pi^\pm$ と μ は特別で，強い相互作用と電磁相互作用では崩壊できない。π は一番軽いハドロンである。中性の π^0 は 2 個の光子に崩壊できるにもかかわらず，荷電 $\pi^\pm$ はそれができない。その結果，(12.1) の弱崩壊が主になるのである。なぜ μ 崩壊は，ほとんど (12.1) によって起きるのかという問題は興味深い。原理的には，μ は電磁崩壊 $\mu \to e\gamma$ も可能であろう。$\mu \to e\gamma$ という崩壊様式が観測されていないこと，また特別な崩壊様式 (12.1) が実現しているということは，加算的に保存するレプトン数が存在する証拠である。すなわち，電子数 (L_e) とミューオン数 (L_μ) である。例えば，電子数を次頁のように決める：

$$L_e=+1：\quad e^- \text{ と } \nu_e$$
$$L_e=-1：\quad e^+ \text{ と } \bar{\nu}_e \qquad (12.2)$$
$$L_e=0：\quad \text{他の粒子全部}$$

L_μ と L_τ に対しても同じように決める。明らかに $\mu^- \to e^-\bar{\nu}_e\nu_\mu$ は始状態，終状態ともに $L_\mu=1$ および $L_e=0$ である。したがって，この崩壊は，今述べた量子数保存とつじつまが合うが，$\mu^- \to e^-\gamma$ はそうはいかない。事実，わかっている反応では，これら 3 つのレプトン数は別々に保存している (これ以上の議論に関しては 12.12 節参照)。

問題 12.1 π^+ および μ^+ の崩壊過程を示せ。τ^- レプトンの可能な崩壊様式を挙げよ (τ は e, μ, τ の順に発見された第 3 番目のレプトンで，質量は $m_\tau=1.8$ GeV)。

(12.1) の 2 つの弱い崩壊過程の例はニュートリノを含んでいる。ニュートリノは弱い相互作用しかしないという点でユニークである。カラーを持たず，電気的には中性で，実験誤差内で質量も 0 である。ニュートリノは弱崩壊で出てきた粒子の中に見出されることが多いが，必ずその中にあるとは限らない。たとえば，K^+ は次のような弱崩壊をする：

$$\left.\begin{array}{l} K^+ \longrightarrow \mu^+\nu_\mu,\ e^+\nu_e \\ K^+ \longrightarrow \pi^0\mu^+\nu_\mu,\ \pi^0e^+\nu_e \end{array}\right\} \quad \text{セミレプトン崩壊}$$
$$K^+ \longrightarrow \pi^+\pi^0,\ \pi^+\pi^+\pi^-,\ \pi^+\pi^0\pi^0 \quad \text{非レプトン崩壊} \qquad (12.3)$$

ここで右側に示したのが普通の呼び方である。

原子核の β 崩壊を引き起こすのも弱い相互作用である。これは陽子を中性子に (あるいはその逆に) 変える反応である。レプトン対 $e^+\nu_e$ の放出を含む反応には次のようなものがある：

$$^{10}C \longrightarrow {}^{10}B^* + e^+ + \nu_e,$$
$$^{14}O \longrightarrow {}^{14}N^* + e^+ + \nu_e. \qquad (12.4)$$

この場合は，核内の陽子の 1 つが

$$p \longrightarrow ne^+\nu_e \qquad (12.5)$$

によって中性子に変わる。自由陽子の場合は，これはエネルギー的に不可能である (粒子の質量を確かめよ)。しかし，交叉チャネルの反応は許されて，β 崩壊

$$n \longrightarrow pe^-\bar{\nu}_e \qquad (12.6)$$

が起こり，これが中性子の不安定 (平均寿命 920 sec) な理由である。弱い相互作用がなければ，中性子は陽子と同じく安定で，10^{30} 年以上の寿命を持つことになるだろう。

12.1　パリティの破れと V-A 型弱カレント

Fermi の β 崩壊の理論 (1932) は，電磁相互作用の構造からヒントを得たものである。電磁相互作用による電子・陽子散乱 (図 12・1) の不変振幅は

$$\mathcal{M}=(e\bar{u}_{\rm p}\gamma^{\mu}u_{\rm p})(-1/q^2)(-e\bar{u}_{\rm e}\gamma_{\mu}u_{\rm e}) \tag{12.7}$$

であった ((6.8) 参照)。ただし，陽子は構造を持たない Dirac 粒子と考える。$\mathcal{M}$ は電子と陽子の電磁カレントと，電子・陽子間に交換される光子の伝播関数の積である (6.2 節参照)。弱い相互作用との比較の便宜上，たとえば電子の電磁カレントを次のように定義する：

$$ej_{\mu}{}^{em}\equiv j_{\mu}{}^{fi}(0)=-e\bar{u}_f\gamma_{\mu}u_i.$$

ここで $j_{\mu}{}^{fi}(x)$ は (6.6) で与えられている。したがって不変振幅 (12.7) は

$$\mathcal{M}=-\frac{e^2}{q^2}(j_{\mu}{}^{em})_{\rm p}(j^{em\mu})_{\rm e}$$

と書くことができる。図 12・2 は β 崩壊過程とその交叉過程

$$\mathrm{pe}^-\longrightarrow \mathrm{n}\nu_{\rm e}$$

を表している。カレント・カレント型の (12.7) との類推によって，Fermi は β 崩壊の不変振幅として

$$\mathcal{M}=G(\bar{u}_{\rm n}\gamma^{\mu}u_{\rm p})(\bar{u}_{\nu_{\rm e}}\gamma_{\mu}u_{\rm e}) \tag{12.8}$$

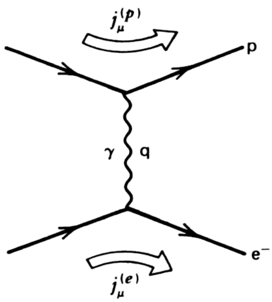


図 12・1　電子・陽子 (電磁相互作用) 散乱

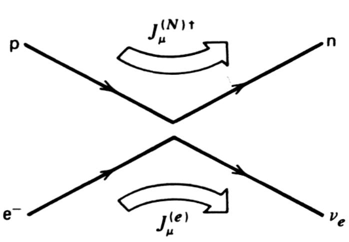


図 12・2　弱カレントを示す β 崩壊 $\mathrm{p}\rightarrow \mathrm{ne}^+\nu_{\rm e}$

を提案した。G は弱い相互作用の結合定数で，Fermi 定数と呼ばれる。これは実験と比較して決定されるべきものである。弱カレントが電荷を上げたり下げたりする構造を持っていることに注意しよう。これを“荷電弱カレント”という (電磁カレントのように電気的に中性の弱カレントの存在は，ずっと後の 1973 年まで知られなかった。これに関しては 12.9 節参照)。(12.8) には伝播関数がない点も注意しておく。12.2 節でこの点にもどることにしよう。

弱い相互作用の振幅 $\mathscr{M}$ がベクトル・ベクトル型だという Fermi の霊感ともいうべき推測は，(5.52) の双 1 次共変量を使って一般的に作ることができるいろいろな Lorentz 不変振幅の中から，非常に特別なものを選んだことになる。ベクトル型の振幅だけを使うという自明な理由がはじめからあるわけではない。(12.8) の振幅は β 崩壊の特徴的性質のいくつかを説明することができたが，これでは説明できないところもあった。その後およそ 25 年間，弱い相互作用の真実を解明しようという試みが，一連のさまざまな巧妙な β 崩壊の実験となって現れたが，1956 年のパリティ非保存の発見においてクライマックスに達した。驚くべきことに，Fermi が最初に提案した理論の中で唯一の本質的な変更は，γ^μ を $\gamma^\mu(1-\gamma^5)$ と置き換えることだけであった。Fermi はパリティ非保存など予想もしていなかったから，$\gamma^\mu\gamma^5$ を加える理由もなかったわけである。γ^μ と $\gamma^\mu\gamma^5$ の干渉が自動的にパリティの保存を破る ((5.67) 参照)。

1956 年，Lee と Yang は弱い相互作用の実験データのすべてを批判的に検討した。当時特別の関心がはらわれていたのは，実験で観測されているケイオン (K メソン) の非レプトン崩壊 $K^+ \to 2\pi$ と $K^+ \to 3\pi$ であった。この場合，2 つの終状態のパリティが逆である (実際，人々は 2 つの終状態を説明するには，2 つの違った粒子が必要だと信じていた)。Lee と Yang は，弱い相互作用ではパリティは保存しない，と確信をもって主張した。彼らの主張を検証すべく，いくつかの実験がすぐ続いて行われた。これら歴史的実験の中で最初のものは，パリティ非保存の効果を示すよい例である。実験は，偏極コバルト原子核の β 遷移を調べたのである：

$$^{60}\text{Co} \longrightarrow {}^{60}\text{N}_i{}^* + e^- + \bar{\nu}_e.$$

試料の Co の核スピンを外部磁場で整列させておいて，放出電子の方向の非対称性を観測したのである。電子が核スピンとは逆向きに放出されやすいように，磁場の向きが逆転すると，この非対称性の符号が変わることがわかった。論拠の本質的な点は図 12·3 に示してある。実験で観測された核スピンと電子の運動量の相関は，必要とされる $J_z=1$ が右巻き反ニュートリノ $\bar{\nu}_R$ と左巻き

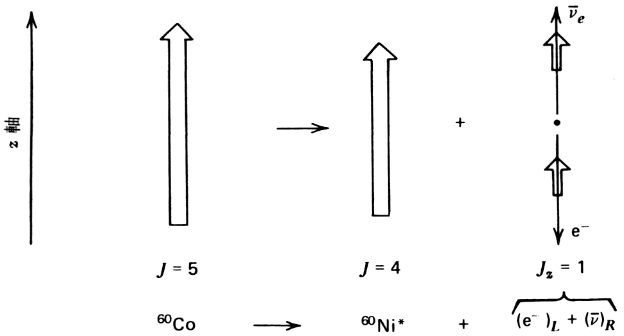


図 12·3　^{60}Co を用いた実験。電子は ^{60}Co 核のスピンと逆方向に出やすい。

電子 e_L とで作られている考えれば説明できる。

多くの実験的証拠が積み重ねられた結果，たしかに弱い相互作用に関わるのは $\bar{\nu}_R$ (および ν_L) だけだということがわかった。"鏡映状態" $\bar{\nu}_L$ および ν_R が存在しないということは，明らかにパリティ不変性の破れにほかならない (5.7 節参照)。また，C は ν_L 状態を $\bar{\nu}_L$ 状態に変換するから，荷電共役 C 不変性も破れている。しかし，$\gamma^\mu(1-\gamma^5)$ の形は，C と P を組み合わせた CP 変換に対して弱い相互作用を不変にしている。たとえば，

$$\Gamma(\pi^+ \to \mu^+\nu_L) \neq \Gamma(\pi^+ \to \mu^+\nu_R), \qquad P\text{ の破れ}$$
$$\Gamma(\pi^+ \to \mu^+\nu_L) \neq \Gamma(\pi^- \to \mu^-\bar{\nu}_L) \qquad C\text{ の破れ}$$

であるが，

$$\Gamma(\pi^+ \to \mu^+\nu_L) = \Gamma(\pi^- \to \mu^-\bar{\nu}_R). \qquad CP\text{ 不変}$$

この例では ν はミューニュートリノを表す。CP 不変性に関しては 12.3 節で議論しよう。

問題 12.2　電荷を下げる弱カレント

$$\bar{u}_e\gamma^\mu\frac{1}{2}(1-\gamma^5)\,u_\nu \tag{12.9}$$

は左巻き電子 (あるいは右巻き陽電子) だけを含むことを示せ。相対論的極限 ($v \approx c$) では電子のヘリシティーは負であることを示せ。

(12.9) の $(1-\gamma^5)/2$ は，自動的に左巻きニュートリノ (あるいは右巻き反ニュートリノ) を選び出す。ちょうど電磁相互作用の γ^μ という構造が，e^+e^- 散乱の角分布の測定によって実証されたように，この弱カレントの V-A (ベクト

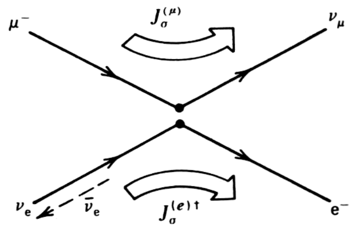


図 12·4　μ^- 崩壊 $\mu^- \to e^-\bar{\nu}_e\nu_\mu$

ル-軸性ベクトル）という構造は，ν_ee 散乱（12.7 節参照）により直接明らかにされたのである。

弱い相互作用による現象はすべて，1 個の普遍結合定数 G を持つ V-A カレント・カレント型相互作用で記述されると期待してよいであろう。たとえば，図 12·2 の β 崩壊と図 12·4 の μ 崩壊は次の振幅で表される：

$$\mathcal{M}(\mathrm{p} \to \mathrm{ne}^+\nu_e) = \frac{G}{\sqrt{2}}[\bar{u}_n\gamma^\mu(1-\gamma^5)u_p][\bar{u}_{\nu_e}\gamma_\mu(1-\gamma^5)u_e], \tag{12.10}$$

$$\mathcal{M}(\mu^- \to e^-\bar{\nu}_e\nu_\mu) = \frac{G}{\sqrt{2}}[\bar{u}_{\nu_\mu}\gamma^\sigma(1-\gamma^5)u_\mu][\bar{u}_e\gamma_\sigma(1-\gamma^5)u_{\nu_e}]. \tag{12.11}$$

$1/\sqrt{2}$ はまったく便宜的な因子で，γ^5 を含まなかった元々の G の定義をそのままにしておくためである。あとは QED の Feynman 則との類推で進めばよい。計算に入ってくるのは粒子だけであり，Feynman 図に示されているのも粒子線だけである。反粒子は現れてこない。したがって，μ 崩壊で運動量 k を持って出ていく $\bar{\nu}_e$ は，図 12·4 では運動量 $-k$ で入ってくる ν_e として表してある。前と同様，(12.11) のスピノール $u_{\nu_e}(k)$ の意味である（(5.33) 参照）。(12.10) の出ていく e^+ に対しても同じ注意がいる。

問題 12.3　電荷を上げる弱カレント

$$J^\mu = \bar{u}_\nu\gamma^\mu\frac{1}{2}(1-\gamma^5)u_e \tag{12.12}$$

は，ヘリシティー負の入ってくる電子をヘリシティー負の出ていくニュートリノに結合することを示せ。電子の質量は無視してよい。(e_L^-, ν_L) の組み合わせ以外に，J^μ は $(\bar{\nu}_R, e_R^+)$，$(0, \nu_L e_R^+)$，$(e_L^-\bar{\nu}_R, 0)$ の組み合わせのレプトン対を結合することを示せ。ここに括弧内は（入ってくる粒子，出ていく粒子）を表す。

さらに電荷を下げる弱カレント (12.9) は (12.12) の Hermite 共役

$$J_\mu^\dagger = \bar{u}_e\gamma_\mu\frac{1}{2}(1-\gamma^5)u_\nu$$

であることを示せ。$J_\mu^\dagger$ により結合されるレプトン対の組み合わせをあげよ。

弱い相互作用の振幅は

$$\boxed{\mathcal{M}=\frac{4G}{\sqrt{2}}J^{\mu}J_{\mu}{}^{\dagger}} \qquad (12.13)$$

という形をしている。電荷保存から $\mathcal{M}$ は，電荷を上げるカレントと電荷を下げるカレントの積であることが要求される (たとえば (12.10) および (12.11) を参照)。因子 4 は (12.13) のカレントが昔流の $1-\gamma^5$ ではなくて，規格化された射影演算子 $(1-\gamma^5)/2$ を用いて定義されているからである。

12.2　結合定数 G の解釈

G の数値を得るためには，原子核の β 崩壊と μ 崩壊の実験値を使うことができる。(12.10) および (12.11) の弱結合定数 G の強さの普遍性を検証することも重要なことである。弱い相互作用で起こる反応ごとに，新しい相互作用を導入するなどということはしたくないのだ！　しかしそのために，G をカラー相互作用や電磁相互作用の結合定数と直接比較できる形に表しておかなければならない。

電磁相互作用の振幅 (12.7) と弱い相互作用の振幅 (12.10) を比較すると，Fermi の模型では，2 つの相互作用の類推はまだ十分展開されつくされていないことがわかる。G が本質的には e^2/q^2 のかわりをしているのだ。したがって，G は無次元の e とは異なり GeV^{-2} の次元を持っている。弱い相互作用は荷電ベクトルボソンすなわち弱ボソン $\mathrm{W}^{\pm}$ の放出・吸収によって生じるのだ，と要請することによって電磁相互作用との類似を進め，さらにそれを拡張したくなる。弱ボソンは電磁力の場合の光子，カラー力の場合のグルーオンに類似している。たとえば，μ^- 崩壊は W^- ボソンによって媒介されて (図 12·5)，その振幅は次頁のような形になる ((12.7) 参照)：

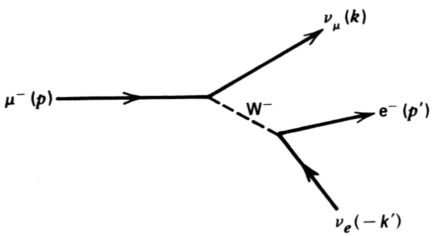


図 12·5　μ^- 崩壊

$$\mathcal{M}=\left(\frac{g}{\sqrt{2}}\bar{u}_{\nu_\mu}\gamma^\sigma\frac{1}{2}(1-\gamma^5)u_\mu\right)\frac{1}{M_W{}^2-q^2}\left(\frac{g}{\sqrt{2}}\bar{u}_e\gamma_\sigma\frac{1}{2}(1-\gamma^5)u_{\nu_e}\right). \tag{12.14}$$

ここで $g/\sqrt{2}$ は無次元の弱結合定数であり，q は弱ボソンが運ぶ運動量である ($1/\sqrt{2}$ と $1/2$ の因子が入っているのは，普通の g の定義を採用したためである)。光子と違い弱ボソンは質量を持っている。さもなければ弱崩壊で直接作られているだろう。実は，その質量は $M_W \sim 80$ GeV であることがわかる (第 15 章参照)。

(12.14) ではボソン伝播関数のスピン和のことは気にしなかった ((6.87) 参照)。しかし，さしあたり $q^2 \ll M_W{}^2$ (β 崩壊や μ 崩壊) の場合に興味があるが，その場合，(12.14) は (12.11) に帰着する。このとき

$$\frac{G}{\sqrt{2}}=\frac{g^2}{8M_W{}^2} \tag{12.15}$$

が成り立ち，弱カレントは本質的に 1 点で相互作用することになる。すなわち，(12.15) の極限ではカレント間の伝播関数は消えてしまう。(12.15) の関係式は，弱い相互作用が弱いのは $g \ll e$ だからではなく，$M_W{}^2$ が大きいからだということを示唆している。もし実際に $g \approx e$ であれば，$O(M_W)$，またはそれ以上のエネルギーでは弱い相互作用は電磁相互作用と同程度の強さになるだろう。

$g \approx e$ は弱い相互作用と電磁相互作用の統一と考えてよいだろう。まさにそれは，電磁気学の Maxwell の理論で電気力と磁気力が統一されたことに匹敵する。すなわち，

$$\boldsymbol{F}=e\boldsymbol{E}+e_M\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}$$

において，$e_M=e$ が成り立つということである。速度が小さい場合は，磁気力は非常に弱いが，高速粒子に対しては電気力，磁気力が同程度の強さで働く。光速 c が両者の相対的強さを決める目安を与える。電弱力との類似でいえば，M_W が目安となるエネルギーである。電磁気力と弱い力の統一が第 13 章と第 15 章の主題になる。

12.3　原子核の β 崩壊

G の値を評価するために

$$^{14}\mathrm{O} \longrightarrow {}^{14}\mathrm{N}^* + e^+ + \nu_e$$

の遷移率の実験値を使うことにしよう。6.2 節でやった QED の計算との類推で，上の反応の遷移振幅を次頁のように書くことができる ((12.10) 参照)：

$$T_{fi}=-i\frac{4G}{\sqrt{2}}\int J_\mu{}^{(N)\dagger}(x)J^{(e)\mu}(x)\,d^4x$$
$$=-i\frac{4G}{\sqrt{2}}\int\left[\bar{\psi}_{\rm n}(x)\gamma_\mu\frac{1}{2}(1-\gamma^5)\psi_{\rm p}(x)\right]\times \qquad (12.17)$$
$$\left[\bar{\psi}_\nu(x)\gamma^\mu\frac{1}{2}(1-\gamma^5)\psi_{\rm e}(x)\right]d^4x.$$

この問題を扱うには，ここで x に関する積分を実行しない方が簡単にいく。普通は x 積分を実行した結果，"エネルギー・運動量保存" の δ 関数の $(2\pi)^4$ 倍が得られることを思い出して (6.2 節参照)，次のように定義する：

$$T_{fi}=-i(2\pi)^4\delta^{(4)}(p_{\rm p}-p_{\rm n}-p_{\rm e}-p_\nu)\mathcal{M}.$$

そうすれば，(12.16) は (12.13) の形に帰着する。(12.16) を書き下す場合，^{14}O の中で崩壊にあずからない核子は，崩壊核子に対して単に傍観者(スペクテーター)にすぎない。しかし，β 崩壊にあずかる粒子が核内に束縛されているという事実を頭から無視するわけにはいかない。さらに，核子自身は複合体であって，構造を持たない Dirac 粒子ではないから，(12.17) の理想化された弱核子カレントの形を信ずる理由もないだろう。このようにいろいろ問題はあるにせよ，G の値を精密に評価することはきわめて容易である。それにはいくつか理由がある。まず，低エネルギーの弱い相互作用は本質的に 1 点における相互作用であって，上に述べた長距離力の強い相互作用の影響を無視することができる。弱カレント $(\bar{\psi}_{\rm p}\gamma^\mu\psi_{\rm n})$ とその共役 $(\bar{\psi}_{\rm n}\gamma^\mu\psi_{\rm p})$ は，電磁カレント $(\bar{\psi}_{\rm p}\gamma^\mu\psi_{\rm p})$ と一緒になって保存ベクトルカレントのアイソスピン 3 重項を作ると考えられる。これを保存ベクトルカレント仮説† と呼ぼう。電磁カレントとの密接な関係が，弱カレントのベクトル結合を"保護"して，強い相互作用の補正を受けないようにしている。これは電荷が保護されている事情とまったく同様である。軸性ベクトル部分 $\bar{\psi}_{\rm n}\gamma^\mu\gamma^5\psi_{\rm p}$ は反応に寄与しない。なぜなら，考えている遷移は $J^P=0^+$ の 2 つの原子核の状態間であって，パリティ変化がないからである。さらに，2 つの $J=0$ 原子核間の過程であるから，この遷移によって原子核の波動関数も変化しないと仮定してもよいであろう。

もう 1 つ事情を簡単にしているのは，崩壊の際に解放されるエネルギー (約 2 MeV) が原子核の静止エネルギーに比べて小さいことである。したがって核子に対しては非相対論的スピノールが使えて ((6.11) 参照)，γ^μ は $\mu=0$ 成分だけが寄与する ((6.13) 参照)。こうして

† (訳註) conserved vector current hypothesis の頭文字をとり，CVC 仮説と呼ばれることが多い。

$$T_{fi} \simeq i\frac{G}{\sqrt{2}}[\bar{u}(p_\nu)\gamma^0(1-\gamma^5)v(p_e)]\int\psi_n{}^\dagger(x)\psi_p(x)e^{-i(\boldsymbol{p}_\nu+\boldsymbol{p}_e)\cdot\boldsymbol{x}}d^4x \quad (12.18)$$

が得られる。(12.11) のすぐあとで注意したように，スピノール $v(p_e)$ は運動量 p_e で出ていく陽電子を表す。e^+ と ν とは 1 MeV 程度のエネルギーを持って放出されるから，その de Broglie 波長は約 10^{-11} cm で原子核の大きさ (直径) よりずっと大きい。したがって

$$e^{i(\boldsymbol{p}_\nu+\boldsymbol{p}_e)\cdot\boldsymbol{x}} \simeq 1$$

とおいて (12.18) の積分を実行してもよいだろう。T_{fi} と不変振幅 $\mathcal{M}$ の関係に注意すれば (6.2 節参照)

$$\mathcal{M} = \frac{G}{\sqrt{2}}\{\bar{u}(p_\nu)\gamma^0(1-\gamma^5)v(p_e)\}(2m_N)\left(2\sqrt{\frac{1}{2}}\right) \quad (12.19)$$

が得られる。ここで，$2m_N$ は核子スピノールの規格化に由来し ((6.13) 参照)，$2/\sqrt{2}$ は $^{14}O \rightarrow {}^{14}N^*$ 遷移におけるハドロンのアイソスピン因子である (問題 12.4 参照)。

問題 12.4　(12.19) の因子 $\sqrt{2}$ を確かめよ。$^{14}C, {}^{14}N^*, {}^{14}O$ はアイソスピン 3 重項を作ることに注意せよ。これは nn, np, pp とアイソスピン 0 の芯 ^{12}C を合成したものと考えることができる (図 2·2 参照)。崩壊する陽子を区別することができないことを念頭におけば，確率でなく振幅で加えなければならない。

"p" → "n"$e^+\nu$ の遷移率 $d\Gamma$ は，(4.36) によって $|\mathcal{M}|^2$ を用いて書ける。すなわち

$$d\Gamma = G^2\sum_{\text{spin}}|\bar{u}(p_\nu)\gamma^0(1-\gamma^5)v(p_e)|^2\frac{d^3p_e}{(2\pi)^3 2E_e}\frac{d^3p_\nu}{(2\pi)^3 2E_\nu}2\pi\delta(E_0-E_e-E_\nu). \quad (12.20)$$

ここで E_0 はレプトン対のエネルギーである。規格化因子 $(2m_N)^2$ は，たしかに (4.36) の対応する因子 $2E_p 2E_n$ と打ち消し合っている。スピン和は第 6 章の手法で計算することができる。電子の質量を無視すれば次のようになる：

$$\begin{aligned}\sum_{\text{spin}}|\bar{u}\gamma^0(1-\gamma^5)v|^2 &= \sum(\bar{u}\gamma^0(1-\gamma^5)v)(\bar{v}(1+\gamma^5)\gamma^0 u)\\ &= \mathrm{Tr}(\not{p}_\nu\gamma^0(1-\gamma^5)\not{p}_e(1+\gamma^5)\gamma^0)\\ &= 2\,\mathrm{Tr}(\not{p}_\nu\gamma^0\not{p}_e(1+\gamma^5)\gamma^0)\\ &= 8(E_eE_\nu+\boldsymbol{p}_e\cdot\boldsymbol{p}_\nu)\\ &= 8E_eE_\nu(1+v_e\cos\theta). \end{aligned} \quad (12.21)$$

ここで θ は e^+ と ν の間の角度であり，電子の速度は $v_e \simeq 1$ と近似している。上では 6.4 節のトレース定理を用いた (なお (12.25) および (12.26) 参照)。

(12.21) を (12.20) に代入すれば，遷移率は次のようになる：

$$d\Gamma = \frac{2G^2}{(2\pi)^5}(1+\cos\theta)[(2\pi d\cos\theta p_e{}^2 dp_e)(4\pi E_\nu{}^2 dE_\nu)]\delta(E_0-E_e-E_\nu). \tag{12.22}$$

ここで $d^3p_e d^3p_\nu$ は [ ] の中のように表した。

多くの実験は放出陽電子のエネルギースペクトルに注目している。(12.22) から

$$\frac{d\Gamma}{dp_e} = \frac{4G^2}{(2\pi)^3}p_e{}^2(E_0-E_e)^2\int d\cos\theta(1+\cos\theta)$$
$$= \frac{G^2}{\pi^3}p_e{}^2(E_0-E_e)^2 \tag{12.23}$$

が得られる。こうして，陽電子のスペクトルの実測値から $p_e{}^{-1}(d\Gamma/dp_e)^{1/2}$ を E_e の関数としてプロットすれば，E_0 を終点とする直線になるはずだ。これが Kurie プロットである。これを用いて，ニュートリノ質量が本当に 0 であるか否かを検証することができる。もしニュートリノが質量を持てば，Kurie プロットはとくに E_e が E_0 に近いところで直線からずれる（もちろん実際には，用いた近似，原子核の Coulomb 場からのエネルギーを考慮した正しい E_e の値，実験のエネルギー分解能などを考慮しなければならない）。

ここで関心があるのは，それとは違った性質のものである。つまり，G の値を E_0 の実測値と β 崩壊の寿命の実験値とから決定したい。したがって (12.23) の dp_e 積分を 0 から E_0 まで実行する。相対論的近似 $p_e \simeq E_e$ を用いれば

$$\boxed{\Gamma = \frac{1}{\tau} = \frac{G^2E_0{}^5}{30\pi^3}}$$

を得る。

さて $^{14}O \to {}^{14}N^*e^+\nu$ の場合は，原子核のエネルギー差は 1.81 MeV，半減期の測定値は $\tau\log 2 = 71\,\mathrm{sec}$ である。これらの値を用いて

$$G \simeq 10^{-5}/m_N{}^2 \tag{12.24}$$

となる。G は次元 (質量)$^{-2}$ を持っていたことを思い出そう。今後，この質量を核子質量に選んで G を使う。

問題 12.5 β 遷移 $^{10}C \to {}^{10}Be^*e^+\nu$ の実験データ：半減期 $\tau\log 2 = 20\,\mathrm{sec}$，$E_0 = 2$ MeV から G を計算せよ (^{10}C, $^{10}Bo^*$ はともにアイソスピン 1，$J^P = 0^+$ 状態である)。

問題 12.6 弱い相互作用はベクトルボソン交換によって起こるという描像をとって，$g = e$ として弱ボソンの質量 M_W を求めよ（第 13 章で導入する弱い相互作用の標準模型では $g\sin\theta_W = e$，$\sin^2\theta_W \simeq 1/4$ である)。

12.4　トレース定理

弱い相互作用の諸反応過程を計算するのに役立つ公式と，6.4 節のトレース定理から直接導くことができる結果をいくつかあげておこう：

$$\mathrm{Tr}(\gamma^\mu \not{p}_1 \gamma^\nu \not{p}_2) = 4[p_1{}^\mu p_2{}^\nu + p_1{}^\nu p_2{}^\mu - (p_1 \cdot p_2) g^{\mu\nu}], \tag{12.25}$$

$$\mathrm{Tr}[\gamma^\mu(1-\gamma^5)\not{p}_1\gamma^\nu(1-\gamma^5)\not{p}_2] = 2\,\mathrm{Tr}(\gamma^\mu \not{p}_1 \gamma^\nu \not{p}_2) - 8i\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} p_{1\alpha} p_{2\beta}, \tag{12.26}$$

$$\mathrm{Tr}(\gamma^\mu \not{p}_1 \gamma^\nu \not{p}_2)\mathrm{Tr}(\gamma_\mu \not{p}_3 \gamma_\nu \not{p}_4) = 32\,[(p_1 \cdot p_3)(p_2 \cdot p_4) + (p_1 \cdot p_4)(p_2 \cdot p_3)], \tag{12.27}$$

$$\mathrm{Tr}(\gamma^\mu \not{p}_1 \gamma^\nu \gamma^5 \not{p}_2)\mathrm{Tr}(\gamma_\mu \not{p}_3 \gamma_\nu \gamma^5 \not{p}_4) = 32\,[(p_1 \cdot p_3)(p_2 \cdot p_4) - (p_1 \cdot p_4)(p^{\cdot} \cdot p_3)], \tag{12.28}$$

$$\mathrm{Tr}[\gamma^\mu(1-\gamma^5)\not{p}_1\gamma^\nu(1-\gamma^5)\not{p}_2]\mathrm{Tr}[\gamma_\mu(1-\gamma^5)\not{p}_3\gamma_\nu(1-\gamma_5)\not{p}_4] = 256(p_1 \cdot p_3)(p_2 \cdot p_4). \tag{12.29}$$

問題 12.7　上の結果を確かめよ。

12.5　ミューオン崩壊

ミューオン崩壊

$$\mu^-(p) \longrightarrow e^-(p') + \bar{\nu}_e(k') + \nu_\mu(k) \tag{12.30}$$

は弱崩壊反応の典型である。粒子の 4 元運動量は (12.30) で定義したとおりで，Feynman 図は図 12·5 である。Feynman 則によれば，Feynman 図はすべて粒子線だけで書かれなくてはならない。したがって出ていく $\bar{\nu}_e$ は入ってくる ν_e として表す。ミューオン崩壊の不変振幅は次のとおりである ((12.11) 参照)：

$$\mathcal{M} = \frac{G}{\sqrt{2}}[\bar{u}(k)\gamma^\mu(1-\gamma^5)u(p)][\bar{u}(p')\gamma_\mu(1-\gamma^5)v(k')]. \tag{12.31}$$

ここでスピノールは粒子の運動量で区別してある。出ていく $\bar{\nu}_e$ は $v(k')$ と書けることに注意する。ミューオンの崩壊率は (4.36) を用いて次のように書ける：

$$d\Gamma = \frac{1}{2E}\overline{|\mathcal{M}|^2}\,dQ. \tag{12.32}$$

ここで dQ は Lorentz 不変位相体積で

$$\begin{aligned} dQ &= \frac{d^3p'}{(2\pi)^3 2E'}\frac{d^3k}{(2\pi)^3 2\omega}\frac{d^3k'}{(2\pi)^3 2\omega'}(2\pi)^4\delta^{(4)}(p-p'-k-k') \\ &= \frac{1}{(2\pi)^5}\frac{d^3p'}{2E'}\frac{d^3k'}{2\omega'}\theta(E-E'-\omega')\delta((p-p'-k')^2) \end{aligned} \tag{12.33}$$

である。ここで $p^0 \equiv E$, $k^0 \equiv \omega$ などである。上式で 2 行目に移るとき，d^3k 積分は

$$\int \frac{d^3k}{2\omega} = \int d^4k\theta(\omega)\delta(k^2) \tag{12.34}$$

の関係式によって求めた。

問題 12.8　右辺の $d\omega$ 積分を実行して (12.34) を導け (問題 6.7 参照)。

(12.31) と (12.29) を使えば，スピンについて平均した確率が得られる：

$$\overline{|\mathcal{M}|^2} \equiv \frac{1}{2}\sum_{\text{spin}}|\mathcal{M}|^2 = 64\,G^2(k\cdot p')(k'\cdot p). \tag{12.35}$$

ただし，(12.33) で d^4k 積分を実行したので，$p = p' + k + k'$ が成り立っている。$m_\mu > 200\,m_e$ だから電子質量は無視して差し支えない。

問題 12.9　(12.35) を確かめよ。電子質量は無視してよいが，ミューオン質量は無視してはいけない。

問題 12.10　ミューオン静止系 $p = (m, 0, 0, 0)$ において次の関係を証明せよ：

$$2(k\cdot p')(k'\cdot p) = (p-k')^2(k'\cdot p) = (m^2 - 2m\omega')m\omega'. \tag{12.36}$$

以上の結果をまとめると，崩壊率はミューオン静止系で次のように書ける：

$$\begin{aligned} d\Gamma = {} & \frac{G^2}{2m\pi^5}\frac{d^3p'}{2E'}\frac{d^3k'}{2\omega'}m\omega'(m^2 - 2m\omega') \\ & \times \delta(m^2 - 2mE' - 2m\omega' + 2E'\omega'(1-\cos\theta)). \end{aligned} \tag{12.37}$$

β 崩壊のときと同じように $d^3p'd^3k'$ を

$$4\pi E'^2 dE' 2\pi\omega'^2 d\omega' d\cos\theta$$

と書き換え，

$$\delta(\cdots + 2E'\omega'\cos\theta) = \frac{1}{2E'\omega'}\delta(\cdots - \cos\theta)$$

を用いて，放出される e^- と $\bar{\nu}_e$ の間の角度について積分すれば

$$d\Gamma = \frac{G^2}{2\pi^3}dE'd\omega' m\omega'(m - 2\omega') \tag{12.38}$$

を得る。δ 関数を積分するとき，$-1 \leqq \cos\theta \leqq 1$ の条件からエネルギー E' と ω' には次のような制限がつく：

$$\frac{1}{2}m - E' \leq \omega' \leq \frac{1}{2}m, \tag{12.39}$$

$$0 \leq E' \leq \frac{1}{2}m. \tag{12.40}$$

これらの制限は，3 体崩壊 $\mu \to e\bar{\nu}_e\nu_\mu$ が事実上 2 体崩壊とみなせる制限によって表すとわかりやすい。たとえば，電子のエネルギー E' が 0 になれば，(12.39) により $\omega' = m/2$ となるが，これは 2 つのニュートリノがミューオンの静止エネルギーを等分した当然の結果である。

放出された電子のエネルギースペクトルを得るには，(12.38) を ω' で積分すればよい。すなわち

$$\begin{aligned}\frac{d\Gamma}{dE'} &= \frac{mG^2}{2\pi^3}\int_{\frac{1}{2}m-E'}^{\frac{1}{2}m} d\omega'\,\omega'(m-2\omega') \\ &= \frac{G^2}{12\pi^3}m^2E'^2\left(3-\frac{4E'}{m}\right).\end{aligned} \tag{12.41}$$

この予言は観測された電子スペクトルと非常によく一致する。結局ミューオンの崩壊率は次のように計算することができる：

$$\boxed{\Gamma \equiv \frac{1}{\tau} = \int_0^{\frac{m}{2}} dE'\,\frac{d\Gamma}{dE'} = \frac{G^2m^5}{192\pi^3}.} \tag{12.42}$$

ミューオンの寿命の実験値 $\tau = 2.2\times10^{-6}$ sec を代入すれば，Fermi 結合定数 G が計算できて

$$G \sim 10^{-5}/m_{\mathrm{N}}^2 \tag{12.43}$$

が得られる。

(12.24) と (12.43) で得られた G の値を比較すると，弱結合定数はレプトンと核子の場合で同じである，つまり G は普遍的であるといってよさそうだ。これは原子核の β 崩壊とミューオン崩壊の物理的由来は同じであるということを意味する。事実，すべての補正を考慮すると，G_β と G_μ は数 % の範囲で等しいことがわかる：

$$\begin{aligned}G_\mu &= (1.16632\pm0.00002)\times10^{-5}\,\mathrm{GeV}^{-2}, \\ G_\beta &= (1.136\pm0.003)\times10^{-5}\,\mathrm{GeV}^{-2}.\end{aligned} \tag{12.44}$$

このわずかな違いの理由は重要なので，12.11 節で論じることにしよう ((12.107) 参照)。

問題 12.11　放出された電子のエネルギーが許される最大値をとるとき，μ^- の静止系で粒子のヘリシティーを示す図を書け。この極限で電子の角分布が $1-P\cos\alpha$ になる理由を説明せよ。ここで P はミューオンの偏極ベクトル，α は偏極の方向と放出電子の方向の間の角度である：

$$P \equiv \frac{N_+ - N_-}{N_+ + N_-}.$$

ここで $N_+(N_-)$ はスピン上 (下) 向きミューオンの数である。

問題 12.12　$\tau^- \to e^-\bar{\nu}_e\nu_\tau$ の崩壊率を計算せよ。τ レプトンの質量は 1.8 GeV である。この崩壊様式の分岐比の実験値は約 20 % である。τ レプトンの寿命を計算せよ。この分岐比の値を説明することができるか。

12.6　パイオン崩壊

ところで $\pi^\pm$ 中間子の寿命も理解できるだろうか。とくに崩壊過程

$$\pi^-(q) \longrightarrow \mu^-(p) + \bar{\nu}_\mu(k) \tag{12.45}$$

を考えよう。図 12·6 はこの崩壊過程を示す。振幅の形は次のように書ける：

$$\mathcal{M} = \frac{G}{\sqrt{2}}(\cdots)^\mu \bar{u}(p)\gamma_\mu(1-\gamma^5)v(k). \tag{12.46}$$

ここで $(\cdots)$ は図 12·6 の弱クォークカレントを表す。これを $\bar{u}_d\gamma^\mu(1-\gamma^5)v_{\bar{u}}$ と書きたいところだが，それは正しくない。なぜなら図 12·6 の ū, d クォークは自由クォークではなく，π^- 中間子内に束縛されているクォークだからである。しかし，われわれは次の事実を知っている：

- $\mathcal{M}$ は Lorentz 不変である。したがって $(\cdots)^\mu$ はベクトルか軸性ベクトルでなければならない。
- π^- はスピン 0 である。したがって $(\cdots)^\mu$ を作るのに使える 4 元ベクトルは q だけである。

こうして

$$(\cdots)^\mu = q^\mu f(q^2) \equiv q^\mu f_\pi \tag{12.47}$$

と書くことができる。ここで f は q^2 の関数である。なぜなら，q から作ることができる Lorentz スカラーは q^2 だけだからである。しかし，$q^2 = m_\pi{}^2$ だから $f(m_\pi{}^2) \equiv f_\pi$ は定数である。(12.47) を (12.46) に代入すれば，$\pi^- \to \mu^-\bar{\nu}$ 崩壊の振幅は次頁のように表される：

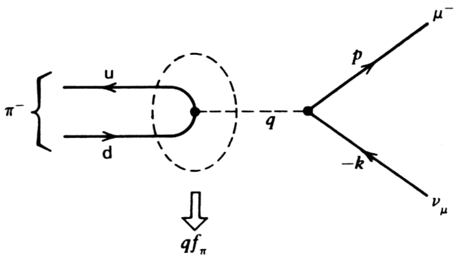


図 12·6　$\pi^-(\bar{u}d) \to \mu^-\bar{\nu}_\mu$ 崩壊の Feynman 図。4 元運動量は $q = p + k$ を満足する。

$$\mathcal{M}=\frac{G}{\sqrt{2}}(p^\mu+k^\mu)f_\pi[\bar{u}(p)\gamma_\mu(1-\gamma^5)v(k)]$$
$$=\frac{G}{\sqrt{2}}f_\pi m_\mu \bar{u}(p)(1-\gamma^5)v(k). \tag{12.48}$$

ここでニュートリノとミューオンに対する Dirac 方程式 $\not{k}v(k)=0$ および $\bar{u}(p)(\not{p}-m_\mu)=0$ を用いた。π の静止系でその崩壊率は

$$d\Gamma=\frac{1}{2m_\pi}\overline{|\mathcal{M}|^2}\frac{d^3p}{(2\pi)^3 2E}\frac{d^3k}{(2\pi)^3 2\omega}(2\pi)^4\delta(q-p-k) \tag{12.49}$$

である。出ていくレプトン対のスピン和は，おなじみのトレース計算で実行できて ((6.22) および (6.23) 参照)，次の結果が得られる：

$$\overline{|\mathcal{M}|^2}=\frac{G^2}{2}f_\pi{}^2 m_\mu{}^2\mathrm{Tr}((\not{p}+m_\mu)(1-\gamma^5)\not{k}(1+\gamma^5))$$
$$=4G^2 f_\pi{}^2 m_\mu{}^2(p\cdot k). \tag{12.50}$$

π の静止系 ($\boldsymbol{p}=-\boldsymbol{k}$) では

$$p\cdot k=E\omega-\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{k}=E\omega+\boldsymbol{k}^2=(E+\omega)\omega \tag{12.51}$$

である。以上の結果をまとめると

$$\Gamma=\frac{G^2 f_\pi{}^2 m_\mu{}^2}{(2\pi)^2 2m_\pi}\int\frac{d^3p\,d^3k}{E\omega}\delta(m_\pi-E-\omega)\delta^{(3)}(\boldsymbol{k}+\boldsymbol{p})\omega(E+\omega)$$

が得られる。d^3p 積分は $\delta^{(3)}(\boldsymbol{k}+\boldsymbol{p})$ を用いて実行してしまえば，被積分関数には角度依存性がないから，$d\omega$ に関する積分だけが残る：

$$\Gamma=\frac{G^2 f_\pi{}^2 m_\mu{}^2}{(2\pi)^2 2m_\pi}(4\pi)\int d\omega\cdot\omega^2\left(1+\frac{\omega}{E}\right)\delta(m_\pi-E-\omega). \tag{12.52}$$

ここで $E=(m_\mu{}^2+\omega^2)^{1/2}$ である。積分の値を $\omega_0{}^2$ とする。また

$$\omega_0\equiv\frac{m_\pi{}^2-m_\mu{}^2}{2m_\pi}. \tag{12.53}$$

これは (12.52) の中の δ 関数を

$$\delta[f(\omega)]=\delta(\omega-\omega_0)\Big/\left|\frac{\partial f}{\partial\omega}\right|_{\omega=\omega_0}=\delta(\omega-\omega_0)\Big/\left(1+\frac{\omega_0}{E}\right)$$

と書き直してみればわかるだろう。こうして最終的に崩壊率は次のように書くことができる：

$$\boxed{\Gamma=\frac{1}{\tau}=\frac{G^2}{8\pi}f_\pi{}^2 m_\pi m_\mu{}^2\left(1-\frac{m_\mu{}^2}{m_\pi{}^2}\right)^2.} \tag{12.54}$$

β 崩壊と μ 崩壊から得られた普遍的な値 $G=10^{-5}m_{\mathrm{N}}{}^{-2}$ をとり，$f_\pi=m_\pi$ (少なくとも正しい次元を保証する推測である) を仮定すれば，本章のはじめにあげた π^- の寿命がたしかに得られる。荷電 π 中間子の長い寿命は理論の中に

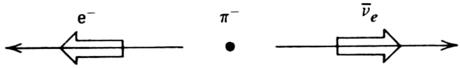


図 12·7　崩壊 $\pi^- \to e^-\bar{\nu}_e$ で出ていくレプトンのヘリシティー右巻きを示す。

矛盾なく納まるが，$f_\pi = m_\pi$ は単に推測にすぎないから，崩壊は定量的な検証にはならない。

しかし定量的な検証は可能だ。崩壊様式 $\pi^- \to e^-\bar{\nu}_e$ について同様な計算をすれば，(12.54) で m_μ を m_e に置き換えればよいから次の関係を得る：

$$\frac{\Gamma(\pi^- \to e^-\bar{\nu}_e)}{\Gamma(\pi^- \to \mu^-\bar{\nu}_\mu)} = \left(\frac{m_e}{m_\mu}\right)^2 \left(\frac{m_\pi{}^2 - m_e{}^2}{m_\pi{}^2 - m_\mu{}^2}\right)^2 = 1.2 \times 10^{-4}. \tag{12.55}$$

ここで数値は粒子の質量を代入して求めたものである。荷電 π 中間子はずっと軽い電子に崩壊するよりも，ほぼ同じ質量のミューオンに崩壊しやすい (10^4 倍)。これは位相体積から期待される結果とまったく逆で，なにか力学的（ダイナミカル）な機構が働いているに違いない。

パイオンのスピンは 0 である。したがって角運動量保存によって，出ていくレプトン対 $(e^-\bar{\nu}_e)$ は $J = 0$ でなければならない。$\bar{\nu}_e$ のヘリシティーは正であるから，e^- も正ヘリシティーを持たざるをえない (図 12·7 参照)。ところで，これは電子に対しては "間違った" ヘリシティー状態だ。$m_e = 0$ の極限では弱カレントは負ヘリシティー電子とだけ結合するから，正ヘリシティー電子との結合はずっと抑制されることになる。したがって π^- 崩壊では角運動量保存により，e^- (あるいは μ^-) は "間違った" ヘリシティー状態をとらざるをえなくなる。これが比較的軽い e^- より μ^- にずっと崩壊しやすい理由である。事実 10^4 倍も後者は起こりやすいのである。実験がこの結果を確認した。これは弱カレント (12.12) の $1 - \gamma^5$ 構造，すなわち左巻き構造の直接の結果である。しかしおもしろいことに，パリティの破れの発見以前にヘリシティー保存に基づいて (12.55) を支持する議論が，Ruderman と Finkelstein により提唱されていたのである (Phys. Rev. **76** (1949), 1458)。

問題 12.13　$K^- \to e^-\bar{\nu}_e$ と $K^- \to \mu^-\bar{\nu}_\mu$ の崩壊率の比を予測せよ。K^- の寿命 $\tau = 1.2 \times 10^{-8}$ sec と $K \to \mu\nu$ の分岐比 64 % は与えられたものとして，崩壊定数 f_K を求めよ。また，ここで用いた仮定と得られた結果について議論せよ。

12.7 荷電カレントによるニュートリノ・電子散乱

弱い相互作用におけるパリティの破れを明らかにした実験(偏極 ^{60}Co の崩壊, K 崩壊, π 崩壊など)は, 素粒子物理学の発展の中のハイライトではあったが, 今ではパリティの破れや V-A 構造はもっと直接に実験で示すことができる。実際, 最近はニュートリノ, とくにミューオンニュートリノの強いビームを作ることができて, ハドロンあるいはレプトンを標的にした散乱も可能となり, それによって弱い相互作用の構造を調べる実験が行われている。エネルギーのそろった高エネルギー π 中間子(あるいは K 中間子)ビームを長いトンネル内で崩壊させ ($\pi^+ \to \mu^+\nu_\mu$), ほぼ直線状の部分を通過させてミューオンを吸収させるのが普通の方法である。すなわち, 崩壊で作られた荷電粒子は, 厚い遮蔽で吸収されてニュートリノだけが通過してくる。この技術的成功が ν_ee 散乱あるいは $\bar{\nu}_e$e 散乱の角分布を測定することによって, 弱い相互作用 $\gamma^\mu(1-\gamma^5)$ 構造を明らかにする可能性を開いたのである。これは第 6 章の ee 散乱あるいは eμ 散乱による電磁相互作用の γ^μ 構造を確認したことと類似している。

問題にする Feynman 図を図 12・8 に示す。粒子の運動量はそれぞれの線のとなりに記してある。$\nu_e e \to \nu_e e^-$ の不変振幅は図 12.8 (a) から計算できる：

$$\mathcal{M}=\frac{G}{\sqrt{2}}(\bar{u}(k')\gamma^\mu(1-\gamma^5)u(p))(\bar{u}(p')\gamma_\mu(1-\gamma^5)u(k)). \qquad (12.56)$$

計算は 6.3 節の $e^-\mu^-$ 散乱と同様に進めればよい。違うのは γ^μ を $\gamma^\mu(1-\gamma^5)$ で置き換える点だけである。(12.56) の絶対値 2 乗をとり, 終状態スピンについて和をとり, 始状態 e^- の 2 つのスピン状態について平均すれば次のようになる：

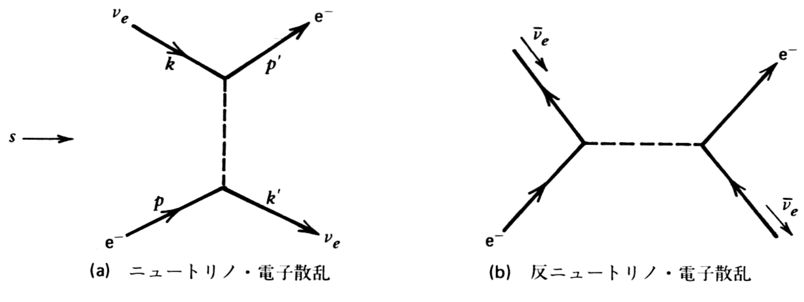


図 12・8 弾性散乱 $\nu_e e^- \to \nu_e e^-$, $\bar{\nu}_e e^- \to \bar{\nu}_e e^-$ に対する荷電カレントの寄与

$$\frac{1}{2}\sum_{\text{spin}}|\mathcal{M}|^2=\frac{G^2}{4}\operatorname{Tr}(\gamma^\mu(1-\gamma^5)\not{p}\gamma^\nu(1-\gamma^5)\not{k}')\operatorname{Tr}(\gamma_\mu(1-\gamma^5)\not{k}\gamma_\nu(1-\gamma^5)\not{p}')$$
$$=64G^2(k\cdot p)(k'\cdot p')$$
$$=16G^2s^2. \tag{12.57}$$

ここで (12.29) の公式を用いた。また相対論的極限 $m_e=0$ で計算しているから，

$$s=(k+p)^2=2k\cdot p=2k'\cdot p' \tag{12.58}$$

の関係を使った。重心系の角分布は (4.35)（$m_e=0$ の極限では $p_f=p_i$）を用いて計算できる：

$$\frac{d\sigma(\nu_e e^-)}{d\Omega}=\frac{1}{64\pi^2 s}\overline{|\mathcal{M}|^2}=\frac{G^2 s}{4\pi^2}. \tag{12.59}$$

等方的角分布を積分して

$$\sigma(\nu_e e^-)=\frac{G^2 s}{\pi} \tag{12.60}$$

が得られる。

問題 12.14　次元的考察だけから，(点相互作用の) 断面積は高エネルギーで $\sigma(\nu_e e^-)\sim G^2 s$ のように振舞うことを示せ。また，この結果の意義を議論せよ。

問題 12.15　E_ν を実験室におけるニュートリノのエネルギーとして

$$\sigma(\nu_e e^-)\approx(\text{GeV 単位の } E_\nu)\times 10^{-41}\ \text{cm}^2$$

を示せ。

$\bar{\nu}_e e^- \to \bar{\nu}_e e^-$ の Feynman 図は図 12·8 (b) である。これは図 12·8 (a) の $\nu_e e^- \to \nu_e e^-$ のニュートリノを交叉させて得られる (4.6 節および 4.7 節参照)。したがって，(12.57) の s を t に置き換えればよいから

$$\frac{1}{2}\sum_{\text{spin}}|\mathcal{M}|^2=16G^2t^2$$
$$=4G^2s^2(1-\cos\theta)^2 \tag{12.61}$$

を得る。ここで θ は入射 $\bar{\nu}_e$ と出ていく e^- の間の角度で (図 12·9 参照)，

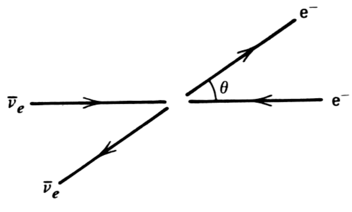


図 12·9　$\bar{\nu}_e e^-$ 散乱における θ の定義

$$t \simeq \frac{-s}{2}(1-\cos\theta)$$

が成り立つ ((4.45) 参照)。(12.61) を用いて角分布が得られる：

$$\frac{d\sigma(\bar{\nu}_e e^-)}{d\Omega} = \frac{G^2 s}{16\pi^2}(1-\cos\theta)^2. \tag{12.62}$$

角度について積分すれば

$$\sigma(\bar{\nu}_e e^-) = \frac{G^2 s}{3\pi} \tag{12.63}$$

となる。(12.60) と比較すると

$$\sigma(\bar{\nu}_e e^-) = \frac{1}{3}\sigma(\nu_e e^-) \tag{12.64}$$

という関係が成り立つ。

(12.59), (12.62) および (12.64) は，実験で検証できるような形で弱い相互作用の $\gamma^\mu(1-\gamma^5)$ 構造をはっきりと示している。これの意味する重要性は，本節の結果と電磁過程 $e\mu \to e\mu$ においてバーテックスを γ^μ として得られる結果と比較したり，以下の問題を解いてみればおのずから納得できるだろう。

問題 12.16† かりに，荷電弱カレントが $\gamma^\mu(a+b\gamma^5)$ の構造だったとすると，νe 弾性散乱は次の形をとることを示せ：

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{G^2 s}{32\pi^2}\left[A^+ + A^- \cos^4\frac{\theta}{2}\right].$$

ここで $A^\pm = (a^2+b^2)^2 \pm 4a^2b^2$ である。$\bar{\nu}e$ 弾性散乱の角分布も計算せよ。

(12.59) と (12.62) の角分布でもっとも著しい違いは，$\bar{\nu}_e e$ 散乱は $\cos\theta=1$ で 0 になるのに反し，$\nu_e e$ 散乱は 0 にならないことである。図 12·9 の θ の定義によれば，これは入射ビーム粒子の後方散乱に対応する。こういう結果は，以前の計算を解釈するときに使ったヘリシティーの議論から予期されることだった。図 12·10 はすでにおなじみの図であろう。$\bar{\nu}_e e$ 後方散乱は，角運動量保存により禁止される。実際，反応 $\bar{\nu}_e e \to \bar{\nu}_e e$ は，ヘリシティーが完全に正味 1 の $J=1$ 状態を通して進行する。すなわち，3 つのヘリシティー状態のうち 1 つだけが許されるのである。これが (12.64) に 1/3 が現れる理由である。図 12·9 の θ の定義を使えば，許される振幅は $d_{-11}{}^1(\theta)=(1-\cos\theta)/2$ に比例するが ((6.39) 参照)，これは (12.61) の結果と一致している。

† (訳註)　原著者から原著の問題 12.16 をこの問題に差し替えてほしい由で，訳者に送られてきたものである。

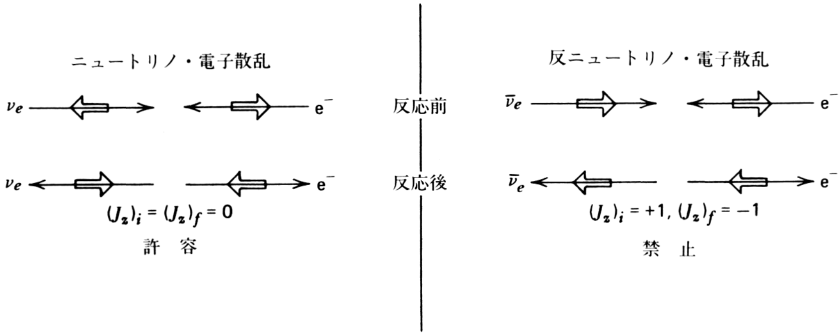


図 12·10　重心系における後方散乱。長い矢印は粒子の運動量，短い矢印は粒子の質量を無視する極限でのヘリシティーを表す。z 軸は入射ニュートリノの方向にとってある。

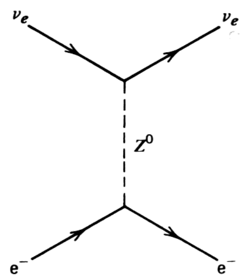


図 12·11　ニュートリノ・電子弾性散乱に寄与する中性カレント

$\nu_e e^-$, $\bar{\nu}_e e^-$ 弾性散乱は，弱中性カレントによる相互作用でも起こり (図 12·11 参照)，荷電カレント相互作用と干渉する (図 12·8 (a))。この問題は 13.5 節で議論しよう。しかし高エネルギーのニュートリノビームは大部分 ν_μ (または $\bar{\nu}_\mu$) であるから，もっとも起こりやすい (荷電カレント) レプトンだけが関与する散乱過程は

$$\nu_\mu + e^- \longrightarrow \mu^- + \nu_e \tag{12.65}$$

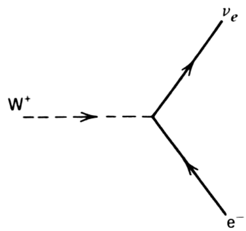
である。つまり逆 μ 崩壊である。これには中性カレントは寄与しない。したがって断面積は (12.59) そのもので与えられる。

12.8　ニュートリノ・クォーク散乱

ν_μ(あるいは $\bar{\nu}_\mu$) とクォークの散乱は，高エネルギーのニュートリノビームを陽子，あるいは原子核標的にぶつけることによって実験的に可能になる。これは第 8 章，第 9 章で述べた高エネルギーの電子，またはミューオンビームをハドロン標的で散乱させた電磁的レプトン・クォーク散乱の研究との類似だと考えればよい。

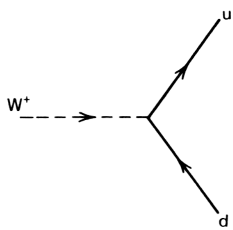
ニュートリノ・クォーク散乱の断面積を予測するには，クォークの弱カレントの形を知ることが必要だろう。クォークは電荷が分数だという点を別にすれば，電磁相互作用はまったくレプトンと同じである。したがってレプトンの場合とまったく同じように，クォーク弱カレントを作り上げたくなる。たとえば，電子の弱カレント (12.12)

$$J_e{}^\mu = \bar{u}_\nu \gamma^\mu \frac{1}{2}(1-\gamma^5)\, u_e \;\Longrightarrow \tag{12.66}$$



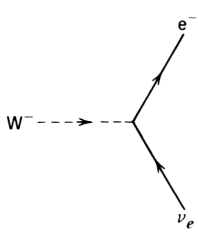
を真似して電荷を上げるクォークカレント

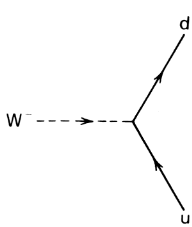
$$J_q{}^\mu = \bar{u}_u \gamma^\mu \frac{1}{2}(1-\gamma^5)\, u_d \;\Longrightarrow \tag{12.67}$$



を作ろう。

(12.66), (12.67) の Hermite 共役は電荷を下げる弱カレントである：





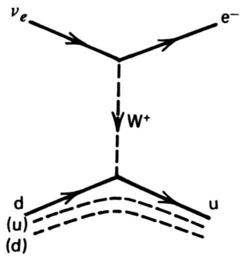


図 12・12　中性子の β 崩壊 $n \to pe^-\bar{\nu}_e$ に寄与するクォークの Feynman 図。破線は弱い相互作用に関与しない 2 個のスペクテータークォークを表す。

V-A 型という構造は，弱カレントは左巻き u, d クォーク（あるいは右巻き $\bar{u}, \bar{d}$ クォーク）とだけ結合することを意味する（問題 12.3 参照）。高エネルギーでは，これは負ヘリシティーの u, d クォーク，あるいは正ヘリシティーの $\bar{u}, \bar{d}$ クォークのみが結合することを意味する。

上のカレントを用いて，図 12・12 のような Feynman 図を計算することができる。つまり

$$d \longrightarrow ue^-\bar{\nu}_e$$

に対する振幅を計算することができる。これを用いて中性子の β 崩壊を構成子クォークで表すことができる。図 12・12 の"傍観者（スペクテーター）" u, d クォークは，12.3 節で議論した原子核の β 崩壊の場合の傍観者核子とまったく同じ立場にある。この $d \to u$ 遷移は $\pi^- \to \pi^0 e^-\bar{\nu}_e$ 崩壊の要因でもある。この場合の傍観者クォークは $\bar{u}$ である。あるいは $\bar{u} \to \bar{d}$ 遷移を考えれば d が傍観者クォークとなる。

問題 12.17　上に述べた考えを用いて次の関係を示せ：

$$\Gamma(\pi^- \to \pi^0 e^-\bar{\nu}_e) = \frac{G^2}{30\pi^3}(\Delta m)^5. \qquad (12.68)$$

ここで $\Delta m = m(\pi^-) - m(\pi^0) = 4.6$ MeV である。崩壊率を計算して $\Gamma(\pi^- \to \mu^-\bar{\nu}_\mu)$ と比較してみよ。

さて，これでニュートリノ・クォーク散乱を扱う準備ができた。クォークカレントとレプトンカレントは同じ形だから，12.7 節で得られた νe 散乱の結果をそのまま使うことができる。(12.59) と (12.62) から重心系では次の関係が成り立つ：

$$\frac{d\sigma(\nu_\mu d \to \mu^- u)}{d\Omega} = \frac{G^2 s}{4\pi^2}, \qquad (12.69)$$

$$\frac{d\sigma(\bar{\nu}_\mu u \to \mu^+ d)}{d\Omega} = \frac{G^2 s}{16\pi^2}(1+\cos\theta)^2. \qquad (12.70)$$

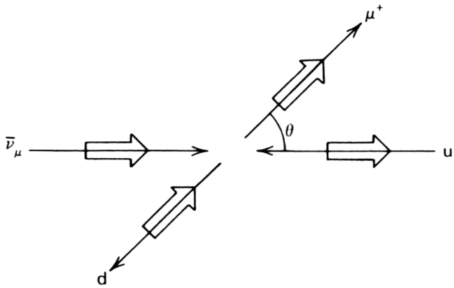
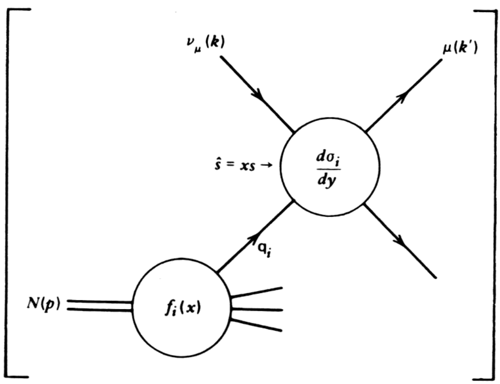


図 12·13　高エネルギー $\bar{\nu}_\mu \mathrm{u} \to \mu^+ \mathrm{d}$ 散乱におけるヘリシティーの関係

θ は図 12·13 で定義してある。図からわかるように $\bar{\nu}_\mu \mathrm{u} \to \mu^+ \mathrm{d}$ 後方散乱 ($\theta = \pi$) はヘリシティー保存から禁止される。反クォーク散乱 $\bar{\nu}_\mu \bar{\mathrm{d}} \to \mu^+ \bar{\mathrm{u}}$, $\nu_\mu \bar{\mathrm{u}} \to \mu^- \bar{\mathrm{d}}$ の断面積は，それぞれ (12.69) および (12.70) で与えられる。たとえば，ν_μ は u とも $\bar{\mathrm{d}}$ とも相互作用しないことがわかる。

これらの結果を実験と比較するには，構成子反応の断面積 (12.69) や (12.70) を，反応全体を表す νN の包含断面積の表式の中に埋め込まなければならない。それはすでに第 9 章でおなじみの手法である。すなわち

$$\frac{d\sigma(\nu \mathrm{N} \to \mu \mathrm{X})}{dx\,dy} = \sum_i$$



(12.71)

$$= \sum_i f_i(x) \left(\frac{d\sigma_i}{dy} \right)_{\hat{s} = xs}. \qquad (12.72)$$

まず構成子過程の反応の角分布が，無次元の変数 y で表されていることに注意しよう。これは θ と次の関係がある ((9.25) 参照)：

$$1 - y \equiv \frac{p \cdot k'}{p \cdot k} \simeq \frac{1}{2}(1 + \cos\theta).$$

ここで4元運動量は(12.71)に定義してある。したがって，構成子散乱の断面積(12.69)および(12.70)は次のように書くことができる：

$$\frac{d\sigma(\nu_\mu \mathrm{d} \to \mu^- \mathrm{u})}{dy} = \frac{G^2 xs}{\pi}, \tag{12.73}$$

$$\frac{d\sigma(\bar{\nu}_\mu \mathrm{u} \to \mu^+ \mathrm{d})}{dy} = \frac{G^2 xs}{\pi}(1-y)^2. \tag{12.74}$$

xs は問題にしている $\nu \mathrm{q} \to \mu \mathrm{q}'$ の重心系のエネルギーを表す。ここで s は，$\nu \mathrm{N} \to \mu \mathrm{X}$ の重心系のエネルギーである(問題9.3参照)。これらの結果と第9章で導入した核子の構造関数 $f_i(x)$ とを使えば，深非弾性散乱 $\nu_\mu \mathrm{N} \to \mu \mathrm{X}$ の断面積を計算することができる。

これらパートン模型の予言を実験とつき合わせるには，陽子と中性子を同数含む原子核，すなわちアイソスカラー標的を用いるのが一番簡単である。ニュートリノはdクォークと $\bar{\mathrm{u}}$ クォークとだけしか相互作用しないから，測られるのは次のようなものである((9.29)参照)：

$$\begin{aligned} d^{\mathrm{p}}(x) + d^{\mathrm{n}}(x) &= d(x) + u(x) \equiv Q(x), \\ \bar{u}^{\mathrm{p}}(x) + \bar{u}^{\mathrm{n}}(x) &= \bar{u}(x) + \bar{d}(x) \equiv \overline{Q}(x). \end{aligned} \tag{12.75}$$

ここで $u(x), d(x)$ は，それぞれ陽子内のuクォークおよびdクォークの分布関数 $f_i(x)$ を意味する。(12.73)と $\bar{\nu}_\mu \bar{\mathrm{u}} \to \mu^- \bar{\mathrm{d}}$ の断面積を(12.72)に代入すれば，核子あたりの $\nu_\mu \mathrm{N} \to \mu^- \mathrm{X}$ の断面積が得られる。すなわち

$$\frac{d\sigma(\nu_\mu \mathrm{N} \to \mu^- \mathrm{X})}{dxdy} = \frac{G^2 xs}{2\pi}[Q(x) + (1-y)^2 \overline{Q}(x)]. \tag{12.76}$$

一方，反ニュートリノは $\bar{\mathrm{d}}$,uクォークと相互作用するから，同様な手順によって断面積は次のようになる：

$$\frac{d\sigma(\bar{\nu}_\mu \mathrm{N} \to \mu^+ \mathrm{X})}{dxdy} = \frac{G^2 xs}{2\pi}[\overline{Q}(x) + (1-y)^2 Q(x)]. \tag{12.77}$$

問題 12.18　アイソスカラー標的による，核子あたりの電磁的深非弾性散乱の断面積は次で表されることを示せ(問題9.5参照)：

$$\frac{d\sigma(\mathrm{eN} \to \mathrm{eX})}{dxdy} = \frac{2\pi\alpha^2}{Q^4} xs[1 + (1-y)^2]\frac{5}{18}[Q(x) + \overline{Q}(x)]. \tag{12.78}$$

(12.78)の $\nu \mathrm{N} \to \mu \mathrm{X}$ の場合と異なり，パリティが保存しているから $Q(x)$ と $\overline{Q}(x)$ が対称的に入っていることに注意せよ。

もし核子内には3個の価クォークだけしか存在しないとすれば($\overline{Q}(x)=0$)，$\nu \mathrm{N} \to \mu^- \mathrm{X}$ および $\bar{\nu} \mathrm{N} \to \mu^+ \mathrm{X}$ のデータは，弱い相互作用特有の V-A 型と

いうドラマティックな性質を示すはずだ。すなわち

$$\frac{d\sigma(\nu)}{dy}=c, \qquad \frac{d\sigma(\bar{\nu})}{dy}=c(1-y)^2 \tag{12.79}$$

のように振舞う。ここで c は (12.76) から求められる。積分した全断面積に対しては

$$\sigma(\bar{\nu})/\sigma(\nu)=1/3$$

が成り立つ。

実験データはほぼこれらの予測を裏づけている。実際 (12.76) および (12.77) を使って $Q(x)$ と $\overline{Q}(x)$ を決定するのである。図 12・14 はその一例である。陽子内には約 5% の $\overline{Q}$ 成分が含まれている。

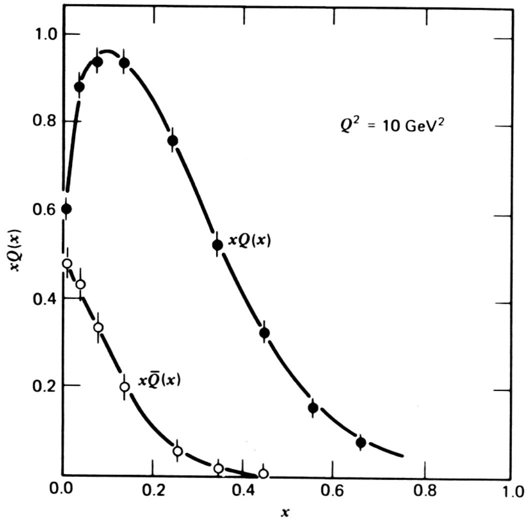


図 12・14　CERN と Fermi 研究所で測定された核子内のクォーク，反クォークの運動量分布。実験はクォーク運動量が陽子の半分にすぎないことを示している。残りの半分はグルーオンが担っている (9.4 節参照)。

問題 12.19　$\sigma(\bar{\nu})/\sigma(\nu)=R$ として次式を証明せよ：

$$\frac{\int x\,\overline{Q}(x)\,dx}{\int xQ(x)\,dx}=\frac{3R-1}{3-R}.$$

くわしい解析をしてみると，たしかに，分布関数 $u(x), d(x), \cdots$ は電子の深

非弾性散乱，ニュートリノの深非弾性散乱のどちらから得られたものも同じだということがわかる。これはパートン模型の文句のない成功といえよう。$u(x)$，$d(x)$ はハドロン標的の内部構造を記述するもので，どんな実験手段で決めようと同じ結果が得られる。

12.9　弱中性カレントの発見

1973 年，ニュートリノ反応

$$\bar{\nu}_\mu e^- \longrightarrow \bar{\nu}_\mu e^- \tag{12.80}$$

$$\left.\begin{aligned} \nu_\mu N &\longrightarrow \nu_\mu X \\ \bar{\nu}_\mu N &\longrightarrow \bar{\nu}_\mu X \end{aligned}\right\} \tag{12.81}$$

の検出は，素粒子物理学に新しいページを開いたものということができよう。これらは弱中性カレントの証拠である。それまで弱中性カレントの効果は観測されていなかった。事実，

$$K^0 \longrightarrow \mu^+\mu^-$$

$$K^+ \longrightarrow \pi^+e^+e^-$$

$$K^+ \longrightarrow \pi^+\nu\bar{\nu}$$

などの崩壊がみつかっていないことから，(ストレンジネスを変える) 中性カレントに対して厳しい上限が置かれていた。誘起中性カレントの影響は，(中性) 電磁カレントと (荷電) 弱カレントの組み合わせから生ずることが期待される (たとえば $K^+ \to \pi^+e^+e^-$ は $K^+ \to \pi^+\gamma$, $\gamma \to e^+e^-$ により仮想光子を通して起こる)。だが，このような効果は非常に小さい。許容弱崩壊に比べればその割合は

$$\frac{\Gamma(K^+ \to \pi^+e^+e^-)}{\Gamma(K^+ \to \pi^0e^+\nu_e)} \sim \left(\frac{\alpha G}{G}\right)^2 \sim 10^{-5} \tag{12.82}$$

の程度であって，これは実験データと一致する (この場合，仮想光子の伝播関数 $1/q^2$ は，光子結合に対する $0^- \to 0^-$ のヘリシティー抑制によって打ち消される)。しかし，(12.80) および (12.81) の反応は，他の弱い相互作用の反応過程とほとんど同じ割合で起こっていることがわかったのである。

12.10　中性カレントによるニュートリノ・クォーク散乱

中性カレント (NC) と荷電カレント (CC) の強さを定量的に比較するには，たとえば，鉄標的によるニュートリノ散乱を調べればよい。現在得られている

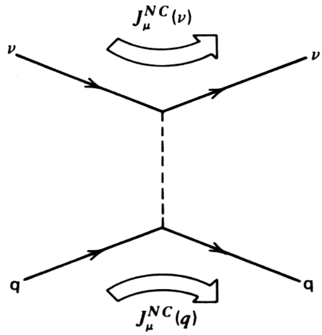


図 12·15 中性カレント νq → νq 散乱

実験は次の通りである：

$$R_\nu \equiv \frac{\sigma^{\rm NC}(\nu)}{\sigma^{\rm CC}(\nu)} \equiv \frac{\sigma(\nu_\mu {\rm N} \to \nu_\mu {\rm X})}{\sigma(\nu_\mu {\rm N} \to \mu^- {\rm X})} = 0.31 \pm 0.01,$$
$$R_{\bar\nu} \equiv \frac{\sigma^{\rm NC}(\bar\nu)}{\sigma^{\rm CC}(\bar\nu)} \equiv \frac{\sigma(\bar\nu_\mu {\rm N} \to \bar\nu {\rm X})}{\sigma(\bar\nu_\mu {\rm N} \to \mu^+ {\rm X})} = 0.38 \pm 0.02. \tag{12.83}$$

νN → νX の実験データは中性カレント・カレント型相互作用による νq → νq 過程を用いて説明できる。図 12·15 を参照するとその振幅は次のように書ける：

$$\mathscr{M} = \frac{G_{\rm N}}{\sqrt{2}}[\bar u_\nu \gamma^\mu (1-\gamma^5) u_\nu][\bar u_{\rm q} \gamma_\mu (c_V{}^{\rm q} - c_A{}^{\rm q} \gamma^5) u_{\rm q}]. \tag{12.84}$$

ここで q＝u, d, ··· は標的内のクォークを表す。中性の弱い相互作用が, (12.84) のように 4 元ベクトルカレント・カレント型でなければならないという理由ははじめから自明なわけではない。それは実験によって，たとえば測定された y 分布から決定されるべきものである (問題 12.20 参照)。

ここで, 弱中性カレント $J_\mu{}^{\rm NC}$ の普通に使われる規格化を導入しておくのがよいだろう。どんな中性カレントの反応に対しても，不変振幅は次のように書くことができる：

$$\boxed{\mathscr{M} = \frac{4G}{\sqrt{2}} 2\rho J_\mu{}^{\rm NC} J^{{\rm NC}\mu}.} \tag{12.85}$$

荷電カレントの反応に対する不変振幅 (12.13) と比較してみよ。(12.84) の νq → νq 散乱の振幅はまさにこの形をしている。中性カレントは慣習的に次のように定義する：

$$J_\mu{}^{\rm NC}(\nu) = \frac{1}{2}\left(\bar u_\nu \gamma_\mu \frac{1}{2}(1-\gamma^5) u_\nu\right), \tag{12.86}$$

$$J_\mu^{\mathrm{NC}}(\mathrm{q})=\left(\bar{u}_{\mathrm{q}}\gamma_\mu\frac{1}{2}(c_V{}^{\mathrm{q}}-c_A{}^{\mathrm{q}}\gamma^5)\,u_{\mathrm{q}}\right). \tag{12.87}$$

$J_\mu{}^{\mathrm{NC}}$ は $J_\mu{}^{\mathrm{CC}}$ と異なり，一般的には純粋な V-A カレントではない ($c_V \neq c_A$)。右巻き成分も混ざっている。しかしニュートリノは左巻きだから，(12.86) で $c_V{}^{\nu}=c_A{}^{\nu}\equiv 1/2$ である。(12.85) に出てくるパラメーター ρ が，中性カレントと荷電カレントの相対的強さを決定する。標準模型では $c_V{}^i, c_A{}^i$ ($i=\nu, \mathrm{e}, \mathrm{u}, \cdots$) はすべて 1 個のパラメーターによって表され，$\rho=1$ である (第 13, 15 章参照)。いいかえれば，模型が成功を収めれば，中性カレントが関与する現象はすべて 1 個の共通のパラメーターで記述することができるのである。実際，現在の実験では小さい誤差の範囲で $\rho=1$ である。しかし，当面 $c_V{}^i, c_A{}^i$ および ρ は，自由なパラメーターとしておいて実験と比較して決定しよう。カレント (12.86) および (12.87) を (12.85) に代入すれば，$\nu\mathrm{q}\to\nu\mathrm{q}$ の散乱振幅 (12.84) が得られる。ただし

$$G_{\mathrm{N}}=\rho G\ \ (\simeq G) \tag{12.88}$$

である。

さて $\nu\mathrm{N}\to\nu\mathrm{X}$ のデータの解釈にもどることにしよう。$\nu\mathrm{q}\to\nu\mathrm{q}$ の断面積は，荷電カレントの反応 $\nu\mathrm{q}\to\mu\mathrm{q}'$ の場合とまったく同様に計算することができる。たとえば，(12.73) および (12.74) の結果

$$\begin{aligned}\frac{d\sigma(\nu_{\mathrm{L}}\mathrm{d}_{\mathrm{L}}\to\mu\mathrm{u})}{dy}&=\frac{G^2xs}{\pi},\\ \frac{d\sigma(\nu_{\mathrm{L}}\bar{u}_{\mathrm{R}}\to\mu\bar{\mathrm{d}})}{dy}&=\frac{G^2xs}{\pi}(1-y)^2\end{aligned} \tag{12.89}$$

を使えば，ただちに

$$\frac{d\sigma(\nu\mathrm{q}\to\nu\mathrm{q})}{dy}=\frac{G_{\mathrm{N}}{}^2xs}{\pi}[(g_{\mathrm{L}}{}^{\mathrm{q}})^2+(g_{\mathrm{R}}{}^{\mathrm{q}})^2(1-y)^2] \tag{12.90}$$

が得られる。ここで

$$g_{\mathrm{L}}{}^{\mathrm{q}}\equiv\frac{1}{2}(c_V{}^{\mathrm{q}}+c_A{}^{\mathrm{q}}),\qquad g_{\mathrm{R}}{}^{\mathrm{q}}\equiv\frac{1}{2}(c_V{}^{\mathrm{q}}-c_A{}^{\mathrm{q}}) \tag{12.91}$$

である。

(12.89) と比較して (12.90) の新しい特徴は，$J_\mu{}^{\mathrm{NC}}(q)$ の右巻き成分 $g_{\mathrm{R}}{}^{\mathrm{q}}$ を可能性として持っていることである。

問題 12.20 $|\mathcal{M}(\nu\mathrm{q}\to\nu\mathrm{q})|^2$ はクォークと中性カレントとの結合が純粋の $V-A$, $V+A$ および S, P に応じて，それぞれ s^2, $s^2(1-y)^2$, s^2y^2 のように振舞うことを示せ。純粋の $V\pm A$ 結合は $\gamma^\mu(1\pm\gamma^5)$ と書くが，S, P はスカラーおよび擬スカラー結合の振幅である：

$$\mathcal{M}=\frac{G_{\mathrm{N}}}{\sqrt{2}}(\bar{u}_{\nu}(1-\gamma^5)u_{\nu})(\bar{u}_{\mathrm{q}}(g_S-g_P\gamma^5)u_{\mathrm{q}}).$$

12.8 節における CC 過程 $\nu\mathrm{N}\to\mu^-\mathrm{X}$ および $\bar{\nu}\mathrm{N}\to\mu^+\mathrm{N}$ の計算にならって，NC 過程 $\nu\mathrm{N}\to\nu\mathrm{X}$ および $\bar{\nu}\mathrm{N}\to\bar{\nu}\mathrm{X}$ に対してパートン模型による予測をすることができる。アイソスカラー標的の場合，核子あたりの断面積は

$$\begin{aligned}\frac{d\sigma(\nu\mathrm{N}\to\nu\mathrm{X})}{dxdy}=\frac{G_{\mathrm{N}}{}^2xs}{2\pi}&[g_{\mathrm{L}}{}^2(Q(x)+(1-y)^2\overline{Q}(x))\\&+g_{\mathrm{R}}{}^2(\overline{Q}(x)+(1-y)^2Q(x))]\end{aligned}\tag{12.92}$$

となる。もし u, d, ū, d̄ クォークだけが核子内に存在すると仮定すれば

$$g_{\mathrm{L}}{}^2\equiv(g_{\mathrm{L}}{}^{\mathrm{u}})^2+(g_{\mathrm{L}}{}^{\mathrm{d}})^2\tag{12.93}$$

である ($g_{\mathrm{R}}{}^2$ についても同様)。x について積分して，次の量を定義しよう ((12.75) 参照)：

$$Q\equiv\int xQ(x)\,dx=\int x[u(x)+d(x)]dx.\tag{12.94}$$

(12.92) の断面積および $\bar{\nu}\mathrm{N}\to\bar{\nu}\mathrm{X}$ に対する断面積は

$$\begin{aligned}\frac{d\sigma^{\mathrm{NC}}(\nu)}{dy}&=\frac{G_{\mathrm{N}}{}^2s}{2\pi}[g_{\mathrm{L}}{}^2(Q+(1-y)^2\overline{Q})+g_{\mathrm{R}}{}^2(\overline{Q}+(1-y)^2Q)],\\\frac{d\sigma^{\mathrm{NC}}(\bar{\nu})}{dy}&=\frac{G_{\mathrm{N}}{}^2s}{2\pi}[g_{\mathrm{L}}{}^2(\overline{Q}+(1-y)^2Q)+g_{\mathrm{R}}{}^2(Q+(1-y)^2\overline{Q})]\end{aligned}\tag{12.95}$$

のように書くことができる。これは荷電カレントの断面積 (12.76)，および (12.77) を書き直した結果と対比することができる。すなわち

$$\begin{aligned}\frac{d\sigma^{\mathrm{CC}}(\nu)}{dy}&=\frac{G^2s}{2\pi}[Q+(1-y)^2\overline{Q}],\\\frac{d\sigma^{\mathrm{CC}}(\bar{\nu})}{dy}&=\frac{G^2s}{2\pi}[\overline{Q}+(1-y)^2Q].\end{aligned}\tag{12.96}$$

鉄標的内の中性子過剰および s クォークの寄与を考慮して，(12.95) および (12.96) を補正すれば，現在の実験データと比較して

$$\begin{aligned}g_{\mathrm{L}}{}^2&=0.300\pm0.015,\\g_{\mathrm{R}}{}^2&=0.024\pm0.008\end{aligned}\tag{12.97}$$

を得る。実験事実から判断すると，弱中性カレントは V-A(左巻き) 優勢といってよいが，$g_{\mathrm{R}}\neq0$ なので純粋な V-A ではない。NC と CC はまったくよく似た構造をしているが，CC は純粋な V-A 型であると信じられている。第 13 章ではこの問題を取り上げるが，まずクォークが関係するところをもっとくわしくみておかなければならない。

12.11　Cabibbo 角

これまでレプトンとクォークは，次のような 1 対の (左巻き) フェルミオンの組

$$\begin{pmatrix}\nu_e \\ e^-\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}\nu_\mu \\ \mu^-\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}u \\ d\end{pmatrix} \tag{12.98}$$

から作られる荷電 V-A カレントを通して弱い相互作用に登場していた。これらすべての荷電カレントは，普遍的な結合定数 G で結合している。この普偏性をもっと重いクォークから作られる 2 重項

$$\begin{pmatrix}c \\ s\end{pmatrix} \tag{12.99}$$

も含むように拡張したくなるのは当然だろう。だが，すでに知っているようにこれは正しくない。たとえば $K^+ \to \mu^+\nu_\mu$ 崩壊が起こるが，K^+ は u クォークと $\bar{s}$ クォークから作られているから，u クォークと $\bar{s}$ クォークを結合させる弱カレントが存在しなければならない (図 12·16 参照)。これは u↔d および c↔s 間の弱遷移のみが許されるような上の枠組とは矛盾する。

新しいクォーク間の結合を導入しないで $K^+ \to \mu^+\nu_\mu$ も説明できるように，普偏性を保存したまま，クォーク 2 重項のほうを変更してみよう。荷電カレントは "回転した" クォーク状態

$$\begin{pmatrix}u \\ d'\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}c \\ s'\end{pmatrix}, \quad \cdots \tag{12.100}$$

を結合させると仮定する。ここに

$$\begin{aligned} d' &= d\cos\theta_C + s\sin\theta_C, \\ s' &= -d\sin\theta_C + s\cos\theta_C \end{aligned} \tag{12.101}$$

である。Cabibbo 角として知られるクォーク混合角 θ_C が 1 つの任意パラメターとして導入されたわけである。1963 年，Cabibbo はストレンジ粒子の弱崩壊を説明するために，はじめて 2 重項 (u, d′) を導入したのである。実際，d ク

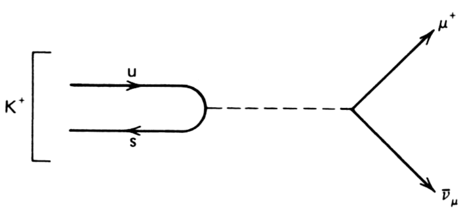


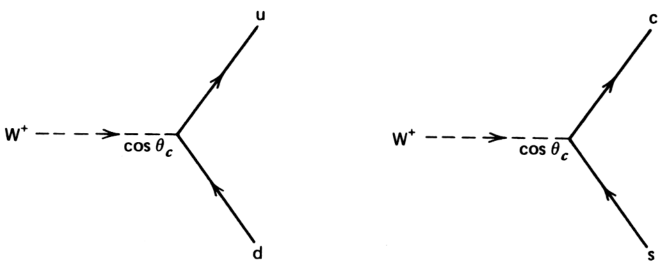
図 12·16　K^+ 崩壊 $K^+ \to \mu^+\bar{\nu}_\mu$

ォークと s クォークの混合角は $\Delta S=1$ 崩壊と $\Delta S=0$ 崩壊を比較することによって決定された。たとえば

$$\frac{\Gamma(\mathrm{K}^+ \to \mu^+\nu_\mu)}{\Gamma(\pi^+ \to \mu^+\nu_\mu)} \sim \tan^2\theta_\mathrm{C},$$

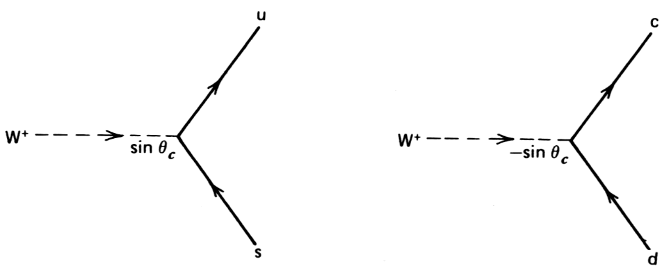
$$\frac{\Gamma(\mathrm{K}^+ \to \pi^0\mathrm{e}^+\nu_\mathrm{e})}{\Gamma(\pi^+ \to \pi^0\mathrm{e}^+\nu_\mathrm{e})} \sim \tan^2\theta_\mathrm{C}.$$

粒子の質量差による運動学的因子を考慮に入れると，実験データは $\Delta S=1$ 遷移が，$\Delta S=0$ 遷移と比較して約 1/20 に抑制されることを示している。これは Cabibbo 角 $\theta_\mathrm{C}\approx 13^\circ$ に対応する。われわれは，荷電カレント (12.67) に対する考え方を変えたのだ。したがって今度は "Cabibbo 角により促進される" ($\cos\theta_\mathrm{C}$ に比例する) 遷移



(12.102)

および "Cabibbo 角により抑制される" ($\sin\theta_\mathrm{C}$ に比例する) 遷移



(12.103)

が存在することになる ((12.10) 参照)。同様な図は電荷を下げる遷移に対しても書くことができる。上述のことを要約すると，クォークの荷電カレント弱相互作用を記述する行列要素を具体的に書くことができて，(12.13) から

$$\mathcal{M}=\frac{4G}{\sqrt{2}}J^\mu J_\mu{}^\dagger \qquad (12.104)$$

のように表される。ここで

$$J_\mu = (\bar{u}\ \bar{c})\frac{\gamma^\mu(1-\gamma^5)}{2}U\begin{pmatrix}d\\ s\end{pmatrix}. \qquad (12.105)$$

ユニタリー行列 U は，(12.101) の d クォーク状態と s クォーク状態の回転を表す：

$$U = \begin{pmatrix}\cos\theta_C & \sin\theta_C\\ -\sin\theta_C & \cos\theta_C\end{pmatrix}. \qquad (12.106)$$

もちろんセミレプトン崩壊を記述する振幅もある。それはクォークカレント J^μ (クォーク) とレプトンカレント $J_\mu{}^\dagger$(レプトン) の積から作られる。

すべてこれらのことは，今までやってきた計算の中にも考慮されていなくてはならない。たとえば β 崩壊の起こる確率の公式に現れる G は

$$G_\beta = G\cos\theta_C \qquad (12.107)$$

と置き換えなければならない。一方，純粋のレプトン過程である μ 崩壊の崩壊率は混合が起きないから $G=G_\mu$ で変わらない。これらの崩壊率のくわしい比較をしてみると ((12.44) 参照)，Cabibbo の仮定が正しいことがわかる。

これまで議論してきた弱い相互作用は，u クォークと d′ クォークだけしか含んでいなかった。ところが (12.100) をみると，s′ がチャームクォーク c と結合する，したがって d′↔u 遷移はもちろんのこと，弱遷移 c↔s′ も存在する。実際このように考えて Glashow, Illiopoulos, Maiani (GIM) は，c クォークの存在を実験的発見に先立って提唱していたのである。このようなことを考えた理由は，$K^0 \to \mu^+\mu^-$ 崩壊を調べてみるとうなずけるだろう。図 12·17 (a) のように u↔d′ 遷移だけ考えたのでは，$K_L{}^0 \to \mu^+\mu^-$ の崩壊率は実験値

$$\frac{\Gamma(K_L{}^0 \to \mu^+\mu^-)}{\Gamma(K_L{}^0 \to \text{すべての崩壊様式})} = (9.1\pm1.9)\times10^{-9}$$

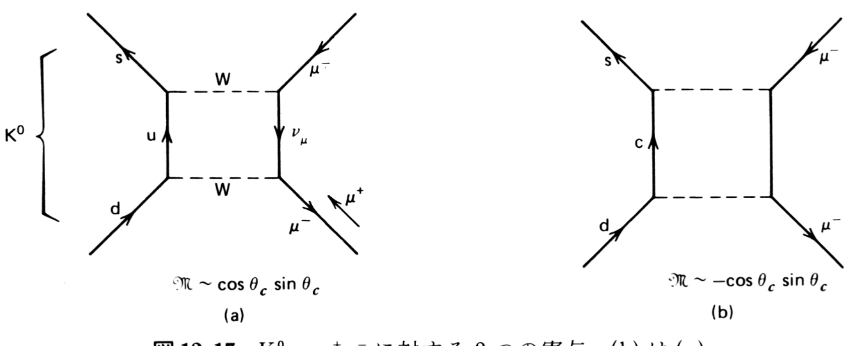


図 12·17 $K^0 \to \mu^+\mu^-$ に対する 2 つの寄与。(b) は (a) で u → c と置き換えたものである。

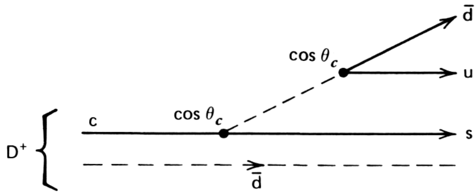


図 12·18 クォーク過程としてみた D^+ 崩壊。Cabibbo 角により促進される過程は $c \to su\bar{d}$ で $\bar{d}$ はスペクテーターである。

よりずっと大きくなってしまう。ところが，c クォークを導入すると，図 12·17 (b) が寄与して，c クォークと u クォークの質量差がないとすれば，図 12·17 (a) からの寄与は完全に打ち消される。これについては次節で議論しよう。

c, s′ の弱カレントがチャーム粒子の弱崩壊を引き起こす。うってつけの例が D^+ 中間子の崩壊である。D^+ 中間子は c クォークと $\bar{d}$ クォークから作られている。$\cos^2\theta_C \gg \sin^2\theta_C$ であるから (12.100) と (12.101) を考慮すると，起こりやすいクォーク崩壊は図 12·18 のような様式で，その振幅は次のようになる：

$$\mathcal{M}(c \to su\bar{d}) \sim \cos^2\theta_C. \qquad (12.108)$$

すなわち，D^+ 崩壊の生成粒子の中では K 中間子が際立っている。一方，$D^+ \to K^+$ 崩壊は

$$\mathcal{M}(c \to \bar{s}ud) \sim \sin^2\theta_C \qquad (12.109)$$

であるから，Cabibbo 角のためずっと抑制される。こうして D^+ 崩壊の非常に特徴的な性質，たとえば，$K^-\pi^+\pi^+$ 崩壊は $K^+\pi^+\pi^-$ 崩壊に比べてずっと起こりやすいということがわかる。

問題 12.21 D^0 中間子 $(c\bar{u})$ の次の 3 種類の崩壊様式：$D^0 \to K^-\pi^+, \pi^-\pi^+, K^+\pi^-$ の相対的崩壊率を求めよ。

問題 12.22 $\Gamma(K^+ \to \pi^0 e^+ \nu) = 4\times10^6\,\mathrm{sec}^{-1}$ を既知として，$D^0 \to K^- e^+ \nu$ の崩壊率を計算し，それから D^0 中間子の寿命を求めよ。

問題 12.23 “傍観者(スペクテーター)” クォーク模型で考えると，チャーム中間子の寿命は次の関係を満足することを示せ：

$$\tau(D^0) = \tau(D^+) = \tau(F^+).$$

ここで F^+ は c クォークと $\bar{s}$ クォークから作られている (第 2 章参照)。

12.12 弱混合角

上に述べた Cabibbo-GIM の枠組は以下のようにに要約することができよう。荷電（あるいはフレーバーを変える）カレントは，u↔d′ あるいは c↔s′（左巻き）のようにクォークの状態間を結びつける。ここで d′ および s′ は，フレーバーの確定したクォーク d, s の物理的（すなわち質量の）固有状態の組み合わせで互いに直交している：

$$\begin{pmatrix} \mathrm{d}' \\ \mathrm{s}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta_\mathrm{C} & \sin\theta_\mathrm{C} \\ -\sin\theta_\mathrm{C} & \cos\theta_\mathrm{C} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{d} \\ \mathrm{s} \end{pmatrix}. \tag{12.110}$$

クォークの混合はパラメター1個だけ，すなわち Cabibbo 角 θ_C によって表される。

GIM が彼らの考えを提唱したそもそもの動機は，フレーバーは変えるが電荷は変えない遷移 s↔d は存在しないことを保証するためだった。ストレンジネスを変える中性カレントが存在しない，という実験的証拠はいかんとも動かし難い。そのため，たとえば $\mathrm{K}^0 \to \mu^+\mu^-$, $\mathrm{K}^+ \to \pi^+\mathrm{e}^+\mathrm{e}^-$, $\mathrm{K}^+ \to \pi^+\nu\bar{\nu}$ などの崩壊は，起こらないか，起こるにしても非常に抑制される。

それでは，GIM 機構はどのように働くのだろうか。それをみるには，(12.110) を次のように書きかえる：

$$d_i' = \sum_j U_{ij} d_j. \tag{12.111}$$

ここで $d_1 \equiv d_\mathrm{L}$, $d_2 \equiv s_\mathrm{L}$ であり，L は左巻きクォーク状態を意味する。(12.105) で導入した行列 U はユニタリーだから（ただし弱結合定数は普遍的と仮定して）

$$\begin{aligned} \sum_i \bar{d}_i' d_i' &= \sum_{i,j,k} \bar{d}_j U_{ji}^\dagger U_{ik} d_k \\ &= \sum_j \bar{d}_j d_j \end{aligned} \tag{12.112}$$

となる。つまり d→d および s→s という遷移だけが許されて，フレーバーを変える遷移 s↔d は禁止される。

GIM 機構をこれ以外のフレーバーも含むように拡張する前に，すぐに気がつく2つの疑問に答えておかなければならない。第一は，なぜ混合が d と s の間で起こるのかということである。実際，同じように混合が u と c の間で起こるように理論を作ることもできるではないか。クォーク波動関数の絶対位相が観測にかからない以上，両者の違いを見出すことはできないだろう。実は u, c の間, d, s の間にもっと複雑な混合を導入しても（クォーク状態の位相をうまく

選べば), (12.110) に与えられた 1 個のパラメターの形に帰着するのである。この点はもう少し先へいって明らかにしよう。

第二の質問は "なぜ Cabibbo 角に相当するものがレプトン部分：

$$\begin{pmatrix}\nu_e\\ e^-\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}\nu_\mu\\ \mu^-\end{pmatrix}$$

にはないのか" ということである。その理由は，もし ν_e も ν_μ も質量を持たなければ，レプトン混合は観測されないからである。Cabibbo 角に相当するような回転をしても，依然としてニュートリノ質量の固有状態のままである。定義によって ν_e を電子の相棒とする。これがレプトン数 L_e および L_μ の保存を保証する。ニュートリノの場合とは対照的に，弱い相互作用の固有状態である d′ および s′ は質量の固有状態ではなくて，(12.110) で関係づけられているのである。

さて Cabibbo-GIM の考えを，4 種以上のクォークフレーバーに拡張することを考えよう。さしあたり弱い相互作用は，左巻きクォークの 2 重項 N 個に作用するものとしよう：

$$\begin{pmatrix}u_i\\ d_i'\end{pmatrix}\qquad i=1,2,\cdots,N \tag{12.114}$$

ただし d_i' は質量の固有状態 d_i の混合である。すなわち

$$d_i'=\sum_{j=1}^{N}U_{ij}d_j. \tag{12.115}$$

U は N 行 N 列のユニタリー行列で，フレーバーを変える弱過程によって決定される。U は観測可能なパラメターを何個含むだろうか。物理的状態は変えずに，$2N$ 個のクォーク状態の位相をそれぞれ変化させることができる。したがって U は

$$N^2-(2N-1)$$

個の実数パラメターを含む。1 個位相を除いたのは，全体の位相を変えても U は不変だからである。一方，直交 N 行 N 列の行列は $N(N-1)/2$ 個の実数パラメターを持っている ((12.110) 参照)。したがって，クォークの位相を定義しなおして，U を実数にすることは一般にはできない。U は残りの位相因子

$$N^2-(2N-1)-\frac{1}{2}N(N-1)=\frac{1}{2}(N-1)(N-2) \tag{12.116}$$

個を持つことになる。こうして 2 重項 2 組 ($N=2$) の場合は実数パラメター 1 個だけ (θ_C) なのに対して，2 重項 3 組の場合は，3 個の実数パラメターと 1 個の位相因子 $e^{i\delta}$ が存在することになる。

実際，われわれは第 5 番目のクォークフレーバー，すなわち電荷 $Q=-1/3$

(第2章参照) のボトムクォーク b の決定的証拠を持っている。b と組になるべき電荷 $Q=2/3$ のトップクォーク t の存在も広く信じられている。† すると弱い相互作用は左巻きクォークの2重項3組

$$\begin{pmatrix} \mathrm{u} \\ \mathrm{d}' \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \mathrm{c} \\ \mathrm{s}' \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \mathrm{t} \\ \mathrm{b}' \end{pmatrix} \tag{12.117}$$

に働くことになる。

なぜクォークは対になって現れると期待すべきなのだろう。それには2つの理由がある。第一に，無理のない方法でフレーバーを変える中性カレントを抑制することができる。(12.112) に至る議論は，2重項2組の場合とまったく同様に3組の場合にもそのまま適用できる。第二の理由は，弱い相互作用に対してくり込み可能なゲージ理論を作りたいという希望と関係する (第14章および第15章参照)。それには異なる Feynman 図の間で，図 12·19 のフェルミオンループによる "異常 (anomalies)" ですぐ壊れてしまうような条件の微妙な相殺が必要とされる。くり込み可能な理論では，これらの異常は相殺されている。三角形図の1つ1つは $c_A{}^f Q_f{}^2$ に比例している。ここに Q_f は電荷，$c_A{}^f$ は弱中性カレントの軸ベクトル結合定数である。したがってレプトンの数 N とクォーク2重項の数が等しければ，異常は全体として

$$\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{1}{2}(0)^2-\frac{1}{2}(-1)^2+\frac{1}{2}N_c\left(+\frac{2}{3}\right)^2-\frac{1}{2}N_c\left(-\frac{1}{3}\right)^2\right)=0 \tag{12.118}$$

に比例する。上に用いた $c_A{}^f$ の値は次章で求める (表 13-2 参照)。こうして各

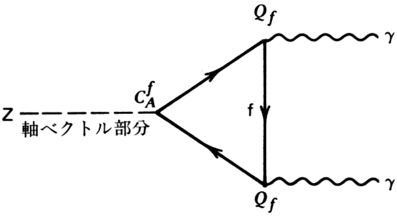


図 12·19 異常を生じる可能性のあるフェルミオン (クォークまたはレプトン) 三角形 Feynman 図

† (訳註) Fermi lab. の陽子-反陽子コライダー実験 (1.8 TeV) で CDF グループは遂にトップクォークを $\mathrm{p\bar{p}} \to \mathrm{t\bar{t}}$，$\mathrm{t} \to \mathrm{bW^+} \to 3$ jets，$\mathrm{\bar{t}} \to \mathrm{\bar{b}W^-}$，$\mathrm{\bar{b}} \to$ jet，$\mathrm{W^-} \to \mathrm{e^-}(\mu^-)\bar{\nu}_e(\bar{\nu}_\mu)$ により発見した。質量は 174±17 GeV (Phys. Rev. **D** (1994) 2966)。続いて同実験で D0 グループも確認した。

クォークに対してカラーを3と考えれば($N_C=3$)，異常は相殺される。レプトン2重項は3組あるから(電子，ミューオン，τ 粒子)，3組のクォーク2重項(12.117)を考えるのは自然であろう。

弱カレント(12.105)を新しいクォーク2重項に拡張するのは簡単だ：

$$J^{\mu}=(\bar{\mathrm{u}}\ \bar{\mathrm{c}}\ \bar{\mathrm{t}})\frac{\gamma^{\mu}(1-\gamma^{5})}{2}U\begin{pmatrix}\mathrm{d}\\ \mathrm{s}\\ \mathrm{b}\end{pmatrix}. \tag{12.119}$$

3行3列の混合行列 U には3個の実数パラメター(Cabibbo角に似た混合角)と1個の位相因子 $e^{i\delta}$ が含まれている((12.116)参照)。はじめてこのパラメターを導入したのはKobayashi(小林 誠)とMaskawa(益川敏英)である。位相 δ のおかげで，行列 U は(12.110)の2行2列の行列と違い複素行列になる。すなわちbクォークの発見によって，複素数の行列要素 U_{ij} が弱カレントに入ってきたのである。これは CP 不変性にとり重要な意味を持つことになるが，それについては次節で論じることにしよう。

2行2列のCabibbo行列の各要素が，クォークフレーバーの遷移に関する実験的情報からどのように決定されたかを前に示したが，3行3列の行列の行列要素も同様にして調べることができる。実験的現状は次のようにまとめてよいだろう：

$$U=\begin{bmatrix}|U_{\mathrm{ud}}|=0.973 & |U_{\mathrm{us}}|=0.23 & |U_{\mathrm{ub}}|\simeq 0\\ |U_{\mathrm{cd}}|\simeq 0.24 & |U_{\mathrm{cs}}|\simeq 0.97 & |U_{\mathrm{cb}}|\simeq 0.06\\ |U_{\mathrm{td}}|\simeq 0 & |U_{\mathrm{ts}}|\simeq 0 & |U_{\mathrm{tb}}|\simeq 1\end{bmatrix}. \tag{12.120}$$

ここで $|U|\simeq 0$ と書いたのは，行列要素は非常に小さいがまだ決定されていないという意味である。tクォークに関する実験的情報がない以上，未知の行列要素があるのは驚くにあたらない。(12.120)の結果がどのようにして得られたかについて，不完全ながら概略を示したのが表12-1である。(12.120)のもっとも著しい特徴は，対角要素 U_{ud}, U_{cs}, U_{tb} が明らかに主要な寄与をしているという点である。$|U_{\mathrm{cs}}|$ の値が大きいということは，チャーム粒子がストレンジ粒子に崩壊しやすいという実験事実を反映しているにすぎない。Bメソンはチャーム粒子に崩壊しやすい，という実験事実は $|U_{\mathrm{cb}}|>|U_{\mathrm{ub}}|$ を意味している。さらに(12.120)はTメソン(発見されれば)はBメソンに崩壊しやすいはずだということを示している。すべて以上のことは，重いクォーク状態の研究やTメソンの場合には，その検出に興味深い結果をもたらすであろう。とくに実験的に目立つ特徴は，次のような起こりやすい“カスケード”崩壊にみられる。すなわ

表 12-1　Kobayashi-Maskawa 行列の行列要素 $U_{qq'}$ の決定法のまとめ

行列要素	実験的情報
U_{ud}	β 崩壊，(12.107) を一般化する。
U_{us}	$K \to \pi e \nu$ およびハイペロンのセミレプトン崩壊。(12.101) に続く議論を一般化する。
U_{ub}	$b \to u e^- \bar{\nu}_e$，終状態に K メソンの出ない B メソン崩壊を探すと，$\lvert U_{ub}\rvert^2 < 0.02 \lvert U_{cb}\rvert^2$ となる。
U_{cd}	ニュートリノによるチャーム粒子の生成 $\nu_\mu d \to \mu^- c$.
U_{cs}	$\nu_\mu s \to \mu^- c$ および $D^+ \to \overline{K^0} e^+ \nu$, (12.108) 参照。$\lvert U_{cd}\rvert$ および $\lvert U_{cb}\rvert$ とともに，U のユニタリー条件 $\lvert U_{cd}\rvert^2 + \lvert U_{cs}\rvert^2 + \lvert U_{cb}\rvert^2 = 1$ による制限を受ける。
U_{cb}	B メソンの長い寿命 $\tau_B \sim 10^{-12}$sec と $\lvert U_{ub}\rvert$.
U_{tq}	ユニタリー条件による制限。

ち，終状態にレプトンが何個も (あるいはストレンジ粒子が) 存在するという特徴がある。

$$t \longrightarrow b e^+ \nu_e$$
$$\quad\ \ \llcorner\!\longrightarrow c e^- \bar{\nu}_e$$
$$\qquad\qquad \llcorner\!\longrightarrow s e^+ \nu_e$$

12.13　*CP* 不変性は成り立つか

CP 不変性を調べるために，まず弱過程反応の振幅，たとえば，クォークの散乱過程 $ab \to cd$ とその反粒子反応 $\bar{a}\bar{b} \to \bar{c}\bar{d}$ とを比較しよう。$ab \to cd$ として図 12・20 (a) の荷電弱カレント相互作用をとる。その振幅は

$$\begin{aligned}\mathcal{M} &\sim J_{ca}{}^{\mu} J_{\mu bd}{}^{\dagger} \\ &\sim (\bar{u}_c \gamma^\mu (1-\gamma^5) U_{ca} u_a)(\bar{u}_b \gamma_\mu (1-\gamma^5) U_{bd} u_d)^\dagger \\ &\sim U_{ca} U_{db}{}^{*} (\bar{u}_c \gamma^\mu (1-\gamma^5) u_a)(\bar{u}_d \gamma_\mu (1-\gamma^5) u_b)\end{aligned} \tag{12.121}$$

である。ここで $U_{bd}{}^\dagger = U_{db}{}^*$ の関係を用いた。$\mathcal{M}$ は $ab \to cd$, $\bar{c}\bar{d} \to \bar{a}\bar{b}$ のいずれをも表す (第 3 章の反粒子の記述を参照)。

他方，反粒子過程 $\bar{a}\bar{b} \to \bar{c}\bar{d}$ (または $cd \to ab$) に対する振幅 $\mathcal{M}'$ は次の通りである：

$$\begin{aligned}\mathcal{M}' &\sim (J_{ca}{}^{\mu})^\dagger J_{\mu bd} \\ &\sim U_{ca}{}^* U_{db} (\bar{u}_a \gamma^\mu (1-\gamma^5) u_c)(\bar{u}_b \gamma_\mu (1-\gamma^5) u_d).\end{aligned} \tag{12.122}$$

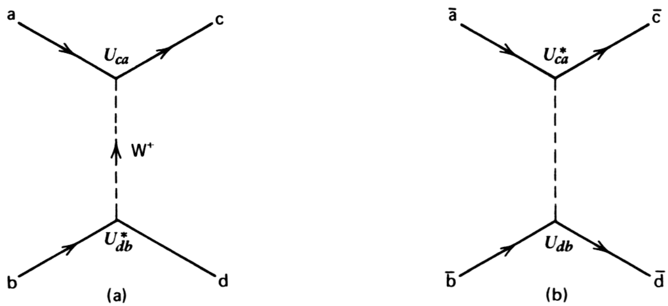


図 12·20 (a) 弱振幅 $\mathcal{M}(\mathrm{ab} \to \mathrm{cd})$ で表される過程，(b) (a) の Hermite 共役過程

すなわち

$$\mathcal{M}' = \mathcal{M}^\dagger$$

である。これは驚くにはあたらない。ハミルトニアンの Hermite 性から要求されることである。(4.6) と (4.17) を振り返ってみると，$\mathcal{M}$ は本質的にはこの過程の相互作用ハミルトニアンであることがわかる。全相互作用ハミルトニアンは $\mathcal{M}+\mathcal{M}^\dagger$ を含まなければならない。ただし，第 4 章の記述に従えば，$\mathcal{M}$ は遷移 $i \to f$ を，$\mathcal{M}^\dagger$ は遷移 $f \to i$ を記述する。

12.1 節で，弱い相互作用は *P* 不変性と *C* 不変性をともに破ることを知ったが，両者を組み合わせた演算 *CP* に対しては不変であるかもしれないという兆候があった。どうやって，理論の *CP* 不変性を確かめればよいのか。(12.121) の $\mathcal{M}(\mathrm{ab} \to \mathrm{cd})$ を用いて *CP* 変換した過程を記述する振幅 $\mathcal{M}_{CP}$ を計算して，ハミルトニアンが Hermite 性を保っているかどうかをみてみよう。もし保たれていれば，すなわち，もし

$$\mathcal{M}_{CP} = \mathcal{M}^\dagger$$

であれば，理論は *CP* 不変であるが，そうでなければ *CP* は破れている。

$\mathcal{M}_{CP}$ は *CP* 変換した Dirac スピノール

$$u_i \longrightarrow P(u_i)_C \quad (i = \mathrm{a}, \cdots, \mathrm{d}) \tag{12.123}$$

を (12.121) に代入して得られる。u_C は 5.4 節の荷電共役スピノールを表し

$$u_C = C\bar{u}^T \tag{12.124}$$

である。$\mathcal{M}_{CP}$ を作るには $\bar{u}_C$ が必要であり，$\gamma^\mu(1-\gamma^5)$ が C によってどう変換するかも知らなければならないことは明らかである。γ 行列の標準的な表示を

用いて

$$\bar{u}_C = -u^T C^{-1},$$
$$C^{-1}\gamma^\mu C = -(\gamma^\mu)^T, \qquad (12.125)$$
$$C^{-1}\gamma^\mu \gamma^5 C \ = +(\gamma^\mu \gamma^5)^T$$

が得られる。

問題 12.24　(5.39) を用いて (12.125) を証明せよ。

(12.123) の置き換えで，(12.121) のはじめの荷電カレントは，

$$\begin{aligned}(J_{\mathrm{ca}}{}^\mu)_C &= U_{\mathrm{ca}}(\bar{u}_{\mathrm{c}})_C \gamma^\mu(1-\gamma^5)(u_{\mathrm{a}})_C \\ &= -U_{\mathrm{ca}} u_c{}^T C^{-1}\gamma^\mu(1-\gamma^5)C\bar{u}_{\mathrm{a}}{}^T \\ &= U_{\mathrm{ca}} u_{\mathrm{c}}{}^T[\gamma^\mu(1+\gamma^5)]^T \bar{u}_{\mathrm{a}}{}^T \\ &= -U_{\mathrm{ca}}\bar{u}_{\mathrm{a}}\gamma^\mu(1+\gamma^5)u_{\mathrm{c}} \end{aligned} \qquad (12.126)$$

となる。上の手続きは，荷電共役電磁カレント (5.40) を求めるのに用いた手法とそっくりである。

(5.62) によってパリティ演算子は $P=\gamma^0$ だから，(5.9)－(5.11) を参照して

$$P^{-1}\gamma^\mu(1+\gamma^5)P = \gamma^{\mu\dagger}(1-\gamma^5)$$

となる。したがって

$$(J_{\mathrm{ca}}{}^\mu)_{CP} = -U_{\mathrm{ca}}\bar{u}_{\mathrm{a}}\gamma^{\mu\dagger}(1-\gamma^5)u_{\mathrm{c}}$$

が得られ，

$$\mathcal{M}_{CP} \sim U_{\mathrm{ca}}U_{\mathrm{db}}{}^*[\bar{u}_{\mathrm{a}}\gamma^\mu(1-\gamma^5)u_{\mathrm{c}}][\bar{u}_{\mathrm{b}}\gamma_\mu(1-\gamma^5)u_{\mathrm{d}}] \qquad (12.127)$$

となる。こうなると $\mathcal{M}_{CP}$ を (12.122) の $\mathcal{M}^\dagger$ と比較することができる。すなわち，行列 U の行列要素が実数ならば

$$\mathcal{M}_{CP} = \mathcal{M}^\dagger$$

が成り立ち，理論は CP 不変となる。4 クォーク (u, d, s, c) の段階で考えると，(12.106) の 2 行 2 列の行列 U は確かに実数だから理論は CP 不変である。ところが b (および t) クォークの出現で，行列 U は 3 行 3 列の Kobayashi-Maskawa (KM) 行列になる。行列は複素数因子 $e^{i\delta}$ を含むことになって，一般には

$$\mathcal{M}_{CP} \neq \mathcal{M}^\dagger$$

であり，理論は必然的に CP 不変性を破ってしまう。

実際，わずかの CP の破れが KM 行列が導入されるよりずっと前に実証されていた。この破れは中性 K メソンの崩壊の観測で発見されたのである。中性 K メソンは，小さな CP の破れの効果をみる独特の“窓”の役割を演じている。次節でそれを議論しよう。

12.14　*CP* 不変性の破れ：中性 K メソン系

中性 K メソンの観測は，素粒子物理学にいくつもの重要な発見をもたらした。確定した I_3 と Y を持った K^0 と $\overline{K^0}$ は強い相互作用で生成された状態である (第 2 章参照)。たとえば

$$\pi^- p \longrightarrow K^0 \Lambda,$$
$$\pi^+ p \longrightarrow \overline{K^0} K^+ p$$

がそれである。しかし，K^0 は 2 つの異なる寿命：

$$\begin{aligned} \tau(K_S{}^0 \to 2\pi) &= 0.9 \times 10^{-10}\ \text{sec}, \\ \tau(K_L{}^0 \to 3\pi) &= 0.5 \times 10^{-7}\ \text{sec} \end{aligned} \tag{12.128}$$

で崩壊することが実験でわかった。いいかえれば，強い相互作用で生成された K^0 は，弱崩壊を調べると 2 つの異なる粒子 ($K_S{}^0$ と $K_L{}^0$) として存在するようにみえる。$\overline{K^0}$ の場合にも同じ困難が現れる。したがって，K^0 と $\overline{K^0}$ は $K_S{}^0$ と $K_L{}^0$――寿命の短い 2π 崩壊様式および寿命の長い 3π 崩壊様式の粒子――の 2 つの異なる混合状態にほかならないという考えが提唱された。

軌道角運動量がなければ，2π 終状態と 3π 終状態とはそれぞれ $P=+1$ および $P=-1$ である。前にも述べたように，こうした考察が実際 1957 年の弱い相互作用におけるパリティの破れの発見に役立ったのである。かなり長い間弱い相互作用は，少なくとも C と P を組み合わせた CP 変換に対しては不変であると考えられていた。$|K^0\rangle$ と $|\overline{K^0}\rangle$ の位相を普通やるように

$$CP|K^0\rangle = |\overline{K^0}\rangle$$

と選ぶ。2π 終状態および 3π 終状態は，それぞれ CP の固有値 $+1$ および -1 の固有状態だから(問題 12.26 参照)，中性 K メソンの CP 固有状態を $K_S{}^0$ および $K_L{}^0$ と同定してもよいだろう：

$$\begin{aligned} |K_S{}^0\rangle &= \sqrt{\frac{1}{2}}(|K^0\rangle + |\overline{K^0}\rangle) \qquad [CP=+1], \\ |K_L{}^0\rangle &= \sqrt{\frac{1}{2}}(|K^0\rangle - |\overline{K^0}\rangle) \qquad [CP=-1]. \end{aligned} \tag{12.129}$$

非常によい近似でこれは正しい。しかし，1964 年に $K_L{}^0 \to \pi^+\pi^-$ の分岐比が 10^{-3} の程度であることが示された。したがって，小さな CP を破る効果が実際に存在したのだ。この実験と K^0 に関する他の実験のすぐれた要約は，たとえば Perkins (1982) にみることができる。

問題 12.25　光子は $C=-1$，したがって π^0 は $C=+1$ であることを示せ。
[ヒント]　$e\to -e$ としたとき，図1·9(a) に対応する振幅は符号を変える。

問題 12.26　角運動量がない状態では，$\pi^+\pi^-$ あるいは $\pi^0\pi^0$ 状態は CP の固有値 1 の固有状態であることを示せ。さらに，S 波の π^0 を加えて固有値 -1 の固有状態 $\pi^+\pi^-\pi^0$，あるいは $3\pi^0$ 状態が得られることを示せ。
[ヒント]　$\pi^+\pi^-$ 状態は Bose 統計により，π 中間子の交換に対して完全対称である。粒子交換は C に続いて P を作用することに対応する。

KM 行列の行列要素 U_{ij} に複素数が現れるのは，$S=\pm1$ の K^0 と $\overline{\mathrm{K}^0}$ 状態を混ぜる $\Delta S=2$ 遷移と関係しているかもしれない。その相互関係は単純ではない。図 12·21 は $\mathrm{K}^0-\overline{\mathrm{K}^0}$ 混合を引き起こす図である。u クォークと c クォーク交換だけを（4 クォーク理論で）考えるならば，$\mathrm{K}^0-\overline{\mathrm{K}^0}$ 混合は CP を保存し，その結果得られる質量行列は固有状態 (12.129) を持つが，それらの間の質量差は小さい。6 クォーク理論では質量の値がわずかに摂動を受けて，$|\mathrm{K}_S{}^0>$ および $|\mathrm{K}_L{}^0>$ は CP の正確な固有状態ではなくなる。結局のところ，初期宇宙における CP 非保存が，われわれの世界で観測される物質と反物質がみかけ上バランスを欠いている原因なのである。

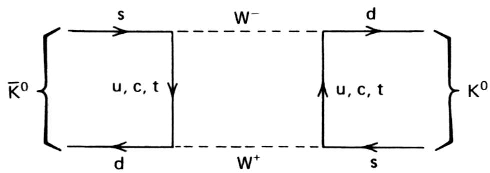


図 12·21　K^0-$\overline{\mathrm{K}^0}$ 混合に寄与する Feynman 図

13

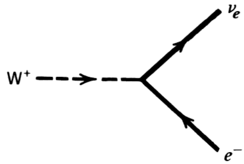
電弱相互作用

これまで議論してきた弱い相互作用の描像は表面的であって，満足とはいいかねるものであった。われわれは弱カレント間に交換される運動量移行が $|q^2| \ll (100\ \text{GeV})^2$ を満足する最低次の Feynman 図を計算しただけである。その結果は，質量を持った中間ベクトルボソン $W^\pm$ が存在するか否かには無関係であった。$W^\pm$ の存在は Fermi 結合定数 G を解釈しなおすにすぎない ((12.15) 参照)。ところが，最低次以上で何かを計算しようとすると，低エネルギー振幅は難問にぶつかる。長い間カレント・カレント相互作用は，正しい理論というよりは現象論的処方箋にすぎないと考えられていた。遅ればせながら重い弱ボソンの存在を仮定することは，まさに弱相互作用の現象論をまともな (くり込み可能な) 理論に転化させる第一歩であることがわかった。これは非 Abel ゲージ対称性の自発的破れが発見されるまでは不可能なことであった。この考えについては次章で述べる。ここでは，必要なことは弱カレントが対称群を作ることだ，とだけいっておけば十分だろう。これが目的だということを念頭において，弱い相互作用の話を続けよう。

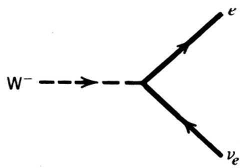
13.1 弱アイソスピンとハイパー荷

弱中性カレント (12.10 節の J_μ^{NC}) は，荷電カレント (J_μ および $J_\mu^\dagger$) とともに弱い相互作用の対称群を作ることができるだろうか。まず荷電カレントの形を思い起こしてみよう。

$$J_\mu \equiv J_\mu{}^{+} = \bar{u}_\nu \gamma_\mu \frac{1}{2}(1-\gamma^5)\, u_\mathrm{e} \equiv \bar{\nu}\, \gamma_\mu \frac{1}{2}(1-\gamma^5)\, e = \bar{\nu}_\mathrm{L}\, \gamma_\mu\, \mathrm{e}_\mathrm{L} \quad \Rightarrow \tag{13.1}$$



$$J_\mu{}^{\dagger} \equiv J_\mu{}^{-} = \bar{u}_\mathrm{e} \gamma_\mu \frac{1}{2}(1-\gamma^5)\, u_\nu \equiv \bar{\mathrm{e}}_\mathrm{L}\, \gamma_\mu\, \nu_\mathrm{L} \quad \Rightarrow$$



ここで肩の＋, －は, それぞれカレントの電荷の上げ下げを示す。添字 L は左巻きスピノールを意味し, 荷電カレントが V-A 型であることを示す。Dirac スピノールを表すのに, 記号的に粒子名をそのまま使った ($\bar{u}_\nu \equiv \bar{\nu}$, $u_\mathrm{e} \equiv \mathrm{e}$ など)。これら 2 つの荷電カレントを, もっともらしい 2 次元の形に書き換えることができる。2 重項

$$\chi_\mathrm{L} = \begin{pmatrix} \nu \\ \mathrm{e}^- \end{pmatrix}_\mathrm{L}, \tag{13.2}$$

および "昇降" 演算子 $\tau^{\pm} = (\tau_1 \pm i\tau_2)/2$

$$\tau_+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \tau_- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{13.3}$$

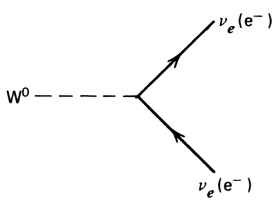
を導入しよう。ここで, τ は Pauli スピン行列である。すると荷電カレントは次のように書ける (x 依存性は (6.6) と同様)。

$$J_\mu{}^{+}(x) = \bar{\chi}_\mathrm{L}\, \gamma_\mu \tau_+ \chi_\mathrm{L}, \qquad J_\mu{}^{-}(x) = \bar{\chi}_\mathrm{L}\, \gamma_\mu \tau_- \chi_\mathrm{L}. \tag{13.4}$$

弱カレントが $SU(2)$ の構造を持つことを期待して, 次の形の弱カレントを導入する：

$$J_\mu{}^{3}(x) = \bar{\chi}_\mathrm{L}\, \gamma_\mu \frac{1}{2} \tau_3\, \chi_\mathrm{L} \tag{13.5}$$

$$= \frac{1}{2} \bar{\nu}_\mathrm{L}\, \gamma_\mu\, \nu_\mathrm{L} - \frac{1}{2} \bar{\mathrm{e}}_\mathrm{L}\, \gamma_\mu\, \mathrm{e}_\mathrm{L} \quad \Rightarrow \tag{13.6}$$



こうして弱カレントの "アイソスピン" 3 重項ができた：

$$J_\mu{}^i(x)=\bar{\chi}_L\gamma_\mu(1/2)\tau_i\chi_L. \qquad (i=1,2,3) \tag{13.7}$$

これに対応する電荷

$$T^i=\int J_0{}^i(x)\,d^3x \tag{13.8}$$

は $SU(2)_L$ 代数を生成する。すなわち，

$$[T^i, T^j]=i\varepsilon_{ijk}T^k. \tag{13.9}$$

$SU(2)_L$ の添字 L は弱アイソスピンカレントが左巻きフェルミオンとだけ相互作用することを示す。上で導入したカレント $J_\mu{}^3$ を，そのまま 12.10 節の弱中性カレントと同定できるだろうか。これはうまい考えだが，残念ながらそうはいかないことはすぐわかる。実験で観測される弱中性カレント $J_\mu{}^{NC}$ は右巻き成分を持っているが ((12.97) 参照)，電磁カレントは左巻き，右巻きの両成分を持った中性カレントである。たとえば電子についてみれば，(6.35) から次のように表すことができる：

$$j_\mu{}^{em}(x)=-\bar{\mathrm{e}}\gamma_\mu\mathrm{e}=-\bar{\mathrm{e}}_R\gamma_\mu\mathrm{e}_R-\bar{\mathrm{e}}_L\gamma_\mu\mathrm{e}_L. \tag{13.10}$$

ここで $j_\mu{}^{em}$ の定義には，結合定数 e が含まれていない点に注意されたい。これで電弱相互作用の議論が簡単になる。(6.5) の電磁カレント j_μ は

$$j_\mu\equiv ej_\mu{}^{em}=e\bar{\psi}\gamma_\mu Q\psi \tag{13.11}$$

と書くことができる。ここで，Q は電荷演算子で，電子の場合，固有値は -1 である。専門用語でいえば，Q は電磁相互作用の $U(1)_{em}$ 対称群の生成演算子である (14.2 節参照)。

$SU(2)_L$ 対称性を救うために，$j_\mu{}^{em}$ を取り入れようというわけだ。ここで注意しておかなければいけないことは，中性カレント $J_\mu{}^{NC}$，電磁カレント $j_\mu{}^{em}$ はいずれも $SU(2)_L$ 対称性に従わないことである。しかし，アイディアは，$SU(2)_L$ に対して一定の変換性を持つ 2 つの直交する組み合わせを作ろうというのである。その 1 つは $J_\mu{}^3$ であって，これで弱アイソスピン 3 重項 $J_\mu{}^i$ を完成させ，第二は $SU(2)_L$ 変換に対して不変な $j_\mu{}^Y$ である (弱アイソスピン 1 重項)。$j_\mu{}^Y$ は弱ハイパー荷カレントと呼ばれ，

$$j_\mu{}^Y=\bar{\psi}\gamma_\mu Y\psi \tag{13.12}$$

で与えられる。弱ハイパー荷 Y の定義は

$$Q=T^3+Y/2 \tag{13.13}$$

である。すなわち

$$\boxed{j_\mu{}^{em}=J_\mu{}^3+j_\mu{}^Y/2.} \tag{13.14}$$

Q が群 $U(1)_{em}$ を生成するように，ハイパー荷演算子 Y は対称群 $U(1)_Y$ を生成する。こうして電磁相互作用を取り込んで，その結果，対称群は $SU(2)_L \times U(1)_Y$ に拡張されたわけである。ある意味で，われわれは電磁相互作用と弱い相互作用を統一したのだ。しかし，1 つだけの対称群で統一されたのではなく，2 つの群であって，それぞれ独立な結合定数を持っている。したがって，電弱相互作用を完全に決めるには，e の他にもう 1 つ結合定数が要る。審美的観点からすれば，この統一は完全に満足なものとは言いがたいだろう (15.7 節参照)。

以上述べた弱アイソスピンと弱ハイパー荷の考えは，数学的には $SU(2)$ のハドロンアイソスピン多重項でストレンジ粒子を整理した Gell-Mann- 西島のやり方とまったく同じである (2.9 節参照)。"弱アイソスピン" とか "弱ハイパー荷" という名前もこの類似に由来する。

$SU(2)_L \times U(1)_Y$ をはじめて提唱したのは Glashow であって (1961)，弱中性カレントの発見よりずっと前のことであった。第 15 章で述べるが，重いベクトルボソン ($W^{\pm}, Z^0$) がうまく納まるように拡張したのは，Weinberg (1967) と Salam (1968) であった。電弱相互作用は "標準模型" と呼ばれることが多い。

対称群が積になっているから，生成演算子 Y と T^i は可換でなければならない。したがって，アイソスピン多重項のメンバーのハイパー荷はすべて等しい。たとえば，電子多重項に対して (13.14) は

$$\begin{aligned} j_\mu{}^Y &= 2j_\mu{}^{em} - 2J_\mu{}^3 \\ &= -2(\bar{e}_R \gamma_\mu e_R + \bar{e}_L \gamma_\mu e_L) - (\bar{\nu}_L \gamma_\mu \nu_L - \bar{e}_L \gamma_\mu e_L) \\ &= -2(\bar{e}_R \gamma_\mu e_R) - 1(\bar{\chi}_L \gamma_\mu \chi_L) \end{aligned} \tag{13.15}$$

となる。ここで (13.6), (13.10) を用いた。すなわち，アイソスピン 2 重項 $(\nu, e)_L$ は $Y=-1$，アイソスピン 1 重項 e_R は $Y=-2$ である。これらの量子数を，表 13-1 にまとめた。

クォークをこの枠に取り入れるのは容易だ。弱アイソスピンカレント $J_\mu{}^i$ は，左巻きクォーク 2 重項 $(u, d)_L$ とだけ相互作用する。q_L は $T=1/2$，q_R は $T=0$

表 13-1 レプトンとクォークの弱アイソスピンとハイパー荷量子数

レプトン	T	T^3	Q	Y	クォーク	T	T^3	Q	Y
ν_e	1/2	1/2	0	−1	u_L	1/2	1/2	2/3	1/3
e_L^-	1/2	−1/2	−1	−1	d_L	1/2	−1/2	−1/3	1/3
					u_R	0	0	2/3	4/3
e_R^-	0	0	−1	−2	d_R	0	0	−1/3	−2/3

と決める。

問題 13.1　表 13-1 のクォークの量子数を確かめよ。

13.2　基本的電弱相互作用

電磁相互作用と弱い相互作用を完全に統一するためには，(12.13) および (12.85) で与えられるカレント・カレント型の弱い相互作用を修正しなければならない。カレント・カレント相互作用は，運動量移行の小さい，重いベクトルボソン交換による有効相互作用であると仮定する。

6.1 節で QED を，相互作用

$$-ie(j^{em})^{\mu}A_{\mu} \tag{13.16}$$

を基礎として展開した。電磁カレントと光子との相互作用とまったく同様に，13.1 節の電弱カレントはベクトルボソンと相互作用すると仮定する。"標準模型" を構成しているのは，弱アイソスピンカレント $J_{\mu}{}^{i}$ と強さ g で相互作用するアイソスピン 3 重項 $W_{\mu}{}^{i}$，弱ハイパー荷カレント $j_{\mu}{}^{Y}$ と強さ $g'/2$ で相互作用する 1 個のベクトル場 B_{μ} である。したがって基本的な電弱相互作用は

$$\boxed{-ig(J^{i})^{\mu}W_{\mu}{}^{i}-i\frac{g'}{2}(j^{Y})^{\mu}B_{\mu}} \tag{13.17}$$

である。場

$$W_{\mu}{}^{\pm}=\frac{1}{\sqrt{2}}(W_{\mu}{}^{1}\mp iW_{\mu}{}^{2}) \tag{13.18}$$

は質量を持った荷電ボソン $W^{\pm}$ を記述する。一方，$W_{\mu}{}^{3}$ と B_{μ} は中性の場である。基本的相互作用を図 13･1 に示す。

電磁相互作用 (13.16) は (13.17) の中にちゃんと取り込まれている。事実，ボソン

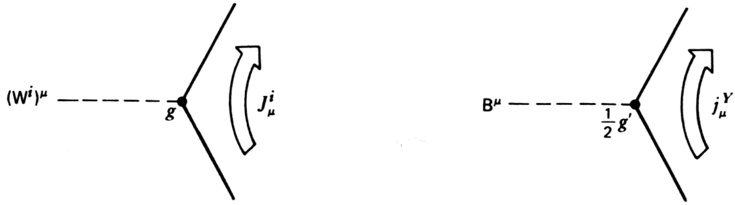


図 13･1　弱アイソスピンカレントおよびハイパー荷カレントとベクトルボソンの結合

の質量を対称性の破れ（第15章参照）によって生成すれば，２つの中性の場 $W_\mu{}^3$ と B_μ は混じって，物理的状態（質量の固有状態）は次のように表される：

$$A_\mu = B_\mu \cos\theta_W + W_\mu{}^3 \sin\theta_W \qquad (\text{質量 } 0), \tag{13.19}$$

$$Z_\mu = -B_\mu \sin\theta_W + W_\mu{}^3 \cos\theta_W \qquad (\text{有限質量}). \tag{13.20}$$

ここで，θ_W を Weinberg 角，または弱混合角と呼ぶ（ただし，最初にこの考えを導入したのは Glashow であった）。したがって，電弱中性カレント相互作用は

$$-igJ_\mu{}^3(W^3)^\mu - i\frac{g'}{2}j_\mu{}^Y B^\mu = -i\left(g\sin\theta_W J_\mu{}^3 + g'\cos\theta_W \frac{j_\mu{}^Y}{2}\right)A^\mu$$

$$-i\left(g\cos\theta_W J_\mu{}^3 - g'\sin\theta_W \frac{j_\mu{}^Y}{2}\right)Z^\mu \tag{13.21}$$

のように書くことができる。第１項が電磁相互作用 (13.16) である。したがって，括弧内の表式は (13.14) により

$$ej_\mu{}^{em} = e\left(J_\mu{}^3 + \frac{1}{2}j_\mu{}^Y\right) \tag{13.22}$$

となるはずである。したがって

$$\boxed{g\sin\theta_W = g'\cos\theta_W = e} \tag{13.23}$$

である。すなわち，(13.19)，(13.20) の混合角は，２つの独立な群の結合定数の比 $\tan\theta_W = g'/g$ によって与えられる。

(13.22) と (13.23) を使うと，(13.21) の弱中性カレントは次の形に書くことができる。

$$-i\frac{g}{\cos\theta_W}(J_\mu{}^3 - \sin^2\theta_W j_\mu{}^{em})Z^\mu \equiv -i\frac{g}{\cos\theta_W}J_\mu{}^{\mathrm{NC}}Z^\mu. \tag{13.24}$$

中性カレント J^{NC} と弱アイソスピンカレント $\boldsymbol{J}$ を関係づけるのは，次の定義である：

$$\boxed{J_\mu{}^{\mathrm{NC}} \equiv J_\mu{}^3 - \sin^2\theta_W j_\mu{}^{em}.} \tag{13.25}$$

弱い相互作用の話のはじめのところで，恐らく弱い相互作用は新しい基本的相互作用ではなくて，電磁相互作用の１つの現れなのだろうと推測した。また，この電弱相互作用の統一は，結合定数の関係を $g=e$ とすることによって達成されるのではないかと示唆した。しかし，今やこの単純な統一像は正しくないことがわかった。標準模型の関係は

$$g\sin\theta_W = g'\cos\theta_W = e$$

であって，もっと複雑である。電磁相互作用（結合定数 e の $U(1)$ ゲージ対称

性）は，弱アイソスピン（結合定数 g の $SU(2)_L$ 対称性）と弱ハイパー荷（結合定数 g' の $U(1)$ 対称性）とにまたがった位置を占めている。これらのゲージ対称性は第 14, 15 章で議論しよう。(13.23) を使えば，2 つの結合定数 g と g' は e と θ_W で置き換えられる。ただし，θ_W は実験から決めることができる。

こうして，観測される中性カレントをそれぞれ，対称群 $SU(2)_L$ および $U(1)_Y$ に属するカレント $J_\mu{}^3$ および $j_\mu{}^Y$ で表すという目的は達せられた。すなわち

$$
\begin{aligned}
j_\mu{}^{em} &= J_\mu{}^3 + \frac{1}{2} j_\mu{}^Y, \\
J_\mu{}^{NC} &= J_\mu{}^3 - \sin^2\theta_W j_\mu{}^{em}.
\end{aligned}
\tag{13.26}
$$

$J_\mu{}^{NC}$ の右巻き成分と $\sin^2\theta_W j_\mu{}^{em}$ の右巻き成分とが打ち消し合って，$SU(2)_L$ の純粋な左巻き成分 $J_\mu{}^3$ だけが残るように作られている。ただし $\sin^2\theta_W$ は実験から決められる。もちろん，この模型が成功するためには，電弱相互作用が関与するすべての現象において，同じ $\sin^2\theta_W$ の値が得られなければならない。

13.3 有効カレント・カレント相互作用

話を先へ進める前に，基本的相互作用と，第 12 章でずっと使っていたカレント・カレント構造の弱い相互作用との関係をつけなければならない。第 12 章では，荷電カレントの現象は不変振幅

$$
\mathcal{M}^{CC} = \frac{4G}{\sqrt{2}} J^\mu J_\mu{}^\dagger \tag{13.27}
$$

によって説明できた（(12.13) 参照）。(13.7) の新しいアイソスピンの記号を使えば，

$$
J_\mu \equiv J_\mu{}^+ = \bar{\chi}_L \gamma_\mu \tau_+ \chi_L = \frac{1}{2}(J_\mu{}^1 + iJ_\mu{}^2) \tag{13.28}
$$

である。

相互作用が重い荷電ボソン交換で媒介されるとすれば，6.2 節の QED の方法によって $\mathcal{M}$ を計算することができる。図 13·2 は 図 6·2 の類推とみることができる。まず，(13.17) の基本的荷電カレント相互作用を次の形に書き換えよう：

$$
-i\frac{g}{\sqrt{2}}(J^\mu W_\mu{}^+ + J^{\mu\dagger} W_\mu{}^-). \tag{13.29}
$$

ここで恒等式

$$
\frac{1}{2}(\tau_1 W^1 + \tau_2 W^2) = \sqrt{\frac{1}{2}}(\tau_+ W^+ + \tau_- W^-) \tag{13.30}
$$

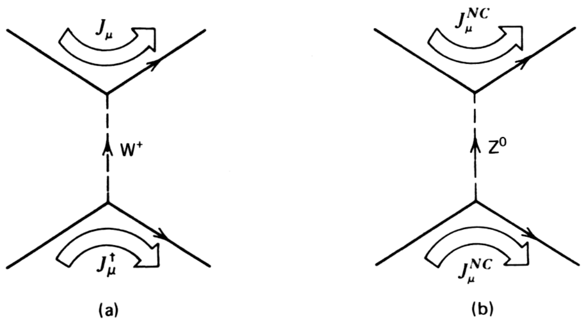


図 13·2 (a) 荷電弱カレント，(b) 中性弱カレント

を用いた。ここで $W^\pm$ は (13.18) で与えられている。次に，(6.8) を導いた QED の手法を踏襲して

$$\mathcal{M}^{CC}=\left(\frac{g}{\sqrt{2}}J_\mu\right)\left(\frac{1}{M_W{}^2}\right)\left(\frac{g}{\sqrt{2}}J^{\mu\dagger}\right) \tag{13.31}$$

が得られる。$1/M_W{}^2$ は W の伝播関数の小さい q^2 に対する近似である (6.17 節参照)。(13.31) と (13.27) を比較して

$$\frac{G}{\sqrt{2}}=\frac{g^2}{8M_W{}^2} \tag{13.32}$$

を得る。同様にして，中性カレント過程の振幅を Z 交換で表すことができる (図 13·2 (b))。$|q|^2 \ll M_Z{}^2$ の場合，(13.24) を用いて，中性カレント振幅は

$$\mathcal{M}^{NC}=\left(\frac{g}{\cos\theta_W}J_\mu{}^{NC}\right)\left(\frac{1}{M_Z{}^2}\right)\left(\frac{g}{\cos\theta_W}J^{NC\mu}\right) \tag{13.33}$$

となる。(13.33) と (12.85) のカレント・カレント型の不変振幅

$$\mathcal{M}^{NC}=\frac{4G}{\sqrt{2}}2\rho J_\mu{}^{NC}J^{NC\mu} \tag{13.34}$$

を比較すれば

$$\rho\frac{G}{\sqrt{2}}=\frac{g^2}{8M_Z{}^2\cos^2\theta_W} \tag{13.35}$$

の関係が得られる。

(13.32), (13.35) から，パラメーター ρ を求めることができる。これは中性カレントと荷電カレントの相対的強さを決めるパラメーターで，次式で与えられる：

$$\boxed{\rho=\frac{M_W{}^2}{M_Z{}^2\cos^2\theta_W}.} \tag{13.36}$$

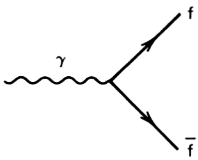
実験的には小さい誤差の範囲で $\rho=1$ が成り立っている。この値は Weinberg-Salam 模型からも予言できる (第 15 章参照)。

13.4　電弱相互作用の Feynman 則

電弱相互作用の Feynman 則 ($-i\mathcal{M}$ に対して) は，QED の手法に従って求めることができる。6.1 節で示したように，電磁相互作用

$$-ie(j^{em})^{\mu}A_{\mu}=-ie(\bar{\psi}\gamma^{\mu}Q\psi)A_{\mu} \tag{13.37}$$

にはバーテックスに因子

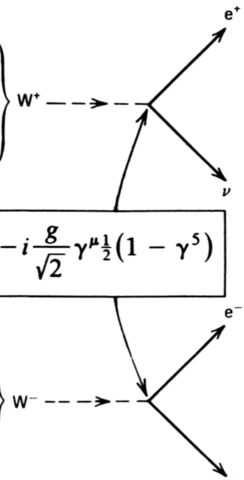


$$\boxed{-ieQ_f\gamma^{\mu}} \tag{13.38}$$

が対応する。ここで，Q_f はフェルミオン f の電荷で，電子は $Q_f=-1$ である。本来なら，出ていく $\bar{\mathrm{f}}$ は入ってくる f として図示すべきであろう。6.17 節と同様，フェルミオンを表す線にはスピノールが対応する。

(13.29) の荷電カレントに対して上の手法をそのまま適用してみよう。

$$-i\frac{g}{\sqrt{2}}(\bar{\chi}_L\gamma^{\mu}\tau_{+}\chi_L)W_{\mu}^{+} = -i\frac{g}{\sqrt{2}}(\bar{\nu}_L\gamma^{\mu}e_L)W_{\mu}^{+}$$



$$\boxed{-i\frac{g}{\sqrt{2}}\gamma^{\mu}\tfrac{1}{2}(1-\gamma^5)} \tag{13.39}$$

$$-i\frac{g}{\sqrt{2}}(\bar{\chi}_L\gamma^{\mu}\tau_{-}\chi_L)W_{\mu}^{-} = -i\frac{g}{\sqrt{2}}(\bar{e}_L\gamma^{\mu}\nu_L)W_{\mu}^{-}$$

電弱相互作用では $\chi_L=(\nu_e, e^-)$ に対して，上記のバーテックス因子が対応し，フェルミオンの外線には QED と同様にスピノールが対応する。$W^{\pm}$ との相互

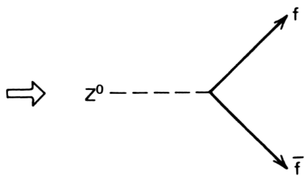
作用のバーテックス因子は，他の フェルミオン 2 重項 (ν_μ, μ^-), (u, d′) などに対しても同じである。

$Z \to f\bar{f}$ の中性カレント相互作用は (13.24) で与えられる：

$$-i\frac{g}{\cos\theta_W}(J_\mu{}^3 - \sin^2\theta_W\, j_\mu{}^{em})\, Z^\mu =$$

$$-i\frac{g}{\cos\theta_W}\bar{\psi}_f\gamma^\mu\left[\frac{1}{2}(1-\gamma^5)\,T^3 - \sin^2\theta_W Q\right]\psi_f Z_\mu. \qquad (13.40)$$

バーテックス因子は，次のような一般的な形で書くのが普通である：



$$\boxed{-i\frac{g}{\cos\theta_W}\gamma^\mu\frac{1}{2}(c_V{}^f - c_A{}^f\gamma^5).} \qquad (13.41)$$

(13.40) と (13.41) を比較すればわかるように，$\sin^2\theta_W$ の値が与えられれば，ベクトル結合定数 c_V と擬ベクトル結合定数 c_A は標準模型で決定される。その値は

$$c_V{}^f = T_f{}^3 - 2\sin^2\theta_W\, Q_f,$$
$$c_A{}^f = T_f{}^3 \qquad (13.42)$$

である。$T_f{}^3$, Q_f は，それぞれ弱アイソスピンの第 3 成分およびフェルミオンの電荷を表す。c_V と c_A の値を表 13-2 にまとめておこう。

表 13-2 標準模型における $Z \to f\bar{f}$ バーテックス因子 (13.41) ($\sin^2\theta_W = 0.234$)

f	Q_f	$c_A{}^f$	$c_V{}^f$
$\nu_e, \nu_\mu, \cdots$	0	1/2	1/2
$e^-, \mu^-, \cdots$	−1	−1/2	$-1/2 + 2\sin^2\theta_W \simeq -0.03$
u, c, ⋯	2/3	1/2	$1/2 - (4/3)\sin^2\theta_W \simeq 0.19$
d, s, ⋯	−1/3	−1/2	$-1/2 + (1/3)\sin^2\theta_W \simeq -0.34$

Feynman 則を使って，標準模型による $W^\pm$ や Z^0 の崩壊の性質を予言することができる。これについては次の問題 13.2〜13.6 を参照されたい。

問題 13,2 ベクトルボソン X が 2 個のスピン 1/2 のフェルミオン f_1, f_2 に崩壊するバーテックス因子が

$$-ig_X\gamma^\mu\frac{1}{2}(c_V-c_A\gamma^5)$$

ならば

$$\Gamma(X\to f_1\bar{f}_2)=\frac{g_X{}^2}{48\pi}(c_V{}^2+c_A{}^2)M_X \tag{13.43}$$

となることを示せ。ここで，M_X はボソンの質量で，フェルミオンの質量は無視する。
ヒント　(6.93) を用いて，フェルミオンのスピンについて加え，ボソンのスピンについて平均すると

$$\overline{|\mathscr{M}|^2}=\frac{1}{12}g_X{}^2(c_V{}^2+c_A{}^2)(-g_{\mu\nu})\mathrm{Tr}(\gamma^\mu \not{k}\,\gamma^\nu \not{k}') \tag{13.44}$$

となることを示せ。ここで，k, k' はフェルミオンの 4 元運動量である。ボソン静止系で計算して (4.37) を用いよ。

問題 13.3　標準模型の相互作用を仮定して，問題 13.2 を参照し

$$\Gamma(Z\to\nu_e\bar{\nu}_e)=\frac{g^2}{96\pi\cos^2\theta_W}M_Z \tag{13.45}$$

を示せ。$\sin^2\theta_W=0.25$，$M_Z=90$ GeV が与えられたとして，$Z\to\nu_e\bar{\nu}_e$ の部分幅を数値的に求めよ。

問題 13.4　Z の 3 種の崩壊様式 $Z\to e^+e^-, \bar{u}u, \bar{d}d$ の部分幅を計算せよ。これを用いて $\sin^2\theta_W=1/4, M_Z=90$ GeV を仮定し，標準模型による Z の全崩壊幅を求めよ。カラーの自由度を忘れないように注意せよ。

問題 13.5　$W^+\to e^+\nu_e$ の崩壊様式に対して，$M_W=80$ GeV として，問題 13.3 と同様の計算をせよ。

問題 13.6　W^+ の 2 種の崩壊様式 $W^+\to\bar{d}u, \bar{s}u$ の部分幅を，(12.102), (12.103) の Feynman 図によって計算せよ。また標準模型による W^+ の崩壊幅を求めよ。

13.5　ニュートリノ・電子散乱

$\nu_\mu e^-$ および $\bar{\nu}_\mu e^-$ 弾性散乱は，中性カレント相互作用を通してしか起こらない (図 13・3 参照)。カレント・カレント型相互作用による $\nu_\mu e^-\to\nu_\mu e^-$ の不変振

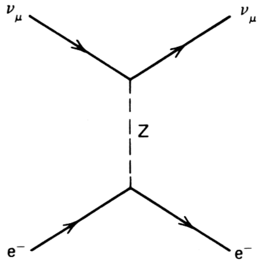


図 13・3　中性カレント相互作用 $\nu_\mu e^-\to\nu_\mu e^-$

幅は，(12.84) で表される νq → νq 散乱と同様に

$$\mathcal{M}^{\mathrm{NC}}(\nu\mathrm{e}\to\nu\mathrm{e})=\frac{G_{\mathrm{N}}}{\sqrt{2}}[\bar{\nu}\gamma^{\mu}(1-\gamma^5)\nu][\bar{e}\gamma_{\mu}(c_V{}^{\mathrm{e}}-c_A{}^{\mathrm{e}}\gamma^5)e] \tag{13.46}$$

である。ここで，$G_{\mathrm{N}}=\rho G\simeq G$ ((12.88) 参照)。事実，電子・ミューオン普遍性を仮定すれば，4 種類の弾性散乱過程 $\nu_{\mu}\mathrm{e}^-$, $\bar{\nu}_{\mu}\mathrm{e}^-$, $\nu_{\mathrm{e}}\mathrm{e}^-$, $\bar{\nu}_{\mathrm{e}}\mathrm{e}^-$ は，すべて 2 つのパラメター $c_V=c_V{}^{\mathrm{e}}$ と $c_A=c_A{}^{\mathrm{e}}$ で説明することができる。

問題 13.7　νe → νe 散乱が Z 交換で起こるとすれば，バーテックス因子に (13.41) を用いた Feynman 則によって (13.46) が得られることを示せ。とくに，ボソン伝播関数 (6.17 節参照) を用いて，(13.46) は 4 元運動量移行 q が $|q^2|\ll M_Z{}^2$ の場合に対応することを確かめよ。

(13.46) が νq → νq の場合とまったく同じ形をしているとすれば，12.10 節の結果を使って $\nu_{\mu}\mathrm{e}^-\to\nu_{\mu}\mathrm{e}^-$ の断面積を求めることができる。すなわち，(12.90), (12.91) を参照して次の結果を得る：

$$\frac{d\sigma(\nu_{\mu}\mathrm{e})}{dy}=\frac{G_{\mathrm{N}}{}^2 s}{4\pi}[(c_V+c_A)^2+(c_V-c_A)^2(1-y)^2]. \tag{13.47}$$

y について 0 から 1 まで積分して

$$\sigma(\nu_{\mu}\mathrm{e}\to\nu_{\mu}\mathrm{e})=\frac{G_{\mathrm{N}}{}^2 s}{3\pi}(c_V{}^2+c_V c_A+c_A{}^2). \tag{13.48}$$

$\bar{\nu}_{\mu}\mathrm{e}^-\to\bar{\nu}_{\mu}\mathrm{e}^-$ に対しては，(13.47) および (13.48) で $c_A\to-c_A$ と置き換えればよい。すなわち

$$\sigma(\bar{\nu}_{\mu}\mathrm{e}\to\bar{\nu}_{\mu}\mathrm{e})=\frac{G_{\mathrm{N}}{}^2 s}{3\pi}(c_V{}^2-c_V c_A+c_A{}^2). \tag{13.49}$$

問題 13.8　(13.47) が成り立つのは $m^2/s\ll1$ のときである。もし電子の質量を無視することができない場合には，(13.47) に

$$-G^2m^2y(c_V{}^2-c_A{}^2)/2\pi$$

という項が余分に加わることを示せ。

$\nu_{\mathrm{e}}\mathrm{e}^-\to\nu_{\mathrm{e}}\mathrm{e}^-$ は，荷電カレントと中性カレントの干渉という興味をそそる可能性を提供してくれる (図 13·4 参照)。図 13·4 (a) の振幅は (13.46) の $\mathcal{M}^{\mathrm{NC}}$ で $\nu=\nu_{\mathrm{e}}$ としたものである。(b) は荷電カレントで

$$\mathcal{M}^{\mathrm{CC}}=-\frac{G}{\sqrt{2}}[\bar{e}\gamma^{\mu}(1-\gamma^5)\nu_{\mathrm{e}}][\bar{\nu}_{\mathrm{e}}\gamma_{\mu}(1-\gamma^5)e] \tag{13.50}$$

となる。(13.46) と符号が異なるのは，出ていくレプトンが入れかわっているた

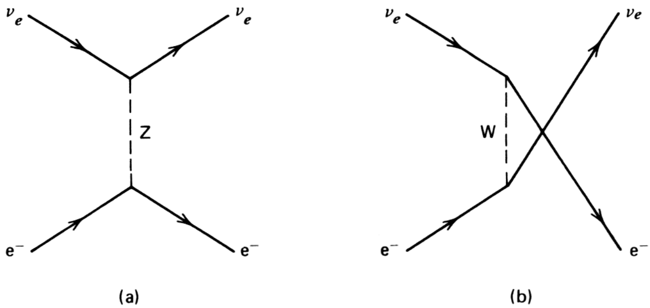


図 13·4　$\nu_e e^- \to \nu_e e^-$ における (a) 中性カレント相互作用および (b) 荷電カレント相互作用

めである ((6.9) 参照)。Fierz の組み換え定理を用いて，(13.50) を次のように書き換えることができる (たとえば，Bailin (1982) 参照)：

$$\mathcal{M}^{\mathrm{CC}}=\frac{G}{\sqrt{2}}[\bar{\nu}_{\mathrm{e}}\gamma^{\mu}(1-\gamma^5)\nu_{\mathrm{e}}][\bar{\mathrm{e}}\gamma_{\mu}(1-\gamma^5)e]. \tag{13.51}$$

問題 13.9　(13.51) が (13.50) から導かれることを示せ。スピノールの組み換えに対する不変性は V-A 相互作用の重要な性質である。双 1 次共変量のスカラー積の組み換えはずっと複雑である。それに答えるのが Fierz の定理である。

振幅 $\mathcal{M}(\nu_e e^- \to \nu_e e^-)$ は，図 13·4 の 2 つの Feynman 図に対応する $\mathcal{M}^{\mathrm{NC}}$ と $\mathcal{M}^{\mathrm{CC}}$ の和である。$\rho=1$ とすれば $G_{\mathrm{N}}=G$ ((12.88) 参照) で，$\mathcal{M}=\mathcal{M}^{\mathrm{NC}}+\mathcal{M}^{\mathrm{CC}}$ となる。ただし (13.46) の c_V, c_A は

$$c_V \longrightarrow c_V+1, \qquad c_A \longrightarrow c_A+1 \tag{13.52}$$

と置き換える。こうして弾性散乱 $\nu_e e^- \to \nu_e e^-$ および $\bar{\nu}_e e^- \to \bar{\nu}_e e^-$ の断面積は，上の置き換えをして (13.48) および (13.49) で表される。

ニュートリノ・電子散乱の断面積の値を，c_V-c_A 面上で楕円で表すことがある。図 13·5 は最近の実験値を示したものである。3 つの “実験値から決められた楕円” は互いに交わって，2 つの解が可能になる。c_A が主にきいている解は

$$\begin{aligned} c_A{}^{\mathrm{e}}&=-0.52\pm0.06,\\ c_V{}^{\mathrm{e}}&=0.06\pm0.08 \end{aligned} \tag{13.53}$$

で，$\sin^2\theta_{\mathrm{W}} \sim 1/4$ とした標準模型とよく合っている (表 13-2 参照)。

しかし，$\sin^2\theta_{\mathrm{W}}$ の一番よい決定法は，ニュートリノ・核子過程の包含反応，および終状態粒子をすべて観測する反応の実験データの解析である。現存するデータすべてを合わせるように解析した結果，最近の値として

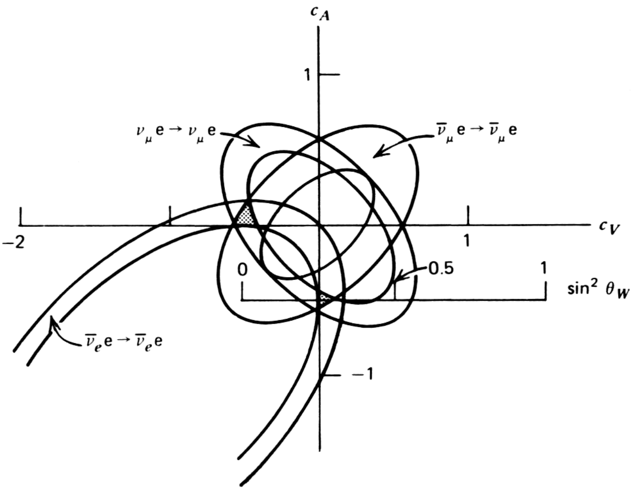


図 13·5　ニュートリノ・電子散乱データによる (13.40) の，パラメター c_V および c_A の決定。図は Hung と Sakurai (1981) より転載。原子炉のビームは $\bar{\nu}_e$ だけなので ν_e の実験データはない。

$$\begin{aligned} \sin^2\theta_W &= 0.234 \pm 0.013, \\ \rho &= 1.002 \pm 0.015 \end{aligned} \tag{13.54}$$

が得られている。

13.6　陽電子・電子消滅における電弱相互作用の干渉

1958 年に Bludman がはじめて弱中性カレントの存在を推測したすぐ後に，Zel'dovich は非常に簡単な考えで，電磁相互作用の振幅 $\mathcal{M}^{EM} \sim e^2/k^2$ と，弱い相互作用のわずかな寄与との干渉から生ずる非対称性の大きさを評価した。Zel'dovich の予言は

$$\frac{|\mathcal{M}^{EM}\mathcal{M}^{NC}|}{|\mathcal{M}^{EM}|^2} \approx \frac{G}{e^2/k^2} \approx \frac{10^{-4}k^2}{m_N{}^2} \tag{13.55}$$

である。ここで $G \approx 10^{-5}/m_N{}^2$ および $e^2/4\pi = 1/137$ を用いている。

高エネルギー電子・陽電子衝突ビームは，こういう干渉効果をみるのにお誂向きである。電子・陽電子衝突は電磁相互作用 (γ)，あるいは弱中性カレント相互作用 (Z) を通して起こる (たとえば，図 13·6 参照)。電子・陽電子ビームの

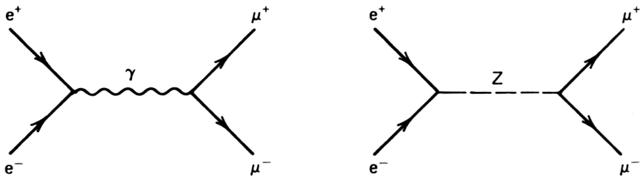


図 13·6 $e^+e^- \to \mu^+\mu^-$ に対する電磁相互作用および弱相互作用の寄与

エネルギーをそれぞれ 15 GeV とすれば，$k^2 \simeq s=(30\ \mathrm{GeV})^2$ だから，(13.55) によれば 10% の効果である。それなら十分実験にかかる。

$e^+e^- \to \mu^+\mu^-$ に対して詳しい予言をするために，中性カレント相互作用は (13.42) によって，フェルミオンと相互作用する Z ボソン によって引き起こされると仮定する。6.17 節の Feynman 則を用いて，図 13·6 に対応する振幅 $\mathcal{M}^\gamma$ および $\mathcal{M}^Z$ は次で与えられる：

$$\mathcal{M}_\gamma = -\frac{e^2}{k^2}(\bar{\mu}\gamma^\nu\mu)(\bar{e}\gamma_\nu e), \tag{13.56}$$

$$\mathcal{M}_Z = -\frac{g^2}{4\cos^2\theta_W}[\bar{\mu}\gamma^\nu(c_V{}^\mu - c_A{}^\mu\gamma^5)\mu]\left(\frac{g_{\nu\sigma}-k_\nu k_\sigma/M_Z{}^2}{k^2-M_Z{}^2}\right)[\bar{e}\gamma^\sigma(c_V{}^e - c_A{}^e\gamma^5)e]. \tag{13.57}$$

ここで，k は仮想 γ (Z) の 4 元運動量で，$s \simeq k^2$ である。電子・ミューオン普遍性を仮定すれば c_V, c_A の上つき添字 μ, e は不要だが，結果はそのまま $e^+e^- \to q\bar{q}$ ($c^q \neq c^\mu$) に読みかえられるので，ここでは添字をつけておこう。レプトンの質量は無視する。したがって，入射陽電子の Dirac 方程式は $(k_\sigma/2)\bar{e}\gamma^\sigma=0$ となり，伝播関数の分子も簡単になって $g_{\nu\sigma}$ だけが残る。すると (13.57) は，(13.32) と $\rho=1$ とした (13.36) を用いて次のように書くことができる：

$$\mathcal{M}_Z = \frac{-\sqrt{2}\,GM_Z{}^2}{s-M_Z{}^2}[c_R{}^\mu(\bar{\mu}_R\gamma^\nu\mu_R)+c_L{}^\mu(\bar{\mu}_L\gamma^\nu\mu_L)]\times [c_R{}^e(\bar{e}_R\gamma_\nu e_R)+c_L{}^e(\bar{e}_L\gamma_\nu e_L)]. \tag{13.58}$$

ここで

$$c_R \equiv c_V - c_A, \quad c_L \equiv c_V + c_A \tag{13.59}$$

とおいた。したがって

$$c_V - c_A\gamma^5 = (c_V - c_A)\frac{1}{2}(1+\gamma^5)+(c_V+c_A)\frac{1}{2}(1-\gamma^5)$$

と書くことができる。$(1\pm\gamma_5)/2$ は射影演算子である ((5.78) 参照)。これを使え

ば，$\mathcal{M}_Z$ を右巻きスピノールと左巻きスピノールで表すことができる。こうすると $|\mathcal{M}_\gamma+\mathcal{M}_Z|^2$ が楽に計算できる。電子とミューオンのヘリシティーが決まっていれば，6.5 節, 6.6 節でやった $e^+e^- \to \mu^+\mu^-$ に対する QED の計算結果をそのまま使うことができる。たとえば，

$$\begin{aligned}\frac{d\sigma(e_L{}^-e_R{}^+ \to \mu_L{}^-\mu_R{}^+)}{d\Omega}&=\frac{\alpha^2}{4s}(1+\cos\theta)^2|1+rc_L{}^\mu c_L{}^e|^2,\\ \frac{d\sigma(e_L{}^-e_R{}^+ \to \mu_R{}^-\mu_L{}^+)}{d\Omega}&=\frac{\alpha^2}{4s}(1-\cos\theta)^2|1+rc_R{}^\mu c_L{}^e|^2\end{aligned} \tag{13.60}$$

が得られる ((6.39), (6.32) 参照)。ここで r は (13.58) と (13.56) の括弧の前の係数の比である。すなわち

$$r=\frac{\sqrt{2}\,GM_Z{}^2}{s-M_Z{}^2+iM_Z\Gamma_Z}\left(\frac{s}{e^2}\right). \tag{13.61}$$

Z の共鳴幅を入れたが，これはエネルギー $s\sim M_Z{}^2$ で重要になる ((2.56) の $\chi(E)$ に $1/(E+M)$ を乗じたものに対応する)。

他のもう 2 つのヘリシティー状態に対しても, (13.60) と同様な結果が得られる。無偏極 $e^+e^- \to \mu^+\mu^-$ の断面積を計算するには，4 つの可能なヘリシティー L, R の組み合わせについて平均すればよい。すなわち

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}=\frac{\alpha^2}{4s}[A_0(1+\cos^2\theta)+A_1\cos\theta]. \tag{13.62}$$

電子・ミューオン普遍性 $c_i{}^e=c_i{}^\mu\equiv c_i$ を仮定すれば，A_0, A_1 は次式で与えられる：

$$\begin{aligned}A_0&\equiv 1+\frac{1}{2}\mathrm{Re}(r)(c_L+c_R)^2+\frac{1}{4}|r|^2(c_L{}^2+c_R{}^2)^2\\ &=1+2\,\mathrm{Re}(r)c_V{}^2+|r|^2(c_V{}^2+c_A{}^2)^2,\end{aligned} \tag{13.63}$$

$$\begin{aligned}A_1&\equiv \mathrm{Re}(r)(c_L-c_R)^2+\frac{1}{2}|r|^2(c_L{}^2-c_R{}^2)^2\\ &=4\,\mathrm{Re}(r)c_A{}^2+8|r|^2c_V{}^2c_A{}^2.\end{aligned} \tag{13.64}$$

QED の最低次の結果 ($A_0=1, A_1=0$) は対称な角分布を与えるが，弱い相互作用のために前後方非対称が生ずる ($A_1\neq 0$)。

$$A_{FB}=\frac{F-B}{F+B},\ \text{ただし}\quad F=\int_0^1\frac{d\sigma}{d\cos\theta}d\cos\theta,\ \ B=\int_{-1}^0\frac{d\sigma}{d\cos\theta}d\cos\theta \tag{13.65}$$

によって積分非対称度を定義して，その大きさを計算しよう。

(13.62) を積分すれば，$s\ll M_Z{}^2$ ($|r|\ll 1$) のとき

$$A_{FB}=\frac{A_1}{(8A_0/3)}\simeq\frac{3}{2}\mathrm{Re}(r)c_A{}^2\simeq-\frac{3c_A{}^2}{\sqrt{2}}\left(\frac{Gs}{e^2}\right) \tag{13.66}$$

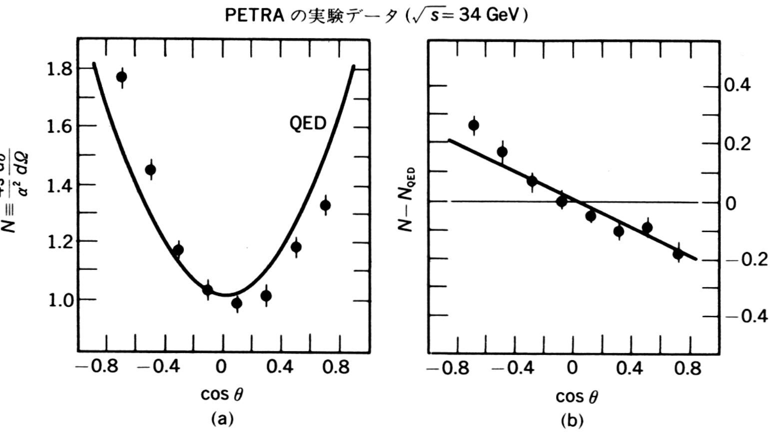


図 13·7 (a) $e^+e^- \to \mu^+\mu^-$ 過程の θ 分布は QED の予言 $1+\cos^2\theta$ に従わない。(b) データと QED の予言の喰い違いは仮想 Z と仮想 γ からの寄与の干渉で説明できる (R. Marshall)。

となる。これは (13.55) から期待される Gs/e^2 の程度という答えと一致する。非対称度は, $s \ll M_Z{}^2$ では衝突電子・陽電子ビームのエネルギーの 2 乗に比例して大きくなる。

(13.62) を高エネルギー $e^+e^- \to \mu^+\mu^-$ の角分布の実験値 (図 13·7 参照) と比較するには, 標準模型の結合定数 ($c_A=-1/2$, $c_V=(-1/2)+2\sin^2\theta_W \simeq 0$) を使えばよいだろう。理論は実験とよく合っている。$c_V \simeq 0$ なので, この実験データは $\sin^2\theta_W$ を正確に決定するのには役立たない。

(13.62) を $d\Omega$ について積分すれば

$$\sigma(e^+e^- \to \mu^+\mu^-) = \frac{\alpha^2}{4s}\left(2\pi\frac{8}{3}A_0\right) = \left(\frac{4\pi\alpha^2}{3s}\right)A_0 \equiv \sigma_0 A_0. \qquad (13.67)$$

ここで σ_0 は (6.33) の QED の断面積である。すなわち

$$\frac{\sigma(e^+e^- \to \mu^+\mu^-)}{\sigma_0} \equiv R_\mu = 1+2\,\mathrm{Re}(r)\,c_V{}^2 + |r|^2(c_V{}^2+c_A{}^2)^2. \qquad (13.68)$$

問題 13.10 標準模型の相互作用を用いて, $s=M_Z{}^2$ のときの R_μ を計算せよ。ただし $\sin^2\theta_W=1/4$, $M_Z=90$ GeV, および $\Gamma_Z=2.5$ GeV とせよ。

$e^+e^- \to \bar{q}q$ に対する電弱相互作用の影響を知りたいと思うのは当然だろう。だがそれは, $c_{V,A}{}^q \neq c_{V,A}{}^\mu$ のため $e^+e^- \to \mu^+\mu^-$ の場合とは同じにならない。しかし, 計算は上とまったく同じである。たとえば (13.60) に対応するのは次式で

ある：

$$\frac{d\sigma(\mathrm{e_R}^+\mathrm{e_L}^- \to \mathrm{q_R}^+\mathrm{q_L}^-)}{d\Omega} = 3\frac{\alpha^2}{4s}(1+\cos\theta)^2|Q_\mathrm{q}+\gamma c_\mathrm{L}{}^\mathrm{q} c_\mathrm{L}{}^\mathrm{e}|^2. \qquad (13.69)$$

ここで Q_q はクォークの電荷，3 はカラー因子である。前と同様な計算をして，(13.68) と似た結果

$$\frac{\sigma(\mathrm{e^+e^-} \to \bar{\mathrm{q}}\mathrm{q})}{\sigma_0} \equiv R_\mathrm{q} = 3[Q_\mathrm{q}{}^2 + 2Q_\mathrm{q}\mathrm{Re}(r)c_V{}^\mathrm{q}c_V{}^\mathrm{e} + |r|^2(c_V{}^{\mathrm{q}2}+c_A{}^{\mathrm{q}2})(c_V{}^{\mathrm{e}2}+c_A{}^{\mathrm{e}2})] \qquad (13.70)$$

を得る。

問題 13.11 問題 13.10 にならって，$s=M_Z{}^2$ のとき R_u および R_d を計算せよ。それを用いて Z の共鳴エネルギーにおける $\sigma(\mathrm{e^+e^-} \to$ ハドロン) を求めよ。

問題 13.10, 13.11 からわかるように，R の値は 100〜1000 程度になる。したがって中性カレント相互作用が Z ボソン交換で起こるとすれば，ビームエネルギーが $E \sim M_Z/2$ では σ_0 に比べてずっと大きい断面積が期待される。これこそジュネーブの CERN で現在建設中の，新しい 50 GeV + 50 GeV 電子・陽電子衝突型加速器 (LEP) に対する大きな動機だった。$M_Z \sim 90$ GeV だから，この新しい衝突型加速器では Z ボソンがたくさん作られ，その性質や崩壊粒子の性質も，ハドロン衝突で作られる場合のような，まぎらわしいバックグランドのないきれいな状態で調べることができる。

13.7 電弱相互作用の干渉効果をみる他の実験

電磁相互作用と弱中性カレント相互作用の干渉から生ずるパリティの破れの効果をみようという実験がいくつか行われた。

その 1 つに，原子遷移でパリティの破れの効果をみるというデリケートな実験がある。それは，原子内の電子と原子核の間の Z 交換が，Coulomb ポテンシャルを変更するのではないか，という考えに基づくのである。ちょっと考えると，この効果を実験的に検出するのは絶望的とも思える。(13.55) によれば，その効果の大きさは

$$\frac{Gk^2}{e^2} \simeq \frac{10^{-4}k^2}{m_\mathrm{p}{}^2} \simeq \frac{10^{-4}}{m_\mathrm{p}{}^2R^2} \simeq 10^{-15} \qquad (13.71)$$

程度である。ここで R は代表的な原子半径で 〜 1Å である。ところが，高次の電磁的禁止転移を考え，原子番号 Z の大きい原子を用いると (事実，干渉効果

は Z^3 に比例する)，上の数値をずっと大きくすることができる。この一般的方法は，パリティを破る干渉項 $c_V{}^{\mathrm{e}} c_A{}^{\mathrm{q}}$ と $c_A{}^{\mathrm{e}} c_V{}^{\mathrm{q}}$ で誘起された透過レーザー光の光学的回転を測定するのである。

もう 1 つは，縦偏極した電子と原子核の非弾性散乱で，パリティ非保存から生ずるきわめて小さい非対称性を観測する実験である。非対称度を次で定義しておく：

$$A=\frac{\sigma_{\mathrm{R}}-\sigma_{\mathrm{L}}}{\sigma_{\mathrm{R}}+\sigma_{\mathrm{L}}}. \tag{13.72}$$

ここで σ_{R} は $d\sigma(\mathrm{e_R\,N}\to \mathrm{e_R\,X})/dy$ で，$\mathrm{e_R}$ は右巻き電子 ($\lambda=+1/2$) である。実験室系では，$y=(E-E')/E$ は電子のエネルギー損失比であった。非対称度が 0 でないということは，まさしくパリティの破れを示している。(13.55) から，γ 交換と Z 交換の干渉による非対称度は

$$A\sim\frac{Gk^2}{e^2}\sim\frac{10^{-4}}{m_{\mathrm{p}}{}^2}\,k^2$$

の程度である。ここで，k は交換されるボソンの 4 元運動量である。

電子の深非弾性散乱 eN → eX の非対称度はパートン模型で予言できる。N をアイソスカラー標的とすれば (問題 13.12 参照)，非対称度は

$$A=\frac{6}{5}\left(\frac{\sqrt{2}\,Gk^2}{e^2}\right)\left(a_1+a_2\frac{1-(1-y)^2}{1+(1-y)^2}\right). \tag{13.73}$$

ここで

$$\begin{aligned} a_1&=c_A{}^{\mathrm{e}}(2c_V{}^{\mathrm{u}}-c_V{}^{\mathrm{d}}),\\ a_2&=c_V{}^{\mathrm{e}}(2c_A{}^{\mathrm{u}}-c_A{}^{\mathrm{d}}) \end{aligned} \tag{13.74}$$

である。c は中性カレントの結合定数で，(13.41) と表 13-2 に与えられている。非対称度を k^2 と y の関数として測定すれば，係数 a_1 と a_2 を決定することができる。実験は偏極電子と重陽子および偏極 $\mu^{\pm}$ と炭素核の散乱で行われた。その結果は，標準模型の予言と一致し，他の実験データから得られた $\sin^2\theta_{\mathrm{W}}$ の値とも一致したのである。

問題 13.12 (13.73) を確かめよ。$k^2\ll M_Z{}^2$，u クォークの数と d クォークの数は等しく (アイソスカラー標的)，反クォークは無視できる，ということを仮定する。すると，標準模型では

$$\begin{aligned} a_1&=-\frac{3}{4}\left(1-\frac{20}{9}\sin^2\theta_{\mathrm{W}}\right),\\ a_2&=-\frac{3}{4}(1-4\sin^2\theta_{\mathrm{W}}) \end{aligned} \tag{13.75}$$

であることを示せ。

[ヒント] $e^+e^- \to \mu^+\mu^-$ の場合と同様，ヘリシティーの決まった状態を使うのがよい。たとえば，電子・クォークの重心系で次の関係が得られる：

$$\frac{d\sigma(e_R u_L \to e_R u_L)}{d\Omega} = \frac{\alpha^2}{4s}(1+\cos\theta)^2 |Q_u + r c_R{}^e c_L{}^u|^2. \tag{13.76}$$

ここで $r = -\sqrt{2}\ Gk^2/e^2$ ((13.60), (13.61) 参照)。(13.76) をパートン模型の (不変) 変数 y を用いて書き直し，$1-y=(1+\cos\theta)/2$ を用いればよい ((9.25) 参照)。

14

ゲージ対称性

14.1　ラグランジアンと1粒子波動方程式

理論物理学におけるもっとも深い洞察の1つは，相互作用が対称性によって規定されるということであろう。Einstein はこの考えに内在する予言能力を最高度に発揮させ，一般座標変換に対する不変性（と同時に等価原理）を考慮することにより，一般相対性理論に到達したのであった。いま信じられていることは，すべての素粒子間の相互作用は，いわゆる局所ゲージ対称性によって規定されるということだろう。これは，電荷やカラーなど保存する物理量は，単に大局的のみならず，空間の各点各点で保存されるという考えと密接に関係している。

対称性と保存則の間の関係を論ずるには，これまで出てこなかったが，† ラグランジアン (Lagrangian) を用いる場の理論がもっとも適当である。読者はおそらく古典力学で，粒子の運動方程式が Lagrange 関数から導かれるということはよくご存じだろう（たとえば Goldstein (1951) 参照）：

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)-\frac{\partial L}{\partial q_i}=0. \tag{14.1}$$

ここで q_i は粒子の一般座標，t は時間で，$\dot{q}_i=dq_i/dt$ である。ラグランジアンは

$$L=T-V \tag{14.2}$$

であり，T，V はそれぞれ系の運動エネルギーとポテンシャルエネルギーを表す。この形式は粒子系のようなとびとびの系から，連続的に変化する座標によって表される連続体の系にそのまま拡張できる。ラグランジアンは

† 本書では素粒子の相互作用を扱う理論形式は，もっぱら1粒子波動方程式を用いてきた。第3章と第7章でそれを詳しく述べたが，1粒子波動方程式を慣習的にそのまま多粒子系に用いている。

$$L(q_i,\ \dot{q}_i,\ t)\ \longrightarrow\ \mathcal{L}\left(\phi,\ \frac{\partial\phi}{\partial x_\mu},\ x_\mu\right) \tag{14.3}$$

となる。場の量 ϕ 自身が連続的なパラメター x_μ の関数であって，(14.1) は次の Euler-Lagrange 方程式となる：

$$\frac{\partial}{\partial x_\mu}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial\phi/\partial x_\mu)}\right)-\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi}=0. \tag{14.4}$$

$\mathcal{L}$ はラグランジアン密度で

$$L=\int\mathcal{L}\,d^3x \tag{14.5}$$

である。以後，慣習に従って $\mathcal{L}$ 自身をラグランジアンと呼ぶ。

問題 14.1　ラグランジアンを用いた理論形式に馴れていない読者は，たとえば，Goldstein (1977) を参照するか，Sakurai (1967) 3 頁の例題を丁寧に勉強されたい。

相対論的波動方程式を書き下すことはせずに，ラグランジアン $\mathcal{L}$ を 1 つ選ぶことにしよう。$\mathcal{L}$ が Lorentz スカラーならば，(14.4) に代入して得られる運動方程式は共変的である。たとえば，ラグランジアンとして

$$\mathcal{L}=\frac{1}{2}(\partial_\mu\phi)(\partial^\mu\phi)-\frac{1}{2}m^2\phi^2 \tag{14.6}$$

を (14.4) に代入すれば，Klein-Gordon 方程式が得られる：

$$\partial_\mu\partial^\mu\phi+m^2\phi\equiv(\Box^2+m^2)\phi=0. \tag{14.7}$$

これは，別に不思議なことをしているわけではない。$\mathcal{L}$ はとくに (14.7) を再現するように選んだのである。

問題 14.2　Dirac 方程式はラグランジアン

$$\mathcal{L}=i\bar{\psi}\gamma_\mu\partial^\mu\psi-m\bar{\psi}\psi \tag{14.8}$$

から導かれることを確かめよ。ただし，ψ および $\bar{\psi}$ の 4 成分のそれぞれは独立な場の変数である。

問題 14.3　ラグランジアン

$$\mathcal{L}=-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}-j^\mu A_\mu \tag{14.9}$$

を A_μ に対する Euler-Lagrange 方程式に代入すれば，(6.57) の Maxwell 方程式

$$\partial_\mu F^{\mu\nu}=j^\nu \tag{14.10}$$

が得られることを示せ。ここで，$F^{\mu\nu}=\partial^\mu A^\nu-\partial^\nu A^\mu$ である。これから，電流の保存 $\partial_\nu j^\nu=0$ が成り立つことを示せ。

問題 14.4　(14.9) のラグランジアンに $m^2A_\mu A^\mu/2$ という項をつけ加えると，運動方程式は

$$(\Box^2+m^2)A^\mu=j^\mu$$

となることを示せ。つまり付加項は光子の質量に寄与している。しかし，14.3 節でやるように，これはゲージ不変性によって禁止される。光子の質量は 0 である。

ラグランジアンを使ったやり方と，1 粒子波動方程式から得られた Feynman 則に基づく方法の間にはどんな関係があるのだろう。ラグランジアンの一つ一つに 1 組の Feynman 則が対応する。したがって，いったんこの対応関係を同定すれば両者の関係がつくから，物理量を計算するには，第 4，5 章でやった方法通りにやりさえすればよい。

両者の同定関係は次の通りである：

1. ラグランジアンの各項に 1 組の伝播関数とバーテックス因子を対応させる。
2. 伝播関数は場の量について 2 次の項により決定される。すなわち，ラグランジアンの中の ϕ^2 や $\bar{\psi}\psi$ などを含む項で，たとえば，$(\partial_\mu\phi)^2/2-m^2\phi^2/2$，$\bar{\psi}(i\gamma_\mu\partial^\mu-m)\psi$ である。すると伝播関数は 6.10 節の方法を使って Euler-Lagrange 方程式から決定される。
3. ラグランジアンに含まれているその他の項には，相互作用バーテックスを対応させる。Feynman 則のバーテックス因子は，相互作用する場を含むラグランジアン $\mathcal{L}$ の中の対応する項の係数そのものである。QED はこの簡単な例を提供してくれる。14.3 節でわかるが，(14.9) の第 2 項は電子・光子相互作用を表す。電子カレントは $j^\mu=-e\bar{\psi}\gamma^\mu\psi$ で与えられる ((5.17) 参照)。したがって，$\mathcal{L}$ の中の相互作用項は
$$i\mathcal{L}=\cdots+ie\bar{\psi}\gamma^\mu\psi A_\mu$$
である。相互作用している場 $\bar{\psi}\psi A$ の係数 $ie\gamma^\mu$ が，QED でおなじみのバーテックス因子であることがわかる (第 6 章参照)。

場の量子論で正当的に取り扱うとすれば，以上のような主張を形式的に導くという手順を踏むことになるだろう。それには古典的ラグランジアンを量子化しなくてはならない。ψ や A_μ のような場は，粒子の生成消滅を記述する演算子になる。相互作用は $i\mathcal{L}$ に含まれている相互作用ラグランジアン $i\mathcal{L}_{\text{int}}$ に関する摂動級数によって計算することができる。この長い形式的な手続きの最終結果は，これまでとまったく同じ 1 組の Feynman 則に翻訳することができる。したがってこのルールを採用し，すでによく知っている方法を使って，あるラグランジアンが持つ物理的意味を追求すればよいだろう。昔は正準形式のほうがより厳密な理論と考えられていて，いろいろな教科書で扱われている (初歩

的なものとしては，Mandl (1966)，Muirhead (1965)，Sakurai (1967) 参照)。本書では正準形式の場の理論は使わないから，それにはふれないでおく。むしろ，"図形のほうが，基礎にある理論形式よりも多くの真理を含む" ('t Hooft and Veltman (1973)) という信仰が次第に広まっているということを認めなければなるまい。

14.2 Noether の定理：対称性と保存則

空間内の並進，時間推進，回転，Lorentz 変換に対する不変性から，運動量，エネルギー，角運動量の保存が導かれる。ここで興味があるのは，これらの保存則ではなくて，"内部" 対称性の変換に対する性質である。この変換によって，時空の性質の違った場が互いに混り合うことはない (つまり，この変換は波動関数の時空成分と可換である)。

たとえば，電子は複素場で記述される。そのラグランジアン (14.8) を調べてみると，位相変換

$$\psi(x) \longrightarrow e^{i\alpha}\psi(x) \tag{14.11}$$

に対して不変であることがわかる。ここで，α は実定数である。これは

$$\partial_\mu\psi \longrightarrow e^{i\alpha}\partial_\mu\psi, \tag{14.12}$$

$$\bar{\psi} \quad \longrightarrow e^{-i\alpha}\bar{\psi} \tag{14.13}$$

に注意すれば容易に確かめられるだろう。

位相変換の集まり $U(\alpha) \equiv e^{i\alpha}$ は $U(1)$ 群として知られるユニタリー Abel 群を作る。ただし，α は連続的にすべての実数値をとることができる。Abel 群は掛け算に関して可換である：

$$U(\alpha_1)U(\alpha_2) = U(\alpha_2)U(\alpha_1). \tag{14.14}$$

読者諸君はひょっとすると，$\mathcal{L}$ が $U(1)$ 不変であることをわざわざ注意しなくてもいいではないか，と思うかもしれない。いや，そんなことはない。Noether の定理によって，この不変性は保存カレントの存在を意味する。これをみるには，$\mathcal{L}$ が無限小 $U(1)$ 変換

$$\psi \longrightarrow (1 + i\alpha)\psi \tag{14.15}$$

に対して不変であることを示せば十分である。不変ということは，上の変換をしたとき，$\mathcal{L}$ は変わらないということである。

$$0=\delta\mathcal{L}=\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\psi}\delta\psi+\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\psi)}\delta(\partial_\mu\psi)+\delta\bar{\psi}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\bar{\psi}}+\delta(\partial_\mu\bar{\psi})\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\bar{\psi})}$$

$$=\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\psi}(i\alpha\psi)+\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\gamma_\mu\psi)}(i\alpha\partial_\mu\psi)+\cdots$$

$$=i\alpha\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\psi}-\partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\psi)}\right)\right]\psi+i\alpha\partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\psi)}\psi\right)+\cdots. \tag{14.16}$$

[　] 内は ψ に対する Euler-Lagrange 方程式 (14.4) により 0 である。$\bar{\psi}$ に関しても同様。したがって, (14.16) は (14.8) を使えば保存カレントの式になる：

$$\partial_\mu j^\mu=0, \tag{14.17}$$

ただし

$$j^\mu=\frac{ie}{2}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\psi)}\psi-\bar{\psi}\frac{\partial\mathcal{L}}{(\partial_\mu\bar{\psi})}\right)=-e\bar{\psi}\gamma^\mu\psi. \tag{14.18}$$

係数は, j^μ が電荷 $-e$ の 1 個の電子の電流・電荷密度に一致するように選んである ((5.17) 参照)。(14.17) から電荷

$$Q=\int d^3xj^0$$

は, $U(1)$ 位相不変により保存量でなければならない。

問題 14.5　$dQ/dt=0$ を証明せよ。

問題 14.6　複素スカラー場のラグランジアン

$$\mathcal{L}=(\partial_\mu\phi)^*(\partial^\mu\phi)-m^2\phi^*\phi \tag{14.19}$$

が $U(1)$ 位相不変であれば, 保存カレント

$$j^\mu=-ie(\phi^*\partial^\mu\phi-\phi\partial^\mu\phi^*) \tag{14.20}$$

が存在することを示せ。また, これを (3.25) と比較せよ。複素場 $\phi=(\phi_1+i\phi_2)/\sqrt{2}$ に対するラグランジアン (14.19) は規格化されているから

$$\mathcal{L}(\phi)=\mathcal{L}(\phi_1)+\mathcal{L}(\phi_2)$$

が成り立つことに注意せよ。ここに $\mathcal{L}(\phi_i)$ は実場 ϕ_i に対するラグランジアンで, (14.6) で与えられる。

物理屋の観点からすれば, 対称性が存在するということは, ある量について確定した測定値が得られないことを意味する。たとえば, 並進不変は, 空間内で絶対的な位置を決定できないことを示す。同様に (14.11) は, α が測定できないこと, つまり物理的意味を持たないから, 勝手な値に選ぶことができることを示している。α は定数である。したがって, いったんそれを決めてしまえば, 全時空点で決まった 1 つの値をとることになる。これを大局的ゲージ不変という (位相不変というべきところを歴史的に誤称されてそのままになっている)。

もちろんこれはもっとも一般的な不変性ではない。なぜなら，α が時空の点ごとに違った値をとりうる，すなわち $\alpha=\alpha(x)$ とすればもっと一般的だからである。

14.3 $U(1)$ 局所ゲージ不変性と QED

前節の最後に述べたのは，(14.11) をより一般的な変換

$$\psi(x) \longrightarrow e^{i\alpha(x)}\psi(x) \tag{14.21}$$

に拡張すべきだということである。ここで $\alpha(x)$ の時空座標依存性はまったく任意である。この変換に対する不変性が局所ゲージ不変性である。ところがそれは成り立っていない。(14.8) のラグランジアン

$$\mathcal{L}=i\bar{\psi}\gamma^{\mu}\partial_{\mu}\psi-m\bar{\psi}\psi$$

は，この局所位相変換に対して不変ではない。(14.21) によれば

$$\bar{\psi}(x) \longrightarrow e^{-i\alpha(x)}\bar{\psi}(x)$$

だから，$\mathcal{L}$ の第 2 項は不変になる。しかし，ψ の微分は (14.21) の変換に従わない：

$$\partial^{\mu}\psi \longrightarrow e^{i\alpha(x)}\partial_{\mu}\psi+ie^{i\alpha(x)}\psi\partial_{\mu}\alpha. \tag{14.22}$$

$\partial_{\mu}\alpha$ の項が $\mathcal{L}$ の不変性を破る。

もしも，審美的観点から局所ゲージ変換に対する $\mathcal{L}$ の不変性に固執するならば，位相変換に対して共変的に変換するように修正された微分 D_{μ} を探さなければならない。すなわち，ψ 自身のように

$$D_{\mu}\psi \longrightarrow e^{i\alpha(x)}D_{\mu}\psi \tag{14.23}$$

とする。“共変微分” D_{μ} を作るために，(14.22) の中の不要な項を打ち消すような変換性を持ったベクトル場 A_{μ} を導入しよう。それには

$$\boxed{D_{\mu}\equiv\partial_{\mu}-ieA_{\mu}} \tag{14.24}$$

とすればよい。A_{μ} は

$$A_{\mu} \longrightarrow A_{\mu}+\frac{1}{e}\partial_{\mu}\alpha \tag{14.25}$$

のように変換する。D_{μ} が (14.23) を満足することは容易に確かめられよう。すなわち，ラグランジアン (14.8) の不変性は ∂_{μ} を D_{μ} で置き換えればよい：

$$\begin{aligned}\mathcal{L}&=i\bar{\psi}\gamma^{\mu}D_{\mu}\psi-m\bar{\psi}\psi\\&=\bar{\psi}(i\gamma^{\mu}\partial_{\mu}-m)\psi+e\bar{\psi}\gamma^{\mu}\psi A_{\mu}.\end{aligned} \tag{14.26}$$

つまり，局所位相変換に対する不変性を要求すると，ベクトル場 A_{μ} を導入せざ

るをえない。これがゲージ場である。電荷 $-e$ の Dirac 粒子との相互作用は光子とまったく同様である。(14.24) と (6.1) を比較されたい。実際, (14.26) の相互作用項は $-j^{\mu}A_{\mu}$ と書いてよいだろう。j^{μ} は (5.17) で与えられる電流密度である。

この新しい場を物理的な光子場と考えるなら, (14.26) の $(1/2)(\partial_{\mu}\phi)^2$ に類似の運動エネルギーを, ラグランジアンに付け加えなければならない。それは (14.25) に対して不変でなくてはいけないから, ゲージ不変な場の強さのテンソル

$$F_{\mu\nu}=\partial_{\mu}A_{\nu}-\partial_{\nu}A_{\mu} \tag{14.27}$$

だけしか含むことができない。こうして QED のラグランジアンが得られる：

$$\boxed{\mathcal{L}=\bar{\psi}(i\gamma^{\mu}\partial_{\mu}-m)\psi+e\bar{\psi}\gamma^{\mu}A_{\mu}\psi-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}.} \tag{14.28}$$

質量項 $(1/2)m^2A_{\mu}A^{\mu}$(問題 14.4 参照) は, ゲージ不変性によって禁止される。ゲージ粒子である光子は質量 0 である。

新しい場を導入しなければならないということは最初から明らかだった。なぜなら, 位相が各点ごとに変化すれば, 観測にかかる位相変化が生じてしまうから, それをなんとかして打ち消さなければならないからだ。驚くべきことに, 光子場 A_{μ} の導入によって局所ゲージ不変性が回復できたのである。電子場の位相を調整させるべき距離には制限がないから, ゲージ場の作用範囲は無限大と考えてよい。つまり光子の質量は 0 である。

要約すると, 自由なフェルミオンのラグランジアンが局所位相変換に対して不変なるべしという“自然な”要求をすると, 相互作用する場を扱う QED が得られる。古典電気力学を勉強したとき, 読者はゲージ不変性を, Maxwell 理論を形式的興味から議論したものぐらいに思っていたかもしれないが, ゲージ不変性こそ, もっとも基礎的かつ本質的要素の 1 つになるのである。

問題 14.7　Aharonov-Bohm 効果について調べよ。Feynman 物理学 III『電磁気学』(邦訳) p 192 以下, T. T. Wu and C. N. Yang, Phys. Rev. **D 12** (1975) 3845 などが参考になるだろう。

14.4　非 Abel 的ゲージ不変性と QCD

類似したやり方で, 量子色力学の構造を局所ゲージ不変性に基づいて推論す

ることができるだろう。QCD は前節の考えの拡張を基礎にしているが，$U(1)$ ゲージ群のかわりにクォークのカラー場に対する位相変換の $SU(3)$ 群が登場する。自由場のラグランジアンは

$$\mathcal{L}_0=\bar{q}_j(i\gamma^\mu\partial_\mu-m)q_j \tag{14.29}$$

である。q_1, q_2, q_3 は 3 つのカラー場を表す。簡単のためにクォークのフレーバーは 1 個だけにしよう。

局所位相変換

$$q(x)\longrightarrow Uq(x)\equiv e^{i\alpha_a(x)T_a}q(x) \tag{14.30}$$

に対して $\mathcal{L}_0$ が不変であるべし，と要求したときの帰結は何かを調べよう。ここで U は 3 行 3 列の行列で，一般的な形に表されることがあとでわかる。くり返して現れる添字 a については加える。T_a $(a=1,\cdots,8)$ は 3 行 3 列の独立な行列であり，α_a は群のパラメターである。2.8 節の行列 $\lambda_a/2$ は T_a の慣習的な表現である。

問題 14.8 det $U=e^{i\phi}$ を示せ。ここで ϕ は実数である。変換を det $U=+1$ となるものに限れば，全体の位相は分離する (2.3 節参照)。これが特殊ユニタリー群 $SU(3)$ の 3 行 3 列の行列である。det $U=1$ は $\mathrm{Tr}(T_a)=0$ を意味することを示せ。また $U^\dagger=U^{-1}$ から

$$\alpha_a T_a=\alpha_a^* T_a^\dagger \tag{14.31}$$

が成り立つことを示し，T_a を Hermite 行列に選べば，群のパラメター α_a は実数になることを確かめよ。

生成演算子 T_a は互いに可換ではないから，この群は非 Abel 的である。任意の 2 つの T の交換子は，他のすべての T の 1 次結合で表される：

$$[T_a, T_b]=if_{abc}T_c. \tag{14.32}$$

ここで f_{abc} は実定数で，群の構造定数と呼ばれる。

問題 14.9 構造定数は，添字の入れ換えに対して反対称であることを示せ。

ラグランジアン (14.29) に $SU(3)$ 局所ゲージ不変性を課するために，14.3 節の手法をとろう。それには無限小位相変換を考えれば十分である：

$$\begin{aligned} q(x) &\longrightarrow [1+i\alpha_a(x)T_a]q(x), \\ \partial_\mu q &\longrightarrow (1+i\alpha_a T_a)\partial_\mu q+iT_a q\partial_\mu\alpha_a. \end{aligned} \tag{14.33}$$

最後の項が $\mathcal{L}$ の不変性を壊している。一見，QED の場合とまったく同じにいきそうである。すなわち，

$$G_\mu{}^a \longrightarrow G_\mu{}^a - (1/g)\,\partial_\mu \alpha_a \tag{14.34}$$

のように変換する ((14.25) 参照) 8 個のゲージ場 $G_\mu{}^a$ を導入して，共変微分 ((14.24) 参照)

$$D_\mu = \partial_\mu + igT_a G_\mu{}^a \tag{14.35}$$

を作る。こうして，ラグランジアン (14.29) で $\partial_\mu \rightarrow D_\mu$ と置き換えれば

$$\mathcal{L} = \bar{q}(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)q - g(\bar{q}\gamma^\mu T_a q)\,G_\mu{}^a \tag{14.36}$$

が得られる。これは (14.26) の QCD 版である。ところが，非 Abel 的ゲージ変換の場合には，ゲージ不変なラグランジアンを作るには，これではまだ不十分である。問題はこういうことである。(14.32) を用いると

$$\begin{aligned}(\bar{q}\gamma^\mu T_a q) &\longrightarrow (\bar{q}\gamma^\mu T_a q) + i\alpha_b \bar{q}\gamma^\mu (T_a T_b - T_b T_a) q \\ &\longrightarrow (\bar{q}\gamma^\mu T_a q) - f_{abc}\alpha_b (\bar{q}\gamma^\mu T_c q)\end{aligned} \tag{14.37}$$

となる。したがって，$\mathcal{L}$ のゲージ不変性は，(14.34) を次のように書き換えれば保証されることがわかる：

$$G_\mu{}^a \longrightarrow G_\mu{}^a - (1/g)\,\partial_\mu \alpha_a - f_{abc}\alpha_b G_\mu{}^c. \tag{14.38}$$

各 $G_\mu{}^a$ のゲージ不変な運動エネルギー項を $\mathcal{L}$ に加えて，ゲージ不変な QCD ラグランジアンの最終的な形が得られる：

$$\boxed{\mathcal{L} = \bar{q}(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)q - g(\bar{q}\gamma^\mu T_a q)\,G_\mu{}^a - (1/4)\,G_{\mu\nu}{}^a G_a{}^{\mu\nu}.} \tag{14.39}$$

問題 14.10　(14.38) の新しい付加項のために，$G_{\mu\nu}{}^a$ は QED の対応項 (14.27) よりも複雑な形をしている。運動エネルギーが (14.38) の置き換えに対して不変であるためには

$$G_{\mu\nu}{}^a = \partial_\mu G_\nu{}^a - \partial_\nu G_\mu{}^a - g f_{abc} G_\mu{}^b G_\nu{}^c \tag{14.40}$$

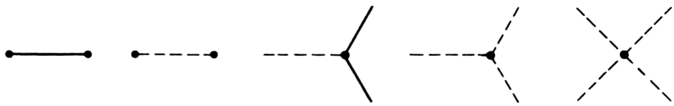
であることを示せ。

(14.39) はカラークォーク q とベクトルグルーオン G_μ が，結合定数 g で相互作用しているときのラグランジアンである。これは，ラグランジアンがクォーク場に対する局所カラー位相変換に対して不変であるべし，という要請だけから導かれたものである。3 個のクォークのカラー場の位相は，まったく自由に変えることができるから，8 個のベクトルグルーオン場 ($G_\mu{}^a$, $a=1, 2, \cdots, 8$) が，あらゆる可能な位相変化を相殺するのに不可欠であることは驚くにあたらない。光子の場合とまったく同様に，局所ゲージ不変性は，グルーオンの質量が 0 であるべきことを要求する。

場の強さのテンソル $G_{\mu\nu}{}^a$ は，(14.40) に電磁場にはない項が付け加わったた

め，注目すべき新しい性質を持っている。ゲージ対称性を課してやると，$\mathcal{L}$ の中の運動エネルギー項は，単に運動学的効果だけでなく，ゲージボソン間の自己相互作用を誘起する。これは，ラグランジアン (14.39) を次のように記号的に書き換えてみれば明らかだろう：

$$\mathcal{L}=\text{“}\bar{\mathrm{q}}\mathrm{q}\text{”}+\text{“}G^2\text{”}+g\text{“}\bar{\mathrm{q}}\mathrm{q}G\text{”}+g\text{“}G^3\text{”}+g^2\text{“}G^4\text{”}.$$



はじめの 3 項は QED 類似の相互作用，すなわち，クォークおよびグルーオンの自由伝播と，クォーク・グルーオン相互作用を表す。残りの 2 項は，QCD には 3 グルーオンおよび 4 グルーオン・バーテックスが存在することを示すが，これはグルーオン自身カラー荷を持っていることの反映である。これは QED にはなかった事情であり，ゲージ群が非 Abel 的であるため生じた。強調すべきことは，ゲージ不変性から一義的にこれらグルーオンの自己相互作用項の構造が決定されるということだ。結合定数はただ 1 個だけである。

問題 14.11 14.1 節でラグランジアンから Feynman 則を導いた手続きを使って，図 14·1 のクォーク・グルーオンおよび 3 グルーオン相互作用に対するバーテックス因子は，それぞれ次で与えられることを示せ：

$$-ig\gamma_\mu(T_a)_{ij}, \qquad -gf_{abc}\{g_{\mu\nu}(p_1-p_2)_\lambda+g_{\nu\lambda}(p_2-p_3)_\mu+g_{\lambda\mu}(p_3-p_1)_\nu\}.$$

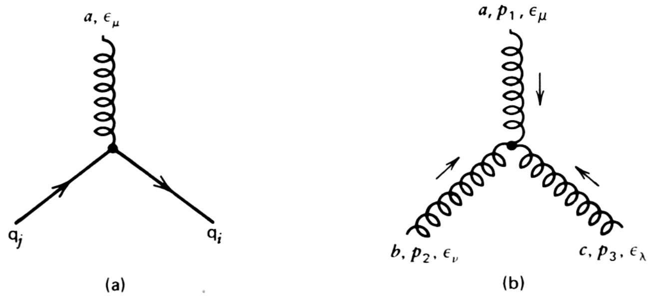


図 14·1 (a) クォーク・グルーオンバーテックス，(b) 3 グルーオンバーテックス。a, p, ε_μ はグルーオンのカラー，4 元運動量，偏極ベクトルを示す。

非 Abel 的ゲージ群の意味をはじめて研究したのは Yang と Mills だったので，非 Abel 的ゲージ不変な理論は Yang-Mills 理論とも呼ばれる。

14.5　重いゲージボソン

ゲージ場の質量項があると，ラグランジアンのゲージ不変性が破れるので，光子，グルーオンともに質量が 0 でなければならなかった。ところが，ゲージ場という考えを弱い相互作用に適用しようと思うと，深刻な問題がもち上がる。いったいどのようにして，質量 100 GeV 程度もあるゲージボソン ($W^{\pm}, Z^0$) が媒介する相互作用に，ゲージ対称性を適用することができるのだろう。読者は，まったく審美的観点から局所ゲージ不変性を導入したのではないか，と言われるかもしれない。それなら，なぜ，$M^2 W_\mu W^\mu$ という形の質量項をラグランジアンに導入して，対称性を破る効果は単純に無視する，という考えではいけないのか。もしそうすると，(くり込みができない) 発散が現れて，それが議論を無意味にしてしまうのである。

たとえば，図 14·2 で表される過程を計算しよう。閉線の運動量 q は勝手な値をとることができる。したがって，q で積分してしまえば，振幅は

$$\int d^4 q(\text{伝播関数})\cdots \tag{14.41}$$

という形になる (第 7 章参照)。QED で電子間に 2 個電子を交換する過程 (図 14·2 と同じ構造) を計算できるが，それは (14.41) の積分を実行することである。答えは有限になる。閉線の運動量は，もちろん，いくらでも大きくなりうるが，電子の伝播関数 $1/q^2$ があるために，(14.41) の積分が発散しないのである。重いゲージボソンの場合だと結果は違う。伝播関数 (6.87) の形は

$$i\frac{-g_{\mu\nu}+q_\mu q_\nu/M^2}{q^2-M^2} \underset{q^2\to\infty}{\sim} i\frac{q_\mu q_\nu}{q^2M^2} \tag{14.42}$$

であって，閉線運動量が大きいとき，(14.41) の発散を防ぐことができない。唯一の望みは q^2 に切断を持ち込むことである。これは理論の新しいパラメターとなり，実験から決定しなければならないだろう。しかし，もっと複雑な閉線を含んだ図を調べてみると，こうした希望も破れ去ってしまう。あらたに，もっ

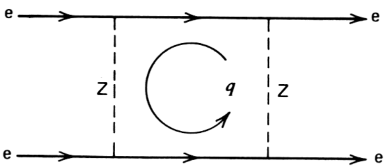


図 14·2　電子・電子散乱に対する1閉線の寄与

と性質の悪い発散が各次数で現れて，最終的には無限個の未知パラメターを導入しなければならなくなる。第7章で議論した発散と違い，これらの発散は単にラグランジアンに入っている結合定数を“くり込む”というふうには解釈できない。このような理論は無意味であり，何も予言することができない。これを“くり込み不可能”という。局所ゲージ不変性をあきらめて，$W^{\pm}$ や Z の質量をこのように“手で”入れるのがよくないことは明らかだ。それでは，ゲージ不変性を破らずに質量を導入することができるだろうか。驚くべきことにそれができたのだ。以下の節で，この興味津々たる問題の展開を述べることにする。

14.6　対称性の自発的破れ：隠された対称性

(14.6) でやったように，質量を手で入れる方法とは対照的に，“対称性の自発的破れ”によって粒子の質量を作り出す方法は，ごく簡単な例でみることができる。ラグランジアン

$$\mathcal{L} \equiv T - V = \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi)^2 - \left(\frac{1}{2}\mu^2\phi^2 + \frac{1}{4}\lambda\phi^4\right) \tag{14.43}$$

で記述されるスカラー粒子だけから成る簡単な世界を考えよう。ここで $\lambda>0$ とする。$\mathcal{L}$ は ϕ を $-\phi$ に変える対称変換に対して不変である，という要請を置く。V を ϕ のベキに展開して，対称性で許される最初の2項だけとれば十分である。ポテンシャルの2つの可能な形が図14・3に示してある。(a) は $\mu^2>0$ ですでにおなじみであり ((14.6) 参照)，質量 μ のスカラー場を表す。ϕ^4 項は，

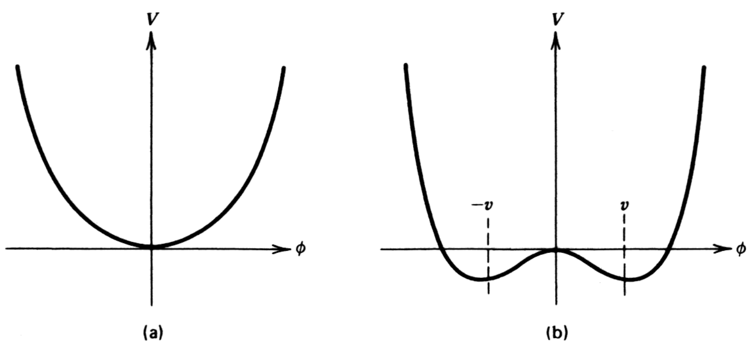


図 14・3　ポテンシャル $V(\phi)=(1/2)\mu^2\phi^2+(1/4)\lambda\phi^4$.
(a) $\mu^2>0$, (b) $\mu^2<0$.

結合定数 λ の 4 粒子相互作用が存在することを示す。このような ϕ を自己相互作用場という。基底状態（真空）は $\phi=0$ に対応する。これはラグランジアンが持つ反転対称性にしたがっている。

ところで，その可能性を本当に探りたいのは，図 14・3 (b) の $\mu^2<0$ の場合である。ϕ^2 項と運動エネルギー T の相対符号は正だから，ラグランジアン (14.43) の質量項の符号は正しくない。(a) の場合と違い，(b) の場合はポテンシャルは 2 つの最小を持つ。それは

$$\frac{\partial V}{\partial \phi}=\phi(\mu^2+\lambda\phi^2)=0$$

を満足するから，

$$\phi=\pm v, \qquad v=\sqrt{-\mu^2/\lambda} \tag{14.44}$$

で最小になる。極値 $\phi=0$ は最小エネルギーに対応していない。摂動計算は，古典的な最小値 $\phi=v$ または $\phi=-v$ のまわりの展開である。そこで

$$\phi(x)=v+\eta(x) \tag{14.45}$$

と書けば，$\eta(x)$ はこの最小値のまわりの量子的ゆらぎである。ここで場を $\phi=+v$ へずらすように選んだが，これは一般性を失うことにはならない。なぜなら，$\phi=-v$ は反転対称によっていつでも可能になるからである（自然もこうなっているはずだ）。(14.45) をラグランジアン (14.43) に代入すれば

$$\mathcal{L}'=\frac{1}{2}(\partial_\mu\eta)^2-\lambda v^2\eta^2-\lambda v\eta^3-\frac{1}{4}\lambda\eta^4+\text{const} \tag{14.46}$$

を得る。場 η は正しい符号の質量項を持った！　たしかに，η^2 と運動エネルギーの相対符号は負である。$\mathcal{L}'$ のはじめの 2 項と (14.6) を等置して

$$m_\eta=\sqrt{2\lambda v^2}=\sqrt{-2\mu^2} \tag{14.47}$$

となる。η の高次項は η 場の自己相互作用を表す。

もちろん，ここには 1 つの謎がある。(14.43) の $\mathcal{L}$ と (14.46) の $\mathcal{L}'$ は完全に同等である。(14.45) で表される形の変換によって物理が変わるはずがない。もし 2 つのラグランジアンを厳密に解くことができたとすれば，まったく同じ答えが得られるだろう。しかし，素粒子物理ではこのような計算を実行することができない。そのかわり，摂動計算はできて，エネルギーの最小値のまわりのゆらぎを計算することができる。$\mathcal{L}$ を用いると不安定点 $\phi=0$ のまわりで展開していることになり，摂動級数は収束しない。正しい取り扱いは，$\mathcal{L}'$ を用いて安定な真空 $\phi=v$ のまわりで η について展開しなければいけない。摂動論では，$\mathcal{L}'$ が正しい物理の描像を与えるのであって，$\mathcal{L}$ ではない。こうして，スカラー

粒子(原理的には同等なラグランジアン $\mathcal{L}$ と $\mathcal{L}'$ で記述される)が実際，質量を獲得したのである！

この質量が“生み出された”(あるいは“現れてくる”といったほうがよいかもしれない)カラクリを，“対称性の自発的破れ”という。ラグランジアン $\mathcal{L}'$ のスカラー理論では，摂動計算を基底状態 $\phi=+v$ ($\phi=-v$ ではなく)のまわりで実行するように選んだために，ラグランジアンの反転対称性は見かけ上破れている。

基底状態がラグランジアンの持つ対称性を持たないような物理系はほかにも知られている。無限に広がった強磁性体は，空間回転不変なラグランジアンにより記述される。基底状態では，スピンはすべてある特定の方向を向いている。したがって，回転対称性は見かけ上破れている。しかし，その方向は任意であるから，回転対称性によって，それぞれスピンの異なる向きに対応する無限に多くの基底状態に移ることができる。今ここで考えているスカラー場の例では，2個の基底状態だけが可能であった。超伝導体，結晶格子，針を圧縮したときの曲がりなどほかにも例がある！ 編み棒を1本持ってきて，その軸方向に(図14·4の z 軸)力 F を加えて圧縮すると，編み棒が $x=y=0$ にとまったままという解があることは自明だ。ところが，力が大きすぎると($F>F_{\mathrm{critical}}$)，図のように編み棒は曲がってしまう。こうなるのは，曲がった状態のほうが z 軸方向を向いた準安定状態よりエネルギーが低いからである。z 軸に関する系の円柱対称性は，編み棒の曲がりによって見かけ上破れている。しかし，編み棒は x-y 面内のどの方向にも曲げられて，同じエネルギーの基底状態になりうるから，あらかじめどの状態に移るかは予測することができない。

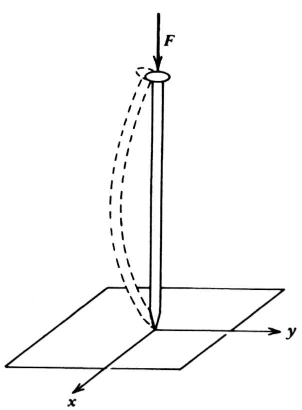


図 14·4 対称性の自発的破れの一例：編み棒に力を加えて曲げる。

14.7　大域的ゲージ対称性の自発的破れ

ゲージボソンの質量生成という目標に近づくために，スカラー場 $\phi=(\phi_1+i\phi_2)/\sqrt{2}$ に対して前節の手続きをくり返そう。ラグランジアンは次の通りである：

$$\mathcal{L}=(\partial_\mu\phi)^*(\partial^\mu\phi)-\mu^2\phi^*\phi-\lambda(\phi^*\phi)^2. \tag{14.48}$$

これは変換 $\phi\to e^{i\alpha}\phi$ に対して不変である。つまり，$\mathcal{L}$ は大域的ゲージ対称性 $U(1)$ を持っている。前と同様，$\lambda>0$ かつ $\mu^2<0$ の場合を考えよう。(14.48) を次のように書き直す：

$$\mathcal{L}=\frac{1}{2}(\partial_\mu\phi_1)^2+\frac{1}{2}(\partial_\mu\phi_2)^2-\frac{1}{2}\mu^2(\phi_1{}^2+\phi_2{}^2)-\frac{1}{4}\lambda(\phi_1{}^2+\phi_2{}^2)^2.$$

ポテンシャル $V(\phi)$ を最小にする ϕ の値は，ϕ_1-ϕ_2 平面内で

$$\phi_1{}^2+\phi_2{}^2=v^2,\qquad \text{ここで}\quad v^2=-\mu^2/\lambda \tag{14.49}$$

を満足する半径 v の円周上にある (図 14･5 参照)。

ふたたび，場をエネルギー最小の位置まで平行移動して，$\phi_1=v$，$\phi_2=0$ にとっても一般性を失うことはない。(14.48) に

$$\phi(x)=\sqrt{1/2}\,[v+\eta(x)+i\xi(x)] \tag{14.50}$$

を代入して，$\mathcal{L}$ を真空のまわりで展開して η と ξ で表せば

$$\mathcal{L}'=\frac{1}{2}(\partial_\mu\xi)^2+\frac{1}{2}(\partial_\mu\eta)^2+\mu^2\eta^2+(\text{定数項})+(\eta,\xi\ \text{に関して 3 次, 4 次の項}) \tag{14.51}$$

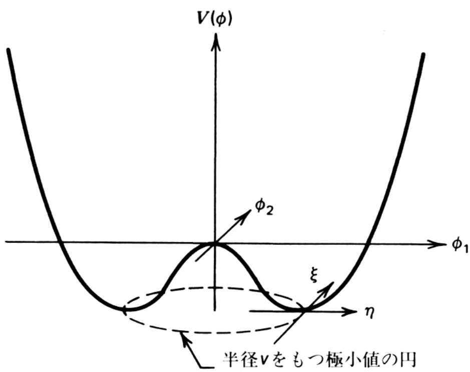


図 14･5　$\mu^2<0$, $\lambda>0$ に対する複素スカラー場のポテンシャル $V(\phi)$

を得る。第 3 項は η 場の質量項 $(-m_\eta{}^2\eta^2/2)$ である。こうして前と同様，η の質量は $m_\eta=\sqrt{-2\mu^2}$ となった((14.47) 参照)。$\mathcal{L}'$ の第 1 項は ξ 場の運動エネルギーを表すが，ξ 場の質量項はない。すなわち，この理論は質量 0 のスカラー場を含んでいる。これが Nambu (南部)-Goldstone ボソンである。こうして，われわれは 1 つの問題にぶつかった：重いゲージボソンを生成しようと思ってやってみると，自発的に破れたゲージ理論では質量 0 のスカラー場が現れてしまう，という困ったことが起きる。直観的にはそうなる理由はすぐわかる。ポテンシャルは接線(ξ) 方向には平らだから，それは質量 0 のモードを意味する。図 14･5 で ξ 方向の励起に対する抵抗はないのである。

このラグランジアンは Goldstone の定理の簡単な例である。すなわち，ある物理系の連続的対称性が "自発的に破れる" (もっと正確にいうと，"基底状態では，対称性がみえなくなる) ときには，いつでも質量 0 のスカラー粒子が現れる。強磁性体の例でいえば，Nambu (南部)-Goldstone ボソンに類似のものは長距離スピン波で，スピン整列の振動である。

問題 14.12 3 つの場 ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 が相互作用している場合のラグランジアンは

$$\mathcal{L}=\frac{1}{2}(\partial_\mu\phi_i)^2-\frac{1}{2}\mu^2\phi_i{}^2-\frac{1}{4}\lambda(\phi_i{}^2)^2$$

である。ここで $\mu^2<0$, $\lambda>0$ で，$\phi_i{}^2$ は i に関する和を意味する。このラグランジアンは，質量 $\sqrt{-2\mu^2}$ の場と 2 つの質量 0 の Nambu (南部)-Goldstone ボソン を記述することを示せ。

重いゲージボソンを含む，弱い相互作用のゲージ理論をみつけたいという希望は挫折した。望まざる (観測されない) 質量 0 のスカラー粒子のことも心配しなくてはいけない。そういう困難はあるが，ともかく大域的ゲージ理論から局所ゲージ理論に進むことにしよう。今や奇蹟が起きようとしているのだ。

14.8 Higgs 機構

最後の段階は，局所ゲージ対称性の自発的な破れである。ここでは簡単な例として，$U(1)$ ゲージ対称性を取り上げよう。次節で $SU(2)$ に拡張する。第一に，ラグランジアン (14.48) を $U(1)$ 局所ゲージ変換：

$$\phi \longrightarrow e^{i\alpha(x)}\phi \tag{14.52}$$

に対して不変にしなければならない。それには，14.3 節同様，∂_μ を共変微分

$$D_\mu=\partial_\mu-ieA_\mu$$

で置き換えればよい。ただし，ゲージ場は次のように変換する：

$$A_\mu \longrightarrow A_\mu + \frac{1}{e}\partial_\mu \alpha. \tag{14.53}$$

したがって，ゲージ不変なラグランジアンは次のようになる：

$$\mathcal{L} = (\partial^\mu + ieA^\mu)\phi^*(\partial_\mu - ieA_\mu)\phi - \mu^2\phi^*\phi - \lambda(\phi^*\phi)^2 - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}. \tag{14.54}$$

これは $\mu^2>0$ ならば，(自己相互作用項 ϕ^4 は別として) 質量 μ の荷電スカラー粒子に対する QED ラグランジアンである。すでに，フェルミオン場に対する QED 類似のラグランジアンは (14.28) でわかっている。しかしここでは，対称性の自発的な破れによって質量を生み出すのだから，$\mu^2<0$ ととる。

場 ϕ を本当の基底状態へ平行移動するというおなじみの手順をくり返す。(14.50) を代入するとラグランジアン (14.54) は

$$\begin{aligned}\mathcal{L}' = &\frac{1}{2}(\partial_\mu\xi)^2 + \frac{1}{2}(\partial_\mu\eta)^2 - v^2\lambda\eta^2 + \frac{1}{2}e^2v^2A_\mu A^\mu \\ &- evA_\mu\partial^\mu\xi - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \text{相互作用項}\end{aligned} \tag{14.55}$$

のように書くことができる。$\mathcal{L}'$ に含まれる粒子のスペクトルは，質量 0 の Goldstone ボソン ξ，質量を持ったスカラー粒子 η，さらに決定的なのは，これまでずっと探していた重いベクトル粒子 A_μ である。実際，(14.55) から

$$m_\xi = 0, \qquad m_\eta = \sqrt{2\lambda v^2}, \qquad m_A = ev$$

を得る ((14.6) および問題 14.4 参照)。こうしてゲージ場の質量がダイナミカルに生成されたが，依然として，質量を持たない Nambu (南部) -Goldstone ボソンの出現が問題だ。ところで，場に関する非対角項 $A_\mu\partial^\mu\xi$ の存在は，$\mathcal{L}'$ の解釈に注意を払わなければいけないということを意味する。実際，われわれが $\mathcal{L}'$ に与えた粒子のスペクトルは正しくなかった。A_μ に質量を与えたから，偏りの自由度が 2 から 3 になったことは明らかである。なぜなら，A_μ は質量のおかげで縦方向の偏りも持つことができるからである。しかし，(14.50) のように場の変数を平行移動するだけでは，新しい自由度を作ることはできない。$\mathcal{L}'$ に含まれている個々の場がすべて，物理的意味を持つ粒子に対応するわけではない，と考えてみよう。それで困るということはないだろう。事実，QED では，物理的意味のない (スカラーおよび縦波) 質量 0 の光子を含むラグランジアンを使った。では，いったいラグランジアン $\mathcal{L}'$ の中で物理的に意味のない場はどれか。特別なゲージ変換を施して，ラグランジアンからある場を消去する

ことができるだろうか。その手がかりの1つとして，ξ の最低次で

$$\phi=\sqrt{\frac{1}{2}}(v+\eta+i\xi)\simeq\sqrt{\frac{1}{2}}(v+\eta)e^{i\xi/v} \tag{14.56}$$

が成り立つことに注意しよう。これから，元のラグランジアン(14.54)の変数を，異なる1組の実数場 h,θ,A_μ によって

$$\begin{aligned}\phi &\longrightarrow \sqrt{\frac{1}{2}}(v+h(x))e^{i\theta(x)/v},\\ A_\mu &\longrightarrow A_\mu+\frac{1}{ev}\partial_\mu\theta\end{aligned} \tag{14.57}$$

と置き換えてみる，ということが頭に浮かぶだろう。これは，h が実数になるように $\theta(x)$ を選んで，特別のゲージを1つ決めたことに相当する。したがって，理論は $\theta(x)$ には関係しないのだと考える。実際，ラグランジアンは次のようになる：

$$\begin{aligned}\mathcal{L}''=&\frac{1}{2}(\partial_\mu h)^2-\lambda v^2h^2+\frac{1}{2}e^2v^2A_\mu{}^2-\lambda vh^3-\frac{1}{4}\lambda h^4\\ &+\frac{1}{2}e^2A_\mu{}^2h^2+ve^2A_\mu{}^2h-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}.\end{aligned} \tag{14.58}$$

Goldstone ボソンは確かに理論に現れてこない。すなわち，余分の自由度があるようにみえたが，実は，それはみせかけだったのだ。なぜなら，それはゲージ変換だけの自由度にすぎないからである。ラグランジアンは，相互作用する2つの質量を持った粒子，ベクトルゲージボソン A_μ とスカラー粒子 h——Higgs 粒子——だけを含むことになった。欲しくない質量0の Nambu (南部)-Goldstone ボソンは，質量を持ったゲージ粒子の必要悪ともいうべき縦偏極に化けたのだ。これを Higgs 機構という。

14.9 局所 $SU(2)$ ゲージ対称性の自発的破れ

前節では，$U(1)$ ゲージ対称性の自発的な破れを学んだ。$SU(2)$ ゲージ対称性に対して，その手法をもう一度くり返さなければならない。この最後の例は本章のまとめとして役に立つと思う。それは，第15章で議論する電弱相互作用の準備になるばかりでなく，これまで導入したアイディアのすべてをひとまとめに包含している。

次のラグランジアンを考えよう。

$$\mathcal{L}=(\partial_\mu\phi)^\dagger(\partial^\mu\phi)-\mu^2\phi^\dagger\phi-\lambda(\phi^\dagger\phi)^2. \tag{14.59}$$

ここで ϕ は複素スカラー場の $SU(2)$ 2 重項である：

$$\phi=\begin{pmatrix}\phi_\alpha\\ \phi_\beta\end{pmatrix}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}\phi_1+i\phi_2\\ \phi_3+i\phi_4\end{pmatrix}. \tag{14.60}$$

$\mathcal{L}$ は大局的 $SU(2)$ 位相変換

$$\phi \longrightarrow \phi'=e^{i\alpha_a\tau_a/2}\phi \tag{14.61}$$

に対して不変なことは一見して明らかである ((14.30) 参照)。$\mathcal{L}$ を局所 $SU(2)$ 不変，つまり $\alpha\to\alpha(x)$ にするために，14.4 節でとった手順に従う。すなわち，∂_μ を共変微分

$$D_\mu=\partial_\mu+ig\frac{\tau_a}{2}W_\mu{}^a \tag{14.62}$$

で置き換える。ここで 3 つのゲージ場 $W_\mu{}^a(x)$ $(a=1,2,3)$ が新たに登場した。無限小ゲージ変換：

$$\phi(x)\longrightarrow\phi'(x)=[1+\boldsymbol{\alpha}(x)\cdot\boldsymbol{\tau}/2]\phi(x) \tag{14.63}$$

に対して，3 つのゲージ場は次のように変換する：

$$\boldsymbol{W}_\mu\longrightarrow\boldsymbol{W}_\mu-\frac{1}{g}\partial_\mu\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{W}_\mu. \tag{14.64}$$

$\boldsymbol{W}$ は $SU(2)$ ベクトルだから，$\boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{W}_\mu$ の項が現れる。$\boldsymbol{\alpha}$ が x に無関係であっても，これは "回転" を表す。するとゲージ不変なラグランジアンは

$$\begin{aligned}\mathcal{L}=&\left(\partial_\mu\phi+ig\frac{1}{2}\boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{W}_\mu\phi\right)^\dagger\left(\partial^\mu\phi+ig\frac{1}{2}\boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{W}^\mu\phi\right)\\&-V(\phi)-\frac{1}{4}\boldsymbol{W}_{\mu\nu}\cdot\boldsymbol{W}^{\mu\nu}\end{aligned} \tag{14.65}$$

となる。ここで

$$V(\phi)=\mu^2\phi^\dagger\phi+\lambda(\phi^\dagger\phi)^2 \tag{14.66}$$

であり，

$$\boldsymbol{W}_{\mu\nu}=\partial_\mu\boldsymbol{W}_\nu-\partial_\nu\boldsymbol{W}_\mu-g\boldsymbol{W}_\mu\times\boldsymbol{W}_\nu \tag{14.67}$$

と書いて，ゲージ場の運動エネルギー項を加えてある。(14.67)，(14.64) の最後の項は，群が非 Abel 的であるために出てきたのである。つまり，τ が互いに可換でないからである。もしも $\mu^2>0$ であれば，ラグランジアン (14.65) は，質量 μ で，3 つの質量 0 のゲージボソン ($W_\mu{}^a$) と相互作用している 4 つのスカラー場 ((14.60) の ϕ_i) を記述する。

興味あるのは，$\mu^2<0$ かつ $\lambda>0$ の場合である。(14.66) のポテンシャル $V(\phi)$

は，ある有限の$|\phi|$の値で最小になるが，その$|\phi|$は

$$\phi^\dagger\phi \equiv \frac{1}{2}({\phi_1}^2+{\phi_2}^2+{\phi_3}^2+{\phi_4}^2) \equiv -\frac{\mu^2}{2\lambda} \tag{14.68}$$

で与えられる。$V(\phi)$ が最小になる点の作る多様体は，$SU(2)$ 変換に対して不変である。$\phi(x)$ をある特定の最小値のまわりで展開しなければならない。たとえば，それを

$$\phi_1=\phi_2=\phi_4=0, \qquad {\phi_3}^2=-\mu^2/\lambda \equiv v^2 \tag{14.69}$$

と選ぶことができる。このことは，$SU(2)$ 対称性の自発的破れと同等の効果を示す。つまり，(14.68) では一見して明らかだった対称性が隠されてしまった。

さて，$\phi(x)$ をこの特定の真空：

$$\phi_0 \equiv \sqrt{\frac{1}{2}}\begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix} \tag{14.70}$$

のまわりで展開しよう。ゲージ不変性によって，展開

$$\phi(x)=\sqrt{\frac{1}{2}}\begin{pmatrix} 0 \\ v+h(x) \end{pmatrix} \tag{14.71}$$

をラグランジアン (14.65) に代入しさえすれば，求める結果が得られる。すなわち，4 つのスカラー場の中で残るのは (Higgs 場)$h(x)$ だけである。一見，これは驚くべきことのように思われるが，その理由は前節の $U(1)$ ゲージ対称性の自発的破れの事情と似ている。つまり，こう考えるわけである。(14.57) との類似を進めて，真空 ϕ_0 のまわりのゆらぎを

$$\phi(x)=e^{i\boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{\theta}(x)/v}\begin{pmatrix} 0 \\ \dfrac{v+h(x)}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \tag{14.72}$$

を用いて，4 つの実数場 $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ および h で表す。これが完全に一般的であるということを確かめるために，小さい摂動を調べてみると，

$$\begin{aligned}\phi(x) &\simeq \sqrt{\frac{1}{2}}\begin{pmatrix} 1+i\theta_3/v & i(\theta_1-i\theta_2)/v \\ i(\theta_1+i\theta_2)/v & 1-i\theta_3/v \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ v+h(x) \end{pmatrix} \\ &\simeq \sqrt{\frac{1}{2}}\begin{pmatrix} \theta_2+i\theta_1 \\ v+h-i\theta_3 \end{pmatrix}\end{aligned} \tag{14.73}$$

を得る。4 つの場が確かに独立で，真空 ϕ_0 からのずれが完全に θ_i と h で表されていることがわかる。ところで，ラグランジアンは局所 $SU(2)$ 不変である。したがって，(14.72) 中の 3 つの (質量 0 の Goldstone ボソン) 場 $\boldsymbol{\theta}(x)$ をゲージ化することができる。すると，ラグランジアンには $\boldsymbol{\theta}(x)$ の痕跡は消えてしまい，(14.71) の結果が得られるからである。

生成されたゲージボソン $W_\mu{}^a$ の質量を決定するには，(17.70) の ϕ_0 をラグランジアンに代入するだけでよい。(14.65) の中で関係する項は

$$\left|ig\frac{1}{2}\boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{W}_\mu\phi\right|^2=\frac{g^2}{8}\left|\begin{pmatrix} W_\mu{}^3 & W_\mu{}^1-iW_\mu{}^2 \\ W_\mu{}^1+iW_\mu{}^2 & W_\mu{}^3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix}\right|^2$$
$$=\frac{g^2v^2}{8}[(W_\mu{}^1)^2+(W_\mu{}^2)^2+(W_\mu{}^3)^2] \tag{14.74}$$

である。ここで $|\quad|^2$ は $(\quad)^\dagger(\quad)$ の略記である。これを通常の質量項 $M^2B_\mu{}^2/2$ と比較すれば，$M=gv/2$ が得られる。すなわち，このラグランジアンは，3 個の質量を持ったゲージ場と，1 個の質量を持ったスカラー場 h を記述する。要約すると，ゲージ場は Nambu (南部)-Goldstone ボソンを喰って質量を獲得し，スカラー自由度は，重いベクトルボソンの縦偏極になったのである。これが Higgs 機構のもう 1 つの例である。

問題 14.13　(14.60) と違い，ϕ を実スカラー場の $SU(2)$ 3 重項としよう。$\mu^2<0$ かつ $\lambda>0$ の場合に，ゲージボソンの中の 2 つは質量を獲得するが，残りの 1 つは質量 0 のままであることを示せ。

ヒント　$SU(2)$ の 3 重項の表現が $(T_k)_{ij}=-i\varepsilon_{ijk}$ であることを確かめて，これを用いよ。

Higgs 機構のおかげで質量 0 の粒子を避けることができた。だが，第二の "奇蹟" が必要だ。基本的な問題は，単に弱ボソンの質量を生成することだけではなく，それを理論の中に組み込んで，なおかつ，くり込み可能性を保つということである。14.5 節で注意したように，ラグランジアンにゲージ質量項をわざわざ持ち込んで強引にゲージ対称性を破ってはいけない，という理由は自明ではない。だがそうすると，得られる (くり込み不可能な) 理論はまったく予言能力を失ってしまう。対称性が自発的に破れたゲージ理論では，ある意味で，依然として対称性が残っているのである。基底状態を選んだことによって，対称性が "隠された" だけのことなのだ。しかも，理論は相変らずくり込み可能である。考えようによっては，これはそう不思議なことではない。すでに Weinberg と Salam によって，その正しさは予想されていた。しかし，その証明はそれほど簡単ではなかった。最終的には，1971 年，'t Hooft によって完全に証明されたが，それは本書の範囲を超える問題である。

上述のような理由から，ゲージ原理が，すべての素粒子相互作用の構造を作り出すのだろう，と広く信じられている。弱い相互作用と電磁相互作用に対する標準模型は，4 つのゲージ場，すなわち，光子と重いボソン $W^\pm$ および Z^0 を

持ったゲージ理論から構成される。ゲージ場 (フェルミオンはもちろん) の質量は，対称性の自発的破れによって生み出されるが，ゲージ場の 1 つ (光子) の質量は 0 であることが保証されている。この理論は，当然また第 12, 13 章の低エネルギー (小さい q^2) 現象論を再現しなければならない。このような理論はくり込み可能で，1 個 (あるいはもっと多いこともあるかもしれない) の Higgs スカラーを含むが，Goldstone ボソンは含まない。この問題が次章の主題となる。

15

Weinberg–Salam 模型，およびそれを超えて

われわれの目的は，重いゲージボソン ($W^{\pm}$, Z^0) を理論に取り入れて，くり込まれた電弱相互作用の理論を作ることである。これは，局所ゲージ不変性を自発的に破ることによって実現できる。その手法の適切な例を 14.9 節に示した。しかし，電弱相互作用のゲージ対称性とは何だろうか。弱い相互作用と電磁相互作用が関与する過程の実験データは，これらの相互作用が弱アイソスピン $SU(2)_L$ および弱ハイパー荷 $U(1)_Y$ 変換に対して不変であることを示している (第 13 章参照)。したがって，第一にしなければならない仕事は，第 13 章の結果から $SU(1)\times U(1)$ 不変なラグランジアンを作り上げることである。

15.1　ふたたび電弱相互作用

はじめに QED を復習しよう。第 6 章でやったように，電磁相互作用の振幅 $(-i\mathscr{M})$は，相互作用

$$\boxed{-iej_\mu{}^{em}A^\mu = -ie(\bar{\psi}\gamma_\mu Q\psi)A^\mu} \qquad U(1)_{em} \tag{15.1}$$

を用いて計算できた。ここで，Q は電荷演算子 (電子に対する固有値 -1) である。引き続き 14.3 節で，この相互作用は，まさに自由なフェルミオンのラグランジアン

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi$$

が，局所ゲージ (位相) 変換

$$\psi \longrightarrow \psi' = e^{i\alpha(x)Q}\psi \tag{15.2}$$

に対して不変であるべし，という要求から出てくることをみた。実際，局所ゲージ不変性を主張すれば，必然的に (14.28) のラグランジアンに到達する：

$$\mathcal{L}=\underbrace{\bar{\psi}(i\gamma^{\mu}\partial_{\mu}-m)\psi}_{\psi\text{ の運動エネルギーと質量}}-\underbrace{e\bar{\psi}\gamma^{\mu}Q\psi A_{\mu}}_{\text{相互作用}}-\underbrace{\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}}_{A_{\mu}\text{ の運動エネルギー}}. \tag{15.3}$$

14.3 節では，電子場だけ考えて電荷演算子 Q のことは考えなかった。しかし，クォーク場，レプトン場をすべて取り入れるには，電荷保存を保証しなければならないから，(15.2)には当然 Q が入る ((15.11) 参照)。したがって，電磁相互作用は，$Q_{\mathrm{e}}=-1$，$Q_{\mathrm{u}}=+2/3$ のように関与する場の電荷に比例する。

弱い相互作用による過程を含む理論を定式化するには，(15.1) を 2 つの基本的相互作用でおきかえなければならない。第一は，3 つのベクトルボソン $\boldsymbol{W}^{\mu}$ と相互作用する 3 重項の弱カレント $\boldsymbol{J}_{\mu}$

$$\boxed{-ig\boldsymbol{J}_{\mu}\cdot\boldsymbol{W}^{\mu}=-ig\bar{\chi}_{L}\gamma_{\mu}\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{W}^{\mu}\chi_{L}} \qquad SU(2)_{L} \tag{15.4}$$

であり，第二は，第 4 番目のベクトルボソン B^{μ} と相互作用するハイパー荷カレント

$$\boxed{-i\frac{g'}{2}j_{\mu}{}^{Y}B^{\mu}=-ig'\bar{\psi}\gamma_{\mu}\frac{Y}{2}\psi B^{\mu}} \qquad U(1)_{Y} \tag{15.5}$$

である ((13.7) 参照)。演算子 $\boldsymbol{T}$ と Y は，それぞれゲージ変換群 $SU(2)_{L}$ および $U(1)_{Y}$ の生成演算子である。これらを一緒にすると，ψ の左成分と右成分に対する $SU(2)\times U(1)$ 変換は次のようになる：

$$\begin{aligned}\chi_{\mathrm{L}}&\longrightarrow\chi_{\mathrm{L}}'=e^{i\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{x})\cdot\boldsymbol{T}+i\beta(x)Y}\chi_{\mathrm{L}},\\ \psi_{\mathrm{R}}&\longrightarrow\psi_{\mathrm{R}}'=e^{i\beta(x)Y}\psi_{\mathrm{R}}.\end{aligned} \tag{15.6}$$

左巻きフェルミオンはアイソスピン 2 重項 χ_{L} を，右手系フェルミオンはアイソスピン 1 重項 ψ_{R} を作る。たとえば，電子とニュートリノに対しては

$$\begin{aligned}&\chi_{\mathrm{L}}=\begin{pmatrix}\nu_{\mathrm{e}}\\ \mathrm{e}^{-}\end{pmatrix}_{\mathrm{L}} && T=\frac{1}{2},\quad Y=-1\\ &\psi_{\mathrm{R}}=\mathrm{e}^{-}{}_{\mathrm{R}} && T=0,\quad Y=-2\end{aligned} \tag{15.7}$$

である((13.15) 参照)。ところが，クォークに対しては

$$\chi_{\mathrm{L}}=\begin{pmatrix}\mathrm{u}\\ \mathrm{d}\end{pmatrix}_{\mathrm{L}} \qquad \psi_{\mathrm{R}}=\mathrm{u}_{\mathrm{R}},\mathrm{d}_{\mathrm{R}}$$

である。右巻き u クォークが含まれるのは，ニュートリノと違ってクォークの質量は有限のため，左右両成分があるからである。

電磁相互作用 (15.1) は (15.4) と (15.5) の中に埋め込まれる。先へ進む前に，そのいきさつを復習しておくのがよいだろう。3 つの群の生成演算子は次の関係を満足する：

$$Q = T^3 + \frac{Y}{2}.$$

したがって

$$j_\mu{}^{em} = J_\mu{}^3 + \frac{1}{2} j_\mu{}^Y$$

である ((13.26) 参照)。つまり，電磁カレントは，(15.4)，(15.5) に出てくる $J_\mu{}^3$ および $j_\mu{}^Y$ という 2 つの中性カレントの 1 次結合である。したがって，2 つの物理的な中性ゲージ場 A_μ と Z_μ は，ゲージ場 $W_\mu{}^3$ と B_μ の 1 次結合で表され，互いに直交している。ただし，その混合角が θ_W である。したがって，中性カレントの相互作用は，(13.21) のように物理的な場を用いて書くことができる：

$$\begin{aligned}-igJ_\mu{}^3 W^{3\mu} - i\frac{g'}{2} j_\mu{}^Y B^\mu &= -i\left[g\sin\theta_W J_\mu{}^3 + g'\cos\theta_W \frac{j_\mu{}^Y}{2}\right] A^\mu \\ &\quad - i\left[g\cos\theta_W J_\mu{}^3 - g'\sin\theta_W \frac{j_\mu{}^Y}{2}\right] Z^\mu \qquad (15.8) \\ &= -iej_\mu{}^{em} A^\mu - \frac{ie}{\sin\theta_W\cos\theta_W}[J_\mu{}^3 - \sin^2\theta_W j_\mu{}^{em}] Z^\mu.\end{aligned}$$

電磁相互作用 (15.1) が右辺に現れるべしという要請が，中性カレント相互作用に特別な性質を与え，その結果，結合定数 g と g' が e と θ_W によって次のように決定される：

$$e = g\sin\theta_W = g'\cos\theta_W. \qquad (15.9)$$

問題 15.1　念のため (15.8) と (15.9) を，本節で述べたことから導いてみよ。

QED のラグランジアン (15.3) が，$U(1)_{em}$ 局所ゲージ不変性を課すことによって得られたように，$SU(2)\times U(1)_Y$ 不変な形を要請することにより，電弱相互作用のラグランジアンを得ることができる。たとえば，電子・ニュートリノの組に対するラグランジアンは次の通りである：

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_1 = \bar{\chi}_L \gamma^\mu &\left[i\partial_\mu - g\frac{1}{2}\boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{W}_\mu - g'\left(-\frac{1}{2}\right)B_\mu\right]\chi_L \\ &+ \bar{e}_R\gamma^\mu[i\partial_\mu - g'(-1)B_\mu]e_R - \frac{1}{4}\boldsymbol{W}_{\mu\nu}\cdot\boldsymbol{W}^{\mu\nu} - \frac{1}{4}B_{\mu\nu}B^{\mu\nu}.\end{aligned} \qquad (15.10)$$

ここで，(15.7) で与えたハイパー荷 $Y_L = -1$ および $Y_R = -2$ を用いた。$\mathcal{L}_1$ は，(15.4) および (15.5) で表される弱アイソスピン相互作用とハイパー荷相互

作用を含んでいる。最後の 2 項は，場 $\boldsymbol{W}_\mu$ の運動エネルギーと自己相互作用((14.67) 参照)，および場 B_μ の運動エネルギーを表す。ただし $B_{\mu\nu}\equiv\partial_\mu B_\nu-\partial_\nu B_\mu$ である。

ゲージ不変性とは，ラグランジアンが各ゲージ群の変換に対して 1 重項として変換するということである。たとえばゲージ群 $U(1)_{em}$ を考えよう。ラグランジアンの中で，場 $\phi_1, \phi_2, \cdots, \phi_n$ の積の項は次のように変換される ((15.2) 参照)：

$$(\phi_1\phi_2\cdots\phi_n) \longrightarrow e^{i\alpha(x)(Q_1+Q_2+\cdots+Q_n)}(\phi_1\phi_2\cdots\phi_n).$$

ゲージ不変性は，ラグランジアンが中性であるべきことを要求する。すなわち，$U(1)_{em}$ 1 重項として変換するということである。したがって

$$Q_1+Q_2+\cdots+Q_n=0 \tag{15.11}$$

が成り立つが，これは電荷保存にほかならない。

ここまではうまくいった。ところが，$\mathcal{L}_1$ は質量 0 のゲージボソンと，質量 0 のフェルミオンを記述していることに注意しなければならない。$M^2B_\mu B^\mu/2$ や $-m\bar{\psi}\psi$ のような質量項はゲージ不変ではないから，$\mathcal{L}_1$ につけ加えることはできない。質量 0 のゲージボソンの要求はすでにわかっている (たとえば 14.3 節の光子)。電子の質量項は次のようになる：

$$\begin{aligned} -m_e\bar{e}e &= -m_e\bar{e}\left[\frac{1}{2}(1-\gamma^5)+\frac{1}{2}(1+\gamma^5)\right]e \\ &= -m_e(\bar{e}_R e_L+\bar{e}_L e_R). \end{aligned} \tag{15.12}$$

e_L はアイソスピン 2 重項，e_R は 1 重項のメンバーだから，この質量項がゲージ不変性を破っていることは明白である。

ゲージ不変な方法で粒子の質量を生成するためには，Higgs 機構を使わなければならない。つまり，ゲージ対称性を自発的に破るのである。これが，理論が依然としてくり込み可能であるという際立って素晴しい点なのだ。

15.2　Higgs 場の選択

$W^\pm$ と Z^0 が質量を獲得し，光子は質量 0 のままであるように Higgs 場を定式化したい。これを実現するために 4 つの実スカラー場 ϕ_i を導入しよう。$\mathcal{L}_1$ に次のようなスカラー場に対する $SU(2)\times U(1)$ 不変なラグランジアンを付け加えなければならない：

$$\mathcal{L}_2=\left|\left(i\partial_\mu-g\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{W}_\mu-g'\frac{Y}{2}B_\mu\right)\phi\right|^2-V(\phi). \tag{15.13}$$

ここで$|\ \ |^2 \equiv (\ \ )^\dagger(\ \ )$の意味である。$\mathcal{L}_2$の構造は14.9節で説明した((14.65)参照)。一番経済的な選び方は，4つの場を，ハイパー荷 $Y=1$ のアイソスピン2重項にまとめることである：

$$\boxed{\phi=\begin{pmatrix}\phi^+\\ \phi^0\end{pmatrix}} \qquad ここで \quad \begin{aligned}\phi^+ &\equiv (\phi_1+i\phi_2)/\sqrt{2}\\ \phi^0 &\equiv (\phi_3+i\phi_4)/\sqrt{2}\end{aligned} \tag{15.14}$$

実際，これは1967年Weinberg自身が最初にとったものである。これで電弱相互作用の標準(あるいはミニマル)模型が完成する。これがWeinberg-Salam模型と呼ばれる模型である。

ゲージボソンの質量を生成するために，(14.66)で$\mu^2<0$かつ$\lambda>0$としたHiggsポテンシャル$V(\phi)$を使って，$\phi(x)$の真空期待値ϕ_0を選ぶ。そのうまい選び方は，(14.70)の

$$\phi_0 \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\ v\end{pmatrix} \tag{15.15}$$

である。

なぜ，$Y=1$複素スカラー場のアイソスピン2重項と，(15.15)の真空期待値ϕ_0が，当面の問題に適しているのだろう。対称性を破るϕ_0なら，どんなものを選んでも，かならず対応するゲージボソンの質量を生成する。しかし，ϕ_0が依然としてゲージ変換のある部分群に対して不変ならば，その部分群に付随するゲージボソンの質量は0のままである。ところで，$T=1/2$，$T^3=-1/2$，$Y=1$のϕ_0は$SU(2)$および$U(1)_Y$ゲージ対称性を破る。しかしϕ_0は中性だから，生成演算子

$$Q=T^3+\frac{Y}{2}$$

の$U(1)_{em}$対称性は依然として破れない。すなわち

$$Q\phi_0=0 \tag{15.16}$$

である。したがって，任意の$\alpha(x)$に対して

$$\phi_0 \longrightarrow \phi_0{}'=e^{i\alpha(x)Q}\phi_0=\phi_0$$

が成り立つ。つまり，真空は変換$U(1)_{em}$に対して不変であり，光子の質量は依然として0である。$SU(2)\times U(1)_Y$の4個の生成演算子$\boldsymbol{T}$, Yから作られる組み合わせのうち，Qだけが(15.16)を満足する。他の3個は対称性を破って，質量を持ったゲージボソンを作る。いいかえれば，電荷保存のために中性スカラーだけに真空期待値を持たせることができる。こうして(15.14)のように，電

荷を指定したスカラー場に対して真空 (15.15) を選んだのである。

同じ Higgs アイソスピン 2 重項が，フェルミオン質量の生成にも本質的な役割を演ずる (15.4 節参照)。

15.3　ゲージボソンの質量

14.9 節とまったく同様に，$\phi(x)$ の真空期待値 ϕ_0 をラグランジアンに代入して，ゲージボソンの質量を同定する。(15.13) で質量に関係する項は次の通りである：

$$\left|\left(-ig\frac{\boldsymbol{\tau}}{2}\cdot\boldsymbol{W}_\mu-\frac{i}{2}g'B_\mu\right)\phi\right|^2=\frac{1}{8}\left|\begin{pmatrix} gW_\mu{}^3+g'B_\mu & g(W_\mu{}^1-iW_\mu{}^2)\\ g(W_\mu{}^1+iW_\mu{}^2) & -gW_\mu{}^3+g'B_\mu\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\ v\end{pmatrix}\right|^2$$

$$=\frac{1}{8}v^2g^2[(W_\mu{}^1)^2+(W_\mu{}^2)^2]+\frac{1}{8}v^2(g'B_\mu-gW_\mu{}^3)(g'B^\mu-gW^{3\mu})$$

$$=\left(\frac{1}{2}vg\right)^2W_\mu{}^+W^{-\mu}+\frac{1}{8}v^2(W_\mu{}^3,B_\mu)\begin{pmatrix} g^2, & -gg'\\ -gg', & g'^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}W^{3\mu}\\ B^\mu\end{pmatrix}. \tag{15.17}$$

ここで，$W^\pm=(W^1\mp iW^2)/\sqrt{2}$ を用いた。第 1 項と荷電ボソンの質量項 $M_W{}^2W^+W^-$ を比較して

$$\boxed{M_W=\frac{1}{2}vg} \tag{15.18}$$

が得られる。残りの項は $W_\mu{}^3$ と B_μ に関して非対角的である：

$$\frac{1}{8}v^2[g^2(W_\mu{}^3)^2-2gg'W_\mu{}^3B^\mu+g'^2B_\mu{}^2]=\frac{1}{8}v^2[gW_\mu{}^3-g'B_\mu]^2+0[g'W_\mu{}^3+gB_\mu]^2. \tag{15.19}$$

(15.17) に現れる 2 行 2 列の行列の固有値の 1 つは 0 である。それを (15.19) に場の 1 次結合の形で含めたが，第 1 項の 1 次結合とは直交している。さて，物理的な場 Z_μ と A_μ は質量行列を対角化する。したがって，(15.19) は

$$\frac{1}{2}M_Z{}^2Z_\mu{}^2+\frac{1}{2}M_A{}^2A_\mu{}^2$$

と同定しなければならない。ここで 1/2 は，中性ベクトルボソンの質量項に特有の因子である (問題 14.4 参照)。場を規格化して

$$A_\mu=\frac{g'W_\mu{}^3+gB_\mu}{\sqrt{g^2+g'^2}}\qquad \text{ここで}\quad M_A=0 \tag{15.20}$$

$$Z_\mu=\frac{gW_\mu{}^3-g'B_\mu}{\sqrt{g^2+g'^2}},\ \text{ここで}\quad \boxed{M_Z=\frac{1}{2}v\sqrt{g^2+g'^2}} \tag{15.21}$$

が得られる。

以上の結果を第 13 章で導入した記号で表しておこう。(13.23) か (15.9) のどちらかを使って

$$\frac{g'}{g}=\tan\theta_W \tag{15.22}$$

と書くことができる。θ_W を使えば，(15.20)，(15.21) は次のようになる：

$$\begin{aligned} A_\mu &= \cos\theta_W B_\mu+\sin\theta_W W_\mu{}^3, \\ Z_\mu &= -\sin\theta_W B_\mu+\cos\theta_W W_\mu{}^3. \end{aligned} \tag{15.23}$$

さらに (15.18)，(15.21) を使えば

$$\boxed{\frac{M_W}{M_Z}=\cos\theta_W} \tag{15.24}$$

が得られる。

$M_Z \neq M_W$ は $W_\mu{}^3$ と B_μ の場が混り合うためである。こうして，質量の固有状態は，自動的に質量 0 の A_μ と質量を持った Z_μ の場となり，かつ $M_Z>M_W$ である。$\theta_W=0$ の極限では $M_Z=M_W$ となることがわかる。この模型は，光子は質量 0 であるべしという要求で作ったのだから，$M_A=0$ は計算の整合性の検証であって予言ではない。しかし，(15.24) の M_W/M_Z に対する結果は標準模型 (Higgs 2 重項を入れた) の予言である。Higgs に関して，もっと複雑な選び方をすれば，異なった質量の関係式が得られる (問題 15.4 参照)。

したがって，Higgs 2 重項の入った Weinberg-Salam 模型では，(13.36) のパラメター ρ は次のように決まる：

$$\rho\equiv\frac{M_W{}^2}{M_Z{}^2\cos^2\theta_W}=1.$$

ρ は荷電弱カレントと中性弱カレントの相対的強さを決めるパラメターであり，実験データは，小さい誤差範囲で $\rho=1$ である。

問題 15.2　Weinberg-Salam 模型で次の関係式が成り立つことを示せ：

$$\frac{1}{2v^2}=\frac{g^2}{8M_W{}^2}=\frac{G}{\sqrt{2}}. \tag{15.25}$$

これから第 12 章の G の実験値を用いて，$v=246\,\mathrm{GeV}$ になることを確かめよ。また，質量公式

$$M_W=\frac{37.3}{\sin\theta_W}\,\mathrm{GeV}, \qquad M_Z=\frac{74.6}{\sin 2\theta_W}\,\mathrm{GeV} \tag{15.26}$$

を導いて，M_W, M_Z の下限を求めよ。$\sin^2\theta_W$ の実験値を用いて，M_W, M_Z の値を予測せよ。

ごく最近 (1983 年)，W と Z が CERN の反陽子・陽子コライダーで，次のような反応によって発見された：

$$\bar{\mathrm{p}}\mathrm{p} \longrightarrow \mathrm{W}^{\pm}\mathrm{X} \longrightarrow (\mathrm{e}^{\pm}\nu)\mathrm{X},$$
$$\bar{\mathrm{p}}\mathrm{p} \longrightarrow \mathrm{Z}^{0}\mathrm{X} \longrightarrow (\mathrm{e}^{+}\mathrm{e}^{-})\mathrm{X}.$$

ここで，X はこの高エネルギー正面衝突で作られたすべての他の粒子を表す。放出された崩壊電子と陽電子の運動量分布を調べて，W, Z の質量の実験値は

$$M_{\mathrm{W}} = 81 \pm 2\,\mathrm{GeV} \quad (80.1 \pm 0.4,\ 1994\ 年),$$
$$M_{\mathrm{Z}} = 93 \pm 2\,\mathrm{GeV} \quad (91.188 \pm 0.007,\ 1994\ 年)$$

となった。これは電荷相互作用の標準模型の予言と驚くほど一致している。

問題 15.3 Higgs スカラー場 $\phi(x)$ がアイソスピン $T=3$, ハイパー荷 $Y=-4$ であると仮定し，その中性成分 $\phi^0(T^3=2)$ が真空期待値 $v/\sqrt{2}$ を生ずるとすれば

$$M_{\mathrm{W}}{}^2 = \frac{g^2}{2}\phi^{\dagger}(T^+T^- + T^-T^+)\phi = 4g^2v^2 \tag{15.27}$$

となることを示せ。さらに，標準模型の場合とまったく同様に，$M_{\mathrm{W}}/M_{\mathrm{Z}} = \cos\theta_{\mathrm{W}}$ が成り立つことを示せ。(しかし，フェルミオンの質量を生成するには Higgs 2 重項が必要になる。これに関しては次の 15.4 節参照。)

問題 15.4 Higgs スカラーの表現がいくつか $(i=1,2,\cdots,N)$ あって，それらの電荷 0 の成分が，真空期待値 v_i を獲得すると仮定すれば，次の関係式が成り立つことを示せ：

$$\rho \equiv \left(\frac{M_{\mathrm{W}}}{M_{\mathrm{Z}}\cos\theta_{\mathrm{W}}}\right)^2 = -\frac{\sum_i v_i{}^2\left[T_i(T_i+1) - \frac{1}{4}Y_i{}^2\right]}{\sum \frac{1}{2}v_i{}^2 Y_i{}^2}. \tag{15.28}$$

ここで，T_i, Y_i はそれぞれ表現 i の弱アイソスピンおよびハイパー荷である。もし，$Y_i=+1$ の Higgs 2 重項だけが存在するときは，$\rho=1$ になることを示せ。
[ヒント] (15.27) を用い，中性スカラーは $T^3=Y/2$ であることに注意する。

問題 15.5 (15.13) のスカラー場のラグランジアンは，$\mathrm{hW^+W^-}$ および $\mathrm{hhW^+W^-}$ の形の Higgs ボソンの相互作用項を含んでいる。

$$\phi = \sqrt{\frac{1}{2}}\begin{pmatrix} 0 \\ v+h(x) \end{pmatrix} \tag{15.29}$$

を用いて ((14.71) 参照)，標準模型では，これらの相互作用バーテックス因子はそれぞれ

$$igM_{\mathrm{W}} \quad および \quad \frac{1}{4}ig^2 \tag{15.30}$$

となることを示せ。また，hZZ および hhZZ のバーテックス因子を決定せよ。

15.4　フェルミオンの質量

もとのラグランジアン (15.10) では，ゲージ不変性のためにフェルミオンの質量項 $-m\bar{\psi}\psi$ は許されない。標準模型の魅力的なところは，$W^{\pm}$ と Z^0 の質量を生成したその同じ Higgs 2 重項が，レプトンとクォークにも質量を与えることができるという点である。たとえば，電子質量を生成するには，ラグランジアンに次のような $SU(2)\times U(1)$ 不変な項を取り入れる：

$$\mathcal{L}_3 = -G_e\left[(\bar{\nu}_e, \bar{e})_L\begin{pmatrix}\phi^+\\ \phi^0\end{pmatrix}e_R + \bar{e}_R(\phi^-, \bar{\phi}^0)\begin{pmatrix}\nu_e\\ e\end{pmatrix}_L\right]. \tag{15.31}$$

Higgs 2 重項は，まさに $\bar{e}_L e_R$ と相互作用できる $SU(2)\times U(1)$ の量子数を持っている (図 15･1 参照)。対称性を自発的に破って

$$\phi = \sqrt{\frac{1}{2}}\begin{pmatrix}0\\ v+h(x)\end{pmatrix}$$

を (15.31) に代入する。中性 Higgs 場 $h(x)$ は，対称性が自発的に破れた後に残った Higgs 2 重項 (15.14) の唯一の名残りである。他の 3 つの場はゲージ化されてしまう ((14.72) 参照)。ϕ を代入すればラグランジアンは次のようになる：

$$\mathcal{L}_3 = -\frac{G_e}{\sqrt{2}}v(\bar{e}_L e_R + \bar{e}_R e_L) - \frac{G_e}{\sqrt{2}}(\bar{e}_L e_R + \bar{e}_R e_L)h.$$

ここで G_e を

$$m_e = \frac{G_e v}{\sqrt{2}} \tag{15.32}$$

と選べば，(15.12) を使って，望み通り電子の質量が得られる：

$$\mathcal{L}_3 = -m_e\bar{e}e - \frac{m_e}{v}\bar{e}eh. \tag{15.33}$$

しかし，注意すべき点は，G_e は任意だから，電子質量の実際の値を予言するこ

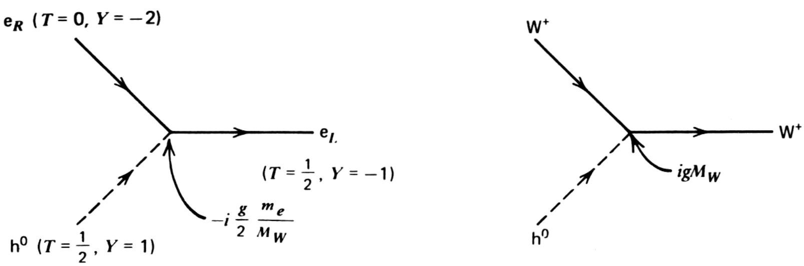


図 15･1　標準模型における Higgs スカラー h^0 と電子およびWボソンとの結合

とはできないということである。質量項以外にラグランジアンは Higgs スカラーと電子との相互作用項を含んでいる。$v=246$ GeV は大きいので，結合定数 m_e/v は非常に小さくなり，これまでのところ，実験にかかるほどの効果を電弱相互作用に与えてはいない。he^+e^- のバーテックス因子は図 15·1 に示してあるが，同図の (15.30) に対応する hW^+W^- はずっと強い相互作用である。

クォークの質量も同様にして生成される。ただ 1 つ新しい点は，クォーク 2 重項の上の成分に対しても質量を生成しなくてはならないことである。それには ϕ から新しい Higgs 2 重項を作らなければならない：

$$\phi_c=-i\tau_2\phi^*=\begin{pmatrix}-\bar{\phi}^0\\ \phi^-\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{破れ}]{\text{対称性の}}\sqrt{\frac{1}{2}}\begin{pmatrix}v+h\\ 0\end{pmatrix}. \tag{15.34}$$

$SU(2)$ の特別な性質のために，ϕ_c は ϕ とまったく同じ変換をする。この変換性については (2.41) 参照（ただし，ϕ_c の弱ハイパー荷は ϕ と逆で $Y=-1$）。したがって，ラグランジアンに対するゲージ不変な寄与を次のように作ることができる：

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_4&=-G_{\rm d}(\bar{\rm u}\ \ \bar{\rm d})_{\rm L}\begin{pmatrix}\phi^+\\ \phi^0\end{pmatrix}d_{\rm R}-G_{\rm u}(\bar{\rm u}\ \ \bar{\rm d})_{\rm L}\begin{pmatrix}-\bar{\phi}^0\\ \phi^-\end{pmatrix}{\rm u}_{\rm R}+\text{Hermite 共役項}\\ &=-m_{\rm d}\bar{\rm d}{\rm d}-m_{\rm u}\bar{\rm u}{\rm u}-\frac{m_{\rm d}}{v}\bar{\rm d}{\rm dh}-\frac{m_{\rm u}}{v}\bar{\rm u}{\rm uh}.\end{aligned} \tag{15.35}$$

ここでは，クォーク 2 重項 $({\rm u},{\rm d})_{\rm L}$ だけを考えたが，弱い相互作用は $(\bar{\rm u},{\rm d}')_{\rm L}$，$({\rm c},{\rm s}')_{\rm L}$，$\cdots$ などのクォーク 2 重項にも働く。ダッシュはフレーバーの固有状態の 1 次結合を表す（12.11，12.12 節参照）。したがって，12.12 節の記号を使えば，クォークのラグランジアンの形は次のようになる：

$$\mathcal{L}_4=-G_{\rm d}{}^{ij}(\bar{\rm u}_i,\bar{\rm d}_i{}')_{\rm L}\begin{pmatrix}\phi^+\\ \phi^0\end{pmatrix}d_{j\rm R}-G_{\rm u}{}^{ij}(\bar{\rm u}_i,\bar{\rm d}_i{}')_{\rm L}\begin{pmatrix}-\bar{\phi}^0\\ \phi^-\end{pmatrix}u_{j\rm R}+\text{Hermite 共役項}. \tag{15.36}$$

ここで $i,j=1,2,\cdots,N$ で，N はクォーク 2 重項の数である。12.12 節と同様の手順にしたがって，クォークのラグランジアンを対角化することができる：

$$\mathcal{L}_4=-m_{\rm d}{}^i\bar{\rm d}_i{\rm d}_i\left(1+\frac{h}{v}\right)-m_{\rm u}{}^i\bar{\rm u}_i\bar{\rm u}_i\left(1+\frac{h}{v}\right). \tag{15.37}$$

この場合も質量は勝手な値がとれる結合定数に依存しているので，理論から予言することはできない。このラグランジアンは，Higgs 相互作用がフレーバーを

保存し，$K_L \to \mu^+\mu^-$ のような過程には寄与しないという望ましい結果を与える。

こういう魅力的な性質を持っているとはいえ，Higgs の関与する部分が，電弱ゲージ理論の中でもっとも不満足，かつ未確定な側面だといってよいだろう。Higgs 2 重項の最小限の選び方で，ゲージボソン，フェルミオンいずれの質量を生成するにも十分ではあるが，フェルミオンの質量は，理論に現れる単なるパラメターであって，理論により予言されるものではない。その実験値を入れなければならない。しかし，プラスの面は，Higgs とフェルミオンの相互作用が，フェルミオンの質量に比例することである。この予言は，もし Higgs 粒子が実際に観測されさえすれば，まさに実験的に検証されうるものである。第二の欠点は，中性 Higgs メソン自身の質量 m_h も予言できないという点である。実効ポテンシャルの最初の 2 項

$$V(\phi)=\mu^2\phi^\dagger\phi+\lambda(\phi^\dagger\phi)^2+\cdots \tag{15.38}$$

を用いて

$$m_h{}^2=2v^2\lambda \tag{15.39}$$

が得られる。

問題 15.6 (14.58) を参照して (15.39) を導け。

v の値は固定できるから，m_h が大きければ大きいほど λ の値は大きい。摂動展開が意味を持つとすれば，m_h は数百 GeV より小さいはずだ。他方 m_h があまり小さいと，(15.38) に対する 1 閉線補正が，$v \neq 0$ における意味のある最小値をみえなくしてしまうだろう。理論的な下限としては $m_h \gtrsim 10$ GeV が得られている。もちろん，Higgs 粒子の実験的確認が，何よりも待ち望まれるところである。

Higgs 粒子は，フェルミオンとの相互作用の強さが，フェルミオンの質量に比例するという特別な性質を持っているために，実験的にみつけるのは確かに難しい。実験的にもっとも扱いやすい粒子は軽いフェルミオン (電子，および陽子や中性子内の u, d クォーク) である。これらの粒子と Higgs 粒子との相互作用は非常に弱い。もっと重いフェルミオン (τ, c, b, t) は，Higgs とは相互作用しやすいが，それらのフェルミオン自身を作るのが難しい。

15.5 標準模型：ラグランジアンの最終的な形

標準 (Weinberg-Salam) 模型のしめくくりとして，ラグランジアンの構成要素の 1 つ 1 つを，まとめて記しておこう。完全なラグランジアンは次の通りで

ある：

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}\boldsymbol{W}_{\mu\nu}\cdot\boldsymbol{W}^{\mu\nu} - \frac{1}{4}B_{\mu\nu}B^{\mu\nu}$$
{ W^±, Z, γ の運動エネルギーおよび自己相互作用

$$+\overline{L}\gamma^{\mu}\left(i\partial_{\mu} - g\frac{1}{2}\boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{W}_{\mu} - g'\frac{Y}{2}B_{\mu}\right)L$$
$$+\overline{R}\gamma^{\mu}\left(i\partial_{\mu} - g'\frac{Y}{2}B_{\mu}\right)R$$
{ レプトンとクォークの運動エネルギー，およびそれらと W^±, Z, γ との相互作用

$$+\left|\left(i\partial_{\mu} - g\frac{1}{2}\boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{W}_{\mu} - g'\frac{Y}{2}B_{\mu}\right)\phi\right|^2 - V(\phi)$$
{ W^±, Z, γ, Higgs の質量と結合

$$-(G_1\overline{L}\phi R + G_2\overline{L}\phi_c R + \text{Hermite 共役項}). \tag{15.40}$$
{ レプトンおよびクォークの質量と Higgs との結合

L は左巻きフェルミオン（レプトンまたはクォーク）2 重項，R は右巻きフェルミオン 1 重項を表す。

15.6　電弱相互作用はくり込み可能だ

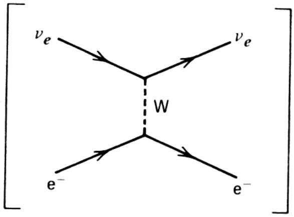
もっとも簡単な Higgs 模型が正しいかどうかは，将来の実験が判定してくれるだろう。しかし，Higgs スカラーを導入した動機は，まったく理論的なものであって，今のところ，この粒子が現実に存在するという証拠はない，ということを忘れてはならない。Higgs の重要性は，それが，電弱ゲージ理論のくり込み可能性を損うことなく，弱ボソンの質量を生成するという点にある（14.5 節参照）。理論がくり込み可能であるということは見過ごしてはならない点である。それが最終的に 't Hooft によって証明されたのは，模型が出されてから 4 年後のことであった。

弱過程の最低次の振幅の構造は，くり込みができそうもないようにみえる。(12.60) の断面積を考えよう。

$$\sigma(\nu_e e \to \nu_e e) = \frac{G^2 s}{\pi}. \tag{15.41}$$

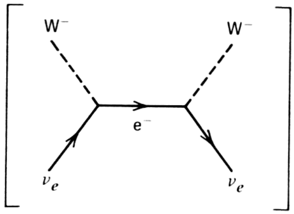
これは $s \to \infty$ で発散する。くわしく調べてみると（たとえば，Bjorken-Drell (1964)，または Pilkuhn (1979) 参照），この $s \to \infty$ で発散する振舞いは確率の保存と矛盾する。W ボソンに質量を与えれば，この発散は除くことができて，

s が大きい場合，次のようになることを示すことができる：

σ 

$$= \frac{G^2 M_W^2}{\pi} \tag{15.42}$$

ところが，W ボソンを持ち込むと，W 自身が持つ問題が起きてくる。というのは，今度は，断面積

σ 

$$= \frac{G^2 s}{3\pi} \tag{15.43}$$

を考えなければならないが，これは (15.41) と同じように s の大きいところで発散する。ゲージ理論の美しい構造が垣間見えるのは，まさにこの点である。$\nu_e W^-$ 散乱は，第 2 の Feynman 図，図 15·2 を通しても起こる。しかも，実際，標準模型の中性カレント相互作用は，この寄与が，ちょうど第 1 の Feynman 図から出る発散を打ち消すという仕掛けになっている。ここで，中性カレントを導入しなくてはならない，と結論したくなるだろう。ところが，これはまったく正しくない。原理的には，新しい重い電子を導入することもできるだろう。そうすれば，(15.43) の Feynman 図に対して新しいレプトンを交換する第 2 の図が得られ，2 つの Feynman 図の寄与同士で発散が打ち消される。これは GIM 機構で，第 2 の u クォーク (c クォーク) を導入した事情を思い出させる。しかし，GIM と違い，重いレプトンという選択は実験的に支持されない。

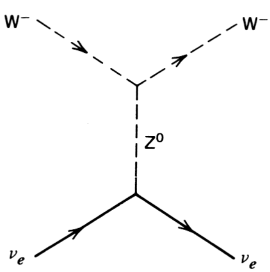


図 15·2 $\nu_e W^-$ 散乱に寄与する中性カレント

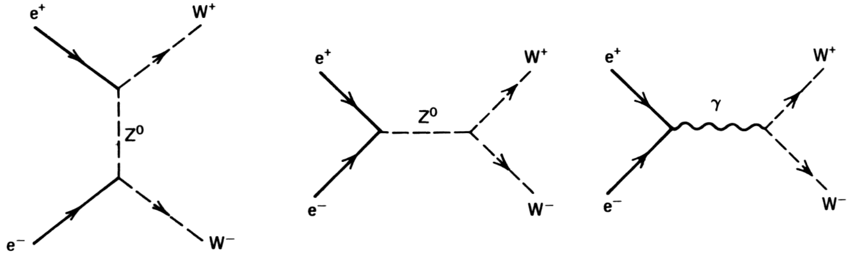
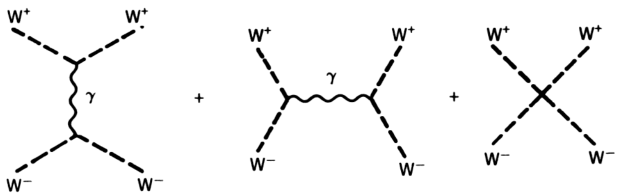


図 15·3　$e^+e^- \to W^+W^-$ に対する 3 つの寄与

反応 $e^-e^+ \to W^-W^+$ は，ゲージボソンの自己相互作用が有限な答えを保証するもう 1 つの例である。図 15·3 の個々の図は発散するが，全部加えると有限になる。

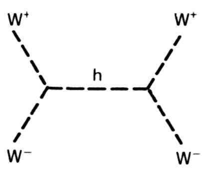
最後の例として，荷電 W ボソンの散乱を考えよう：



直接計算すれば，個々の図は $s^2/M_W{}^4$ のように発散するが，全部加えたものは，もっと緩い発散になる：

$$-i\mathcal{M}(W^+W^- \to W^+W^-) \sim s/M_W{}^2, \qquad s \to \infty$$

これと似た Z^0 交換の図を導入したとしても，全部の Feynman 図からの寄与の和は依然として $s/M_W{}^2$ のように発散する。重いレプトンは発散を救えない。したがって，唯一の解は，スカラー粒子を導入して，下のような図からの寄与を加えて，残っている発散を消すことである。ここで h はまさに Higgs 粒子である。もしも以前に，Higgs 粒子を，重いボソン質量を生成するために導入してい



なかったとすれば，今，それをくり込み可能性を保証するために考え出さなければならないのだ。この点をくわしく調べると，Higgs の相互作用の強さが質量に比例するという，おなじみの結果が明らかになってくる。結局は，Higgs 粒子は，今のところ実験でみつかっていないとくり返すことになる。これは，われわれが正しい実験手段を用いていないためか，あるいは，Higgs は重すぎて，現存の加速器では作ることができないためかもしれない。ことによると，素粒子の場として存在しないのではないか，とも考えられる。ここで導入した Higgs "粒子" は，もっと複雑な対象であって，たとえば，まだ理論の中に取り込まれていない他の粒子の束縛状態に対応するものなのかもしれない。

興味ある読者は，本節と前節の計算をきちんと実行してみるとよい。それには，たとえば，Llewellyn Smith (1974)，Abers and Lee (1973) や Bernstein (1974) が役に立つだろう。

上に述べたいくつかの例から，いろいろな粒子間の相互作用が密接に関連しあって，いろいろな発散が "うまく" 打ち消し合うような結果になっていることが明らかになった。したがって，電弱相互作用の理論という以上，次の 2 つの要求を満たさなければならない。(1) 第 12 章および第 13 章の現象論を再現すること，(2) いろいろな場の相互作用の間に正しい関係が成り立って，高エネルギーにおいて望ましい振舞いが得られること。Weinbeg-Salam 模型 (15.40) は，この目的にかなうもっとも簡単な模型である。

実際，'t Hooft は理論がくり込み可能であるためには，Yang-Mills 理論でなければならない，すなわち，局所ゲージ不変な理論でなければならないことを示した。このような高い対称性がある場合にのみ，各次数ごとに発散が系統的に打ち消し合うのである。

15.7　大統一理論

$SU(2)\times U(1)$ 電弱ゲージ理論は驚くほどよく実験と合った。しかし，電磁相互作用と弱い相互作用は，本当に統一されたのだろうか。ゲージ群 $SU(2)\times U(1)$ は 2 つの独立なゲージ変換の積である。すなわち，$SU(2)$ 群の結合定数は g, $U(1)$ 群のそれは g' である。したがって，これら 2 つの結合定数は理論で関係づけられているわけではない。第 13 章で知ったように，その比

$$\frac{g'}{g}=\tan\theta_{\mathrm{W}} \tag{15.44}$$

は実験的に決めなければならないのである。

$SU(2)$ と $U(1)$ のゲージ変換が，もっと大きい変換群 G の中に埋め込まれた場合に限り，g と g' とはゲージ理論によって関係づけることができる。形式的に書けば

$$G \supset SU(2) \times U(1) \tag{15.45}$$

である。群 G の要素である新しい変換が，今まで無関係だったゲージ変換の部分群 $SU(2)$ と $U(1)$ を関係づけるのである。したがって，g と g' は，ある数 (実際は群 G の Clebsch-Gordan 係数) で関係づけられるが，その値は，"統一する群"G の選び方による。"窮極的" 理論を求めて，強い相互作用を電弱 $SU(2) \times U(1)$ 相互作用と統一しようと試みるのはもっともなことであろう。つまり，強い相互作用をうまく記述できるカラーゲージ群 $SU(3)$ も含む群 G を探そうというわけだ。このような "大統一群"G が存在すると考えてみよう。すると (15.45) は，大統一群

$$G \supset SU(3) \times SU(2) \times U(1) \tag{15.46}$$

に拡張されるであろう。G の中のゲージ変換も，電弱相互作用の結合定数 g, g' とカラー結合定数 α_s とを互いに関係づける。こうして，すべての相互作用が 1 個の結合定数 g_Gだけを持つ大統一理論 (GUT) によって記述されるのである。いったんゲージ群 G がみつかれば，すべての結合定数は，GUT の結合定数 g_G とある特別な仕方で関係することになる。

この統一は図 15・4 に示してあるが，同図では $SU(3), SU(2), U(1)$ 部分群に関係する結合定数を $g_i(Q)$ $(i=3, 2, 1)$ と記してある。図からゲージ結合定数は，各相互作用に特有の運動量 (あるいは距離 $1/Q$) に依存するという事実に気がつくだろう。非 Abel 群の結合定数 $g_2(Q)$ と $g_3(Q)$ は漸近的自由であるが，Abel 群の結合定数 $g_1(Q)$ は，電磁気における普通の電荷遮蔽と同様に，運動量 Q が大きくなるにつれて増大していく。図から示唆されるように，ある大きな運動量スケール (あるいは短距離) $Q=M_X$ において，3 つの結合定数は，1 個の大統一結合定数 g_Gに一致してしまう。すなわち，$Q \geq M_X$ では

$$g_i(Q) = g_G(Q) \tag{15.47}$$

となり，群 G が結合定数 g_G の統一相互作用を記述することになる。Q が M_X 以下になると $g_i(Q)$ は分岐して，現象論的結合定数 g, g' および α_s になっていく。これが $Q \simeq \mu \simeq 10\,\text{GeV}$，あるいはこのエネルギー領域において，現在，実験で観測されている相互作用を記述するのである。

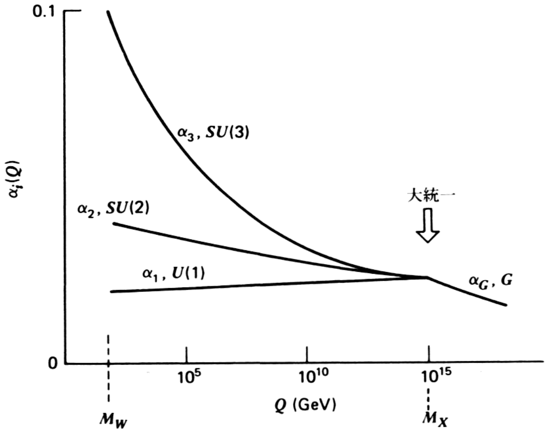


図 15·4　$\alpha_i \equiv g_i{}^2/4\pi$ の Q による変化。非常な近距離 $1/Q \approx 1/M_X$ における強い相互作用 $[SU(3)_{\text{color}}]$ と電弱相互作用 $[SU(2)_L \times U(1)_Y]$ の予想される大統一

慣習的に結合定数を選べば次の関係が得られる：

$$\alpha_s(Q) = \frac{g_3{}^2(Q)}{4\pi},$$
$$g(Q) = g_2(Q), \tag{15.48}$$
$$g'(Q) = \frac{1}{C} g_1(Q).$$

ここで，定数 C は群 G の Clebsch-Gordan 係数である。(15.44) は g_1 と g_2 で表せば

$$\frac{1}{C}\frac{g_1(Q)}{g_2(Q)} = \tan\theta_W(Q) \tag{15.49}$$

となる。したがって，$g_1 = g_2$ が成り立つ $Q \geq M_X$ においては，C が Weinberg 角 θ_W を決定する。

群 G が存在すると仮定すれば，$Q \simeq \mu$ で結合定数の現象論的な値を使って，相互作用が統一される質量 M_X を求めることができる。これができるのは，結合定数 $g_i(Q)$ の Q 依存性がゲージ理論によって規定されているからである（第7章参照)。たとえば，α_s の Q 依存性は (7.63) で与えられる。(15.48) を用いて α_s を g_3 で置き換えれば，簡単な変形をして (7.63) は次のようになる：

$$\frac{1}{g_3{}^2(\mu)} = \frac{1}{g_3{}^2(Q)} + 2b_3 \log\frac{Q}{\mu}. \tag{15.50}$$

ここで

$$b_3=\frac{1}{(4\pi)^2}\left(\frac{2}{3}n_f-11\right) \tag{15.51}$$

で，n_f はクォークフレーバーの数である。$Q=M_X$ で $g_3=g_2$ だから，(15.50) は次式で $i=3$ とおいたものになっている：

$$\boxed{\frac{1}{g_i^2(\mu)}=\frac{1}{g_G^2}+2b_i\log\frac{M_X}{\mu}.} \tag{15.52}$$

この関係式は，もちろん $SU(2)$ や $U(1)$ の結合定数に対してもそのまま成り立つ((15・47) 参照)。図 15・4 で，3 つの結合定数 $g_i(Q)$ が，それぞれ違った道をたどって g_G に到達しているのは，(15.52) の b_i の値が違っているためである。すなわち，

$$b_1=\frac{1}{(4\pi)^2}\left(\frac{4}{3}n_g\right), \tag{15.53 a}$$

$$b_2=\frac{1}{(4\pi)^2}\left(-\frac{22}{3}\right)+b_1, \tag{15.53 b}$$

$$b_3=\frac{1}{(4\pi)^2}(-11)+b_1. \tag{15.53 c}$$

ここで n_g はフェルミオンの族(または世代)の数，すなわち (12.118) の N である。b_3 は (15.51) にほかならない。実際 $SU(N)$ の場合は

$$b_N=\frac{1}{(4\pi)^2}\left[-\frac{11}{3}N+\frac{4}{3}n_g\right] \tag{15.54}$$

である。この第 1 項と第 2 項は，それぞれゲージボソンおよびフェルミオンの閉線に対応している((7.58) 参照)。これ以上の議論や参考文献については Langacker (1981) を見られたい。

結合定数の Q 依存性がわかれば，M_X はすぐに求められる。(15.52) で $i=1$, 2, 3 とおいた 3 つの式から n_g と g_G を消去して，(15.53) を用いて特別な形の 1 次結合を作る：

$$\frac{C^2}{g_1^2}+\frac{1}{g_2^2}-\frac{(1+C^2)}{g_3^2}=2\left[C^2b_1+b_2-(1+C^2)b_3\right]\log\frac{M_X}{\mu}. \tag{15.55}$$

ここで $g_i^2=g_i^2(\mu)$ である。左辺をこう書いたのは，e^2 と g_3^2，すなわち α と α_s で表したいからである。実際，(15.48)，(13.23) を用いると

$$\frac{C^2}{g_1^2}+\frac{1}{g_2^2}=\frac{1}{g'^2}+\frac{1}{g^2}=\frac{1}{e^2} \tag{15.56}$$

が成り立つ。(15.53) の b_j の表式を (15.55) に代入して次の関係を得る：

$$\log\frac{M_X}{\mu}=\frac{3(4\pi)^2}{22(1+3c^2)}\left[\frac{1}{e^2}-(1+C^2)\frac{1}{g_3{}^2}\right]$$
$$=\frac{6\pi}{11(1+3C^2)}\left[\frac{1}{\alpha}-\frac{1+C^2}{\alpha_s}\right]. \tag{15.57}$$

$\mu=10\,\mathrm{GeV}$ とすると，$\alpha=1/137$，および $\alpha_s=0.1$ はわかっているから，$C^2=5/3$ ととれば (理由は次節参照)

$$\boxed{M_X=5\times10^{14}\,\mathrm{GeV}} \tag{15.58}$$

という値が得られる。

厳密にいえば $\mu\sim M_W$ ととるべきだろうが，結合定数の変化はゆっくりしていて，大きさの程度の評価は，μ の値として選ぶ "通常" の質量にも，また，Clebsch-Gordan 係数 C の正確な値にも敏感に左右されることはない。M_X の α_s 依存性を表 15-1 に示す。

統一質量のスケール M_X は非常に大きい。それでもまだ重力相互作用を無視できるだろうか。重力定数を G とすれば，2 粒子間の重力 Gm_1m_2/r^2 は，距離 r が十分小さくなったとき目立って大きくなる。重力効果が 1 の程度になるのは，質量 $(m_1\simeq m_2\simeq M)$ が，ポテンシャルと静止エネルギーを同程度にする値をとるときである：

$$\frac{GM^2/r}{Mc^2}\simeq1.$$

自然単位の距離 $r=\hbar/Mc$ ((1.3) 参照) 離れた質量の場合，このことが成り立つのは

$$Mc^2=\left(\frac{\hbar c^5}{G}\right)^{1/2}=1.22\times10^{19}\,\mathrm{GeV}$$

のときである。この M の値は Planck 質量として知られており，重力に現れる唯一の次元を持った量である。Planck 質量と (15.58) の M_X の値を比較すると，まだ重力を無視してもよい近似だと思われるが，質量のスケールをこれほど Planck 質量の近くにとろうと考えているというのは興味津々ではないか。上の議論では念のため $\hbar$ や c を書いたが，これからまた $\hbar=c=1$ の自然単位に

表 15-1

α_s	M_X (GeV)	$\sin^2\theta_W$	τ_p (年)
0.1	5×10^{14}	0.21	$\sim10^{27}$
0.2	2×10^{16}	0.19	$\sim10^{34}$

もどろう。

Weinberg 角 θ_W は大統一理論によって決定されるから，それを実験値と比較することができる。実際，(15.49) から次の関係が得られる：

$$\sin^2\theta_W = \frac{g_1{}^2(Q)}{g_1{}^2(Q)+C^2 g_2{}^2(Q)}. \tag{15.59}$$

もし $C^2=5/3$ にとれば，$Q=M_X$ において $\sin^2\theta_W=3/8$ となる。ただし $g_1=g_2$ とする。しかし，Q が M_X から減少するにつれて g_1 と g_2 が違ってくるために，$Q\simeq\mu$ では $\sin^2\theta_W$ の値は上とは異なる。

問題 15.7　次式を証明せよ：

$$\sin^2\theta_W = \frac{1}{1+3C^2}\left(1+2C^2\frac{\alpha}{\alpha_s}\right). \tag{15.60}$$

[ヒント]　$C^2(1/g_1{}^2-1/g_2{}^2)$ の組み合わせを作って

$$2C^2(b_1-b_2)\log\frac{M_X}{\mu}=\frac{1}{e^2}(1-(1+C^2)\sin^2\theta_W)$$

を確かめよ。それから (15.54) および (15.53) を使え。

(15.60) を用い，前と同様に $C^2=5/3$ とすれば，$Q=10\,\mathrm{GeV}$ において $\sin^2\theta_W$ の値を計算することができる。結果は表 15-1 に示してある。これから $\sin^2\theta_W\simeq 0.2$ であることがわかる。この値は第 13 章で述べた実験値に近い。

15.8　陽子は崩壊するか？

15.7 節では，次のような大統一群 G

$$G\supset SU(3)\times SU(2)\times U(1)$$

が存在すると考えて話を進めた。Georgi と Glashow は，このようなゲージ変換の最小の群は $SU(5)$ であることを示した。もちろん，$SU(5)$ より大きな群で異なる大統一理論を作ることもできる。

いったん群を選んだら，クォークとレプトンを，その群の多重項 (既約表現) に振り分けなくてはならない。ずっと前の章で，フェルミオンには $(\mathrm{u,d}\,;\nu_e,\mathrm{e}),(\mathrm{c,s}\,;\nu_\mu,\mu),\cdots$ のように異なる族 (世代) が存在するという実験的証拠を示した。たとえば，第 1 世代では

$$\left.\begin{pmatrix}\mathrm{u}\\ \mathrm{d}\end{pmatrix}_L,\ \mathrm{u_R},\ \mathrm{d_R}\right\}\ \text{それぞれにカラーは 3 種類ある}$$
$$\begin{pmatrix}\nu_e\\ \mathrm{e}^-\end{pmatrix}_L,\ \mathrm{e_R}^- \tag{15.61}$$

および反粒子である。このように分類すると，異常性なしのゲージ理論ができることが保証される (12.12 節参照)。1 つの族には 15 の左巻き状態がある。たとえば，(15.61) のメンバーと $\bar{\mathrm{u}}_{\mathrm{L}}, \bar{\mathrm{d}}_{\mathrm{L}}, \mathrm{e_L}^+$ である。$SU(5)$ 模型では，これら 15 個を基本表現 $\bar{5}$ と 10 に入れる (10 は 2 つの基本表現 5 の積の反対称部分である。(2.58) 参照)。具体的に書くと，左巻き状態は次のように表される：

$$\bar{5} = (1,2) + (\bar{3},1) = (\nu_{\mathrm{e}}, \mathrm{e}^-)_{\mathrm{L}} + \bar{\mathrm{d}}_{\mathrm{L}}, \tag{15.62}$$

$$10 = (1,1) + (\bar{3},1) + (3,2) = e_{\mathrm{L}}{}^+ + \bar{\mathrm{u}}_{\mathrm{L}} + (\mathrm{u},\mathrm{d})_{\mathrm{L}}. \tag{15.63}$$

括弧内は，多重項を ($SU(3)_{カラー}$, $SU(2)_L$) のように分解したことを示す。$SU(5)$ のゲージボソンは何だろう。$SU(N)$ ゲージ理論には N^2-1 個のゲージボソンがある。$SU(5)$ 模型に対しては

$$24 = \underset{\text{グルーオン}}{(8,1)} + \underbrace{(1,3)+(1,1)}_{\mathrm{W}^\pm,\mathrm{Z},\gamma} + \underbrace{(3,2)+(\bar{3},2)}_{\mathrm{X},\mathrm{Y}\text{ボソン}} \tag{15.64}$$

である。こうして，1 対の超重ゲージボソン X, Y が現れる。これは弱 2 重項を作り，カラー 8 重項で，次のようにクォークをレプトンに変える相互作用を担う：

$$(\mathrm{u},\mathrm{d})_{\mathrm{L}} \longrightarrow e_{\mathrm{L}}{}^+ + (\bar{\mathrm{Y}}, \bar{\mathrm{X}}). \tag{15.65}$$

$SU(5)$ の言葉でいえば

$$(3,2) \longrightarrow (1,1) \otimes (3,2)$$

ということになる。

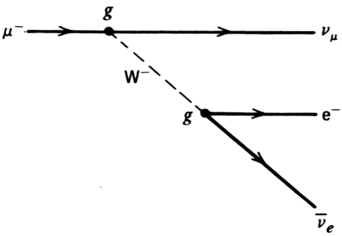
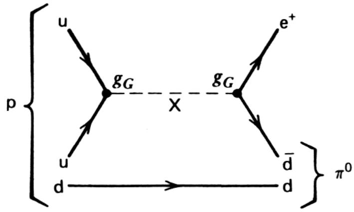
こんな遷移が現れるのは本当に驚くべきことだろうか。まず第一に，M_{W} 以上のエネルギーでは，弱い相互作用と電磁相互作用の区別が消え失せる。同様に，(15.58) で同定した GUT スケール $M_{\mathrm{X,Y}}$ においては，強いカラー力は電弱力と 1 つになり，カラーを持ったクォークと，電弱力のみにより相互作用するカラーを持たないレプトンとのはっきりした区別は消え失せる。これが (15.65) のようなレプトン/バリオン数非保存の相互作用に導くのである。

問題 15.8 X ボソン，Y ボソンの電荷は何か。

問題 15.9 $Q > M_{\mathrm{X}}$ における $g_{\mathrm{G}}(Q)$ の振舞いを論ぜよ (図 15・4 参照)。

(15.65) の反応によって，質量約 10^{-10}g の X 粒子生成を観測できるような加速器の建設など望み得るだろうか。とても無理な話だ。だが，弱ゲージボソン

表 15-2　スケール $Q^2=M_W{}^2$ および $Q^2=M_X{}^2$ に付随する小 Q^2 現象

ミューオン崩壊 ($\mu^-\to e^-\bar{\nu}_e\nu_\mu$) $Q^2\ll M_W{}^2$	陽子崩壊 ($p\to\pi^0e^+$) $Q^2\ll M_X{}^2$
	
$\dfrac{G}{\sqrt{2}}=\dfrac{g^2}{8M_W{}^2}$　(12.15) $\Gamma(\mu\to e\bar{\nu}_e\nu_\mu)=\cdots G^2m_\mu{}^5$　(12.42) $=\cdots\dfrac{m_\mu{}^5}{M_W{}^4}$	$\dfrac{G_G}{\sqrt{2}}=\dfrac{g_G{}^2}{8M_X{}^2}$ $\Gamma(p\to\pi e)=\cdots G_G{}^2m_p{}^5$ $=\cdots\dfrac{m_p{}^5}{M_X{}^4}$

$(W^\pm, Z)$ の関与する現象で Q の小さい領域における効果は，加速器技術が $Q\simeq M_W$ における相互作用に到達するずっと以前に垣間見えたのである。μ 崩壊はその一例だ。ミューオンの遅い崩壊は，W の質量が大きいことの直接の結果である。第 12 章でくわしく示したが，この論拠をもう一度表 15-2 に示しておこう。

表に示された類似関係から，エネルギースケール M_X の相互作用が，Q の小さいところにどう現れるか推測することができる。そのような相互作用は，陽子の非常に遅い崩壊に現れるだろう (表 15-2 参照)。崩壊率はミューオンの崩壊率とまったく同様にして評価できる。表から陽子の寿命は

$$\tau_p\simeq\frac{M_X{}^4}{m_p{}^5} \tag{15.66}$$

となることがわかる。したがって，その数値的な値は M_X の正確な値に非常に敏感である。現在の実験精度の範囲で評価した寿命は 10^{30} 年程度である。† 寿命を正確に予言するには，上で示した M_X や τ_p の大きさの程度だけを問題にする計算よりは，はるかに手の込んだ計算が必要になる (Langacker (1981) 参照)。このような計算は，$SU(5)$ GUT が陽子崩壊の実験で検証できるのではないかという希望を抱かせる。ともあれ，$C^2=5/3$ (g と g' を関係づける $SU(5)$ の

† (訳註)　最近の値は 10^{32} 年以上を示唆している。

Clebsch-Gordan 係数の値）として (15.60) から得られた $\sin^2\theta_W \simeq 0.2$ の値は，この“砂上の大楼閣”の主要な実験的証拠である。

しかし，GUT の考え方は，ごく最近まで空しい夢としか思えなかった問題や目標を，学問的に追求可能にする 1 つの枠組を提供した。たとえば，クォークやレプトンの電荷に関して $SU(5)$ の意味するところに注目しよう。光子は $SU(5)$ のゲージボソンの 1 つであるから，電荷演算子 Q は群の生成演算子である。しかし，$SU(5)$ のような単純群では，どんな表現をとっても，各生成演算子のトレースは 0 である。たとえば，(15.62) の $\bar{5}$ の場合には

$$\mathrm{Tr}\,Q = 3Q_{\bar{d}} + Q_{\nu} + Q_{e^-} = 0$$

となり，

$$Q_{\bar{d}} = \frac{1}{3} Q_{e^-}$$

を得る。これは驚くべき結果である。明らかに，これは電荷が量子化されていることを意味している。(15.63) の表現 10 について同様の計算をすると

$$Q_u = -2Q_d$$

となり，これらを組み合わせた結果は，なぜ $Q_p = -Q_e$ かという謎（第 7 章）が解決されたことを示している。さらに (15.62) および (15.63) のような分類は，クォークとレプトンの弱い相互作用のヘリシティー構造も非常によく似ていることを意味する。これは，すでにくり返し強調してきた実験事実である。

もちろん，陽子崩壊は深遠な意味を持つのであろうが，それは全然驚くに当らないと考えることもできるだろう。電荷保存は質量 0 の光子の存在と関係しているが，バリオン数保存に付随する質量 0 の粒子は存在しない。事実，バリオン数非保存は，すでにわれわれをとりまく宇宙の中では明白なのかもしれない。次節でこの問題を論ずることにする。

15.9 高エネルギー物理実験としての初期宇宙

加速器の達しうる最高エネルギーは 10^5 GeV を超えないが，10^{19} GeV というエネルギーは，ビッグバン後のごく初期のころには当り前のことだった。もしも時間を逆にたどって，ビッグバンに伴う過去における初期特異性までわれわれの膨張宇宙を外挿していくと，物質も輻射も熱くなって，場合によっては，粒子衝突の平均エネルギーが，加速器実験室で到達しうるエネルギーをはるかに超すこともありうる。過去の出来事を推測も混えて年表にしたのが表 15-3 で

表 15-3　標準的なビッグバン宇宙論における過去の出来事

過去の出来事	時　間	温度 T (絶対温度)	エネルギー kT (GeV)
重力の量子効果が大きい	10^{-45} sec	10^{32}	10^{29}
Xボソンの相互作用により物質と反物質の非対称が大きくなる	10^{-35} sec	10^{27}	10^{14}
ヘリウムの存在量が確立する	10^{3} sec	10^{9}	10^{-4}
光子が物質から分離，背景輻射の起源	10^{6} 年	10^{3}	10^{-10}
現在！	10^{10} 年	3	10^{-12}

ある。有名な"証拠"となるべき出来事は，宇宙が 10^6 年たったときに起こった。その後エネルギーは eV の何分の 1 という程度に冷えて，光子は，もはや原子を励起できるほどのエネルギーも持っていなかった。光子の輻射は物質から分離して，今日，等方的な背景輻射という形で依然として存在しているのである。輻射と物質が分離した後，輻射の温度は宇宙の膨張によって 10^3K から 3 K に下がった (表 15-3 参照)。この 3 K (マイクロ波) 背景輻射の検出は，1965 年 Penzias と Wilson によって行われたもので，膨張宇宙模型 (ビッグバン) に対する決定的な証拠となった。

ヘリウムや重陽子が生成されたと信じられる 10^3 sec の時点で起こった原始の"核子合成"を，10^{-35} sec までずっと大胆に外挿すれば，物質がクォークとグルーオンの形で，(15.64) のゲージボソンと熱平衡の状態にあるような宇宙の相に到達する。その熱エネルギーは GUT スケール M_X の程度である。しかし，宇宙がこの温度より冷えると，超重粒子 X と $\overline{X}$ は崩壊する。もし，C 保存と CP 保存を破れば，それらの部分崩壊率は異なるだろう：

$$\frac{\Gamma(X \to q+q)}{\Gamma(X \to \text{all})} \neq \frac{\Gamma(\overline{X} \to \bar{q}+\bar{q})}{\Gamma(\overline{X} \to \text{all})}.$$

こうして，10^{-35} sec 以前は X と $\overline{X}$ の密度が等しいが，この平衡状態の段階からクォーク q と反クォーク $\bar{q}$ の数が異なる状態が現れるのである。もっとも重要な CP 不変性を破る過程は，Higgs 粒子の相互作用と崩壊を含むので，バリオン数の非対称を定量的に予言するのは難しい。にもかかわらず GUT は，物質が反物質よりわずかに多い表 15-3 の GUT 時代から，すべてが現れてくるのに

必要な要素を含んでいる。余分の物質は生き残り，引き続いて物質と反物質の光消滅が起こったが，バリオン-光子比

$$\frac{N_{\mathrm{B}}}{N_\gamma} \simeq \frac{N_{\mathrm{B}} - N_{\bar{\mathrm{B}}}}{N_{\mathrm{B}} + N_{\bar{\mathrm{B}}}} \simeq 10^{-9}$$

が観測されている。われわれの宇宙が物質から作られているという事実は，したがって，陽子を窮極的に死に至らしめる原因となる物理的過程と同じ過程によって説明できるといえよう。現在のわれわれの宇宙の物質の起源に関するこの説明は，まだ相当空想をたくましくしているところもあるが，本書で議論した天体物理学と素粒子物理学の共存が不可避だ，というよい例になっている (たとえば，Mulvey (1981) 中の Ellis の論文，あるいは Ellis (1982) 参照)。

15.10 もっと大きな統一理論を

決定的な検証はまだなされていないが，すべての物質はスピン 1/2 の粒子 (クォークとレプトン) から作られており，その相互作用は厳密な局所ゲージ対称性の帰結であるということは広く信じられている。これらのカラーや電弱相互作用を仲介するゲージボソンはスピン 1 を持っている (光子，グルーオン，および弱ボソン $W^{\pm}, Z^0$)。対称性の自発的な破れによって弱ボソンおよびフェルミオンは質量を獲得して，しかも理論は依然としてくり込み可能である。本書で詳しく論じたのはこういう描像であった。

他方，大統一理論という概念は，さらに空想をたくましくさせる類いのものである。かりに読者が，$Q=M_{\mathrm{W}}$ と $Q=M_{\mathrm{X}}$ の間は "砂漠" で新しい物理はない，という理論の基礎をなす仮定は認めたとしても，最先端の問いに対しては答えられないことがいくつもある。なぜ M_{W} と M_{X} の質量のスケールが 10^{12} などと桁はずれに違っているのだろうか。重力場についてはどうか，物質場とゲージ場を統一するような原理も存在するのだろうか。

これらの問いは，クォークとレプトンの世界に関する知識の最前線の彼方へとわれわれを誘う。だがここでは，より "窮極的" 理論のとり得る構造について 2 つだけ空想をたくましくして言及し，結論としよう。1 つの考え方は，直接物質場とゲージ場を結びつけることである。このような対称性は，スピン 1/2 の Dirac 物質場とスピン 1 のボソンのゲージ場を結びつけるのだから，これまでに出会った対称性のどれとも異なっている。整数スピン場と半整数スピン場を直接関係づける対称性は数学的にはできあがっており，"超対称性" と呼ばれて

いる(たとえば，Mulvey (1981) 中の Salam の論文参照)。このような対称性は，質量の相互作用を媒介する Einstein の重力場のスピン 2 の粒子グラヴィトンも含んでいる。

この考え方は，GUT から出発して重力を"つけ加え"ようという試みである。第二の考えはそれとは逆である。つまり，重力から出発する。この力は，4 次元時空の幾何学的曲率の結果として古典的には"十分わかって"いる。問題は，"電磁気，カラー，･･･に付随する幾何学は何か"である。これに対しては 2 つの答えが可能である。1 つはこう考える。重力は時空の"大局的な"幾何学的構造と関連しているが，ずっと小さい領域では，もっと複雑な位相が存在して，それに他の相互作用が伴うのである。もう 1 つの可能性は，余分の時空を導入することである。これは 20 世紀初頭 Kaluza と Klein が，電磁気は第 5 番目の次元を持った幾何学的理論であるという示唆をして以来，活発に議論されてきている。

過去 20 年のもっとも重要な成果は，われわれの世界がクォーク，レプトン，ゲージボソンから作られていることを確立したことではなくて，さらに新しい最前線へとわれわれを駈り立てたことである。そこではもっと興奮に満ちた問題を突きつけられたのだ。こう考えていくと，クォークやレプトン自身複合粒子であるという可能性をも取り入れざるをえなくなるであろう。

問題解答

(＊印の解答は，原著者が解答を与えていないので，訳者による解答である。)

1.1 $\hbar c=0.1973$ GeV·fm，1 mb=0.1 fm^2 から 1 GeV$^{-2}=(0.1973\ \text{fm})^2=0.389$ mb.

1.2* $\hbar=c=1$ 単位では $\lambda=\hbar/mc\to 1/m$，$a_B=\hbar^2/me^2=1/4\pi\alpha m$ $(\alpha=e^2/4\pi)$.

1.3 原子のエネルギーと大きさの代表的な値は，自然単位で表したエネルギーおよび長さとそれぞれ因子 α^2，$1/\alpha$ だけ違う。また $v/c\sim\alpha$ $(\alpha\simeq 1/137)$ である。Wichmann：“*Quantum Physics*”，Berkeley Physics Course Vol 4，1967 (宮沢弘成 監訳：バークレー物理学コース 4 (上,下) 丸善) にわかりやすい説明がある。

2.1 (i) 状態 (2.1) は z 軸を量子化軸として定義されている。そこで，z 軸とは違う z' 軸に沿って量子化した NN 状態 ↑↑ を考えよう。この状態を，はじめの $S=1$ 状態の 1 次結合で書くと

$$|S=1,\ M_S=1>'=\sum_{M_S}\alpha(M_S)|S=1,\ M_S>.$$

しかし $|M_S=1>'$ と $|M_S=\pm1>$ は明らかに対称であるから，$|M_S=1, M_S=0>$ も対称でなければならない。直交性から $|S=0, M_S=0>$ は反対称であるはずだ。(ii) $|S=1, M_S=1>$ に昇降演算子を作用させて ((2.18) J_- 参照)

$$\sqrt{2}|S=1,\ M_S=0>=\uparrow\downarrow+\downarrow\uparrow.$$

2.2 $\psi=\psi_{\text{space}}\cdot\psi_{\text{spin}}\cdot\psi_{\text{isospin}}$ において $L=0$ だから，ψ_{space} は 2 つの核子の交換に対して対称である。一方，(2.1) と (2.2) を参照すると

$$\psi_{\text{spin}}(1,2)=(-1)^{S+1}\psi_{\text{spin}}(2,1),\qquad \psi_{\text{isospin}}(1,2)=(-1)^{I+1}\psi_{\text{isospin}}(2,1)$$

である。したがって ψ が全体として反対称であるためには，$S+I$ が奇数でなければならない。

2.3 pp$=|I=1,\ I_3=1>$ および np$=\sqrt{1/2}\,(|I=1,\ I_3=0>-|I=0,\ I_3=0>)$ である。πd 状態は $I=1$ だけで他の状態は混じっていないから，反応 np→π^0d が起こる確率は反応 pp→π^+d のそれの $(\sqrt{1/2})^2$ 倍である。

2.4* これは 1 軸のまわりに ε の無限小回転，次に 2 軸のまわりに無限小回転 η を行った結果と，まず 2 軸のまわりに無限小回転 η，次に 1 軸のまわりに無限小回転 ε を行った結果を比較することと同じである。

$$U_1=1-i\varepsilon J_1,\qquad U_2=1-i\eta J_2$$

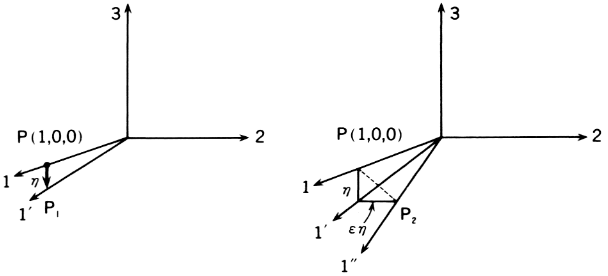
とすれば，点 P (1,0,0) は U_2U_1 により点 P_1 に，U_1U_2 により点 P_2 に移る。両者の差は 3 軸のまわりの無限小回転 $\varepsilon\eta$ に等しい。つまり

$$(1-i\varepsilon J_1)(1-i\eta J_2)-(1-i\eta J_2)(1-i\varepsilon J_1)=1-i\varepsilon\eta J_3-1.$$

両辺の $\varepsilon\eta$ の係数を比較して

$$[J_1,\ J_2]=jJ_3$$

を得る。



2.5* J^2 と J_3 の同時固有ベクトルを $|Cm>$ とする：

$$J^2|Cm>=C|Cm>, \qquad J_3|Cm>=m|Cm>.$$

C, m はそれぞれ J^2 と J_3 の固有値であるが，まだ未定。$J_\pm|Cm>$ は

$$J^2(J_\pm|Cm>)=C(J_\pm|Cm>), \qquad J_3(J_\pm|Cm>)=(m\pm1)(J_\pm|Cm>)$$

を満足し，やはり J^2 と J_3 の同時固有ベクトルとなるが，J_3 の固有値のみ $|Cm>$ のそれと ±1 だけ違う。つまり，

$$J_\pm|Cm>=\Gamma_\pm|Cm\pm1>$$

と書いてよい。両辺のノルムを計算して $<Cm|Cm>=1$, $<Cm\pm1|Cm\pm1>=1$ に注意すれば

$$|\Gamma_\pm|^2=C-m(m\pm1),$$

すなわち

$$J_\pm|Cm>=[C-m(m\pm1)]^{1/2}|Cm\pm1>, \qquad C-m(m\pm1)\geq0$$

より，m には最大値および最小値が存在することがわかるから，それぞれ m_1, m_2 とすれば

$$C-m_1(m_1+1)=0, \qquad J_+|Cm_1>=0,$$
$$C-m_2(m_2-1)=0, \qquad J_-|Cm_2>=0.$$

2 式を引き算して，$(m_1+m_2)(m_1-m_2+1)=0$. $m_1\geq m_2$ だから $m_1=-m_2\equiv j$ でなければならない。すなわち $C=j(j+1)$ が証明された。m は間隔 1 で最小値 m_2 から最大値 m_1 まで並んでいるから，$2j=m_1-m_2=$ 正整数または 0 で，j の値は 0 または正の整数，半整数のいずれかである。かくして

$$J^2|jm>=j(j+1)|jm>,$$
$$J_3|jm>=m|jm> \qquad (m=-j, -j+1, \cdots, j)$$

が示されたことになる。

2.6*

$$d_{m'm}{}^j(\theta)=<jm'|e^{-i\theta J_2}|jm>=<jm'|\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-i\theta)^n}{n!}J_2{}^n|jm>$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}<jm'|(-i\theta J_2)^n|jm>.$$

$J_2=(J_+-J_-)/2i$ に (2.18) を用いて行列要素をとれば

$$<jm\pm1|J_2|jm>=\pm[(j\mp m)(j\pm m+1)]^{1/2}/2i$$

である。

$$j=\frac{1}{2}: \quad \left\langle\frac{1}{2}m'\middle|(-i\theta J_2)\middle|\frac{1}{2}m\right\rangle=\frac{\theta}{2}\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$$

となるから

$$\left\langle \frac{1}{2}m' \middle| (-i\theta J_2)^{2n} \middle| \frac{1}{2}m \right\rangle = (-1)^n \left(\frac{\theta}{2}\right)^n \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\left\langle \frac{1}{2}m' \middle| (-i\theta J_2)^{2n+1} \middle| \frac{1}{2}m \right\rangle = (-i)^n \left(\frac{\theta}{2}\right)^n \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

が成り立ち

$$d_{m'm}{}^{1/2}(\theta) = \left\langle \frac{1}{2}m' \middle| e^{-i\theta J_2} \middle| \frac{1}{2}m \right\rangle = \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2} & -\sin\frac{\theta}{2} \\ \sin\frac{\theta}{2} & \cos\frac{\theta}{2} \end{pmatrix}$$

を得る。$j=1$：J_2 の行列要素は

$$<1m'|J_2|1m> = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

と求めることができるから，$e^{-i\theta J_2}$ の展開の一般項の行列要素は

$$<1m'|(-i\theta J_2)^{2n}|1m> = \frac{1}{(2n)!} \begin{pmatrix} (-1)^n\frac{\theta^{2n}}{2} & 0 & -(-1)^n\frac{\theta^{2n}}{2} \\ 0 & (-1)^n\theta^{2n} & 0 \\ -(-1)^n\frac{\theta^{2n}}{2} & 0 & (-1)^n\frac{\theta^{2n}}{2} \end{pmatrix},$$

$$<1m'|(-i\theta J_2)^{2n-1}|1m> = \frac{1}{(2n-1)!} \begin{pmatrix} 0 & \frac{(-1)^n}{\sqrt{2}}\theta^{2n-1} & 0 \\ -\frac{(-1)^n}{\sqrt{2}}\theta^{2n-1} & 0 & \frac{(-1)^n}{\sqrt{2}}\theta^{2n-1} \\ 0 & -\frac{(-1)^n}{\sqrt{2}}\theta^{2n-1} & 0 \end{pmatrix}$$

となる。したがって

$$d_{11}{}^1(\theta) = d_{-1-1}{}^1(\theta) = 1 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}\theta^{2n} \equiv 1 + \frac{1}{2}(\cos\theta - 1) = \frac{1}{2}(1+\cos\theta),$$

$$d_{1-1}{}^1(\theta) = d_{-11}{}^1(\theta) = -\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}\theta^{2n} = -\frac{1}{2}(\cos\theta - 1) = \frac{1}{2}(1-\cos\theta),$$

$$d_{00}{}^1(\theta) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\theta^{2n}}{(2n)!} = \cos\theta,$$

$$d_{10}{}^1(\theta) = d_{0-1}{}^1(\theta) = -d_{01}{}^1(\theta) = d_{-10}{}^1(\theta) = \frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\theta^{2n-1}}{(2n-1)!} = -\sqrt{\frac{1}{2}}\sin\theta.$$

これが求める (2.21) の結果である。

2.7*

$$e^{-i\theta\sigma_2/2} = 1 - \frac{i\theta\sigma_2}{2} + \frac{1}{2!}\left(\frac{i\theta\sigma_2}{2}\right)^2 - \frac{1}{3!}\left(\frac{i\theta\sigma_2}{2}\right)^3 + \cdots$$

ここに $\sigma_2{}^{2n} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$，$\sigma_2{}^{2n+1} = \sigma_2$ $(n=1, 2, \cdots)$ であるから

$$e^{-i\theta\sigma_2/2} = \left(1 - \frac{1}{2!}\left(\frac{\theta}{2}\right)^2 + \frac{1}{4!}\left(\frac{\theta}{2}\right)^4 + \cdots\right) - i\sigma_2\left(\frac{\theta}{2} - \frac{1}{3!}\left(\frac{\theta}{2}\right)^3 + \cdots\right) = \cos\frac{\theta}{2} - i\sigma_2\sin\frac{\theta}{2}.$$

2.8 3 行 3 列の行列 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ は，2 行 2 列の Pauli 行列の 3 行目と 3 列目に 0 をつけ加えたものである。同様に，λ_4, λ_5 は 2 行目，2 列目が 0 で，それを除く残りの部分は σ_1, σ_2 になる。したがって λ_i の規格化は σ_i と同様に扱うことができて

$$\mathrm{Tr}(\lambda_i\lambda_j) = 2\delta_{ij}$$

である。λ_i を具体的に書けば

$$\lambda_1=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\ \lambda_2=\begin{pmatrix}0&-i&0\\i&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\ \lambda_3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&0\end{pmatrix},\ \lambda_4=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\1&0&0\end{pmatrix}$$

$$\lambda_5=\begin{pmatrix}0&0&-i\\0&0&0\\i&0&0\end{pmatrix},\ \lambda_6=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix},\ \lambda_7=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&-i\\0&i&0\end{pmatrix},\ \lambda_8=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-2\end{pmatrix}.$$

2.9 主要な崩壊様式は $\phi\to K^+K^-$ と $\phi\to K^0\overline{K}^0$ で，この2つは，厳密な対称性の極限では，等しい確率で起こる。しかし，崩壊によるエネルギー放出(質量差)が小さいので，K^+ と K^0 の質量差によって等崩壊率が破れる。すなわち，

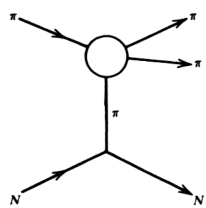
$$\frac{\Gamma(\phi\to K^+K^-)}{\Gamma(\phi\to K^0\overline{K}^0)}=\left(\frac{p_{K^+}}{p_{K^0}}\right)^{2L+1}.$$

ここで，$p_i\equiv|\boldsymbol{p}_i|$ は ϕ の静止系における K の運動量，L は $K\overline{K}$ 系の軌道角運動量，ϕ と K はそれぞれスピン1と0を持つので，$L=1$ となる。観測される分岐比は，

$$K^+K^-:K^0\overline{K}^0:\pi^+\pi^-\pi^0=0.49:0.35:0.15$$

である。運動学的に許されるにもかかわらず 3π 様式が小さいのは，$\phi\simeq s\bar{s}$ とすることを支持する。ϕ は $J^P=1^-$，$C=-1$ であるから，$K^0\overline{K}^0$ 様式は $K_L{}^0K_S{}^0$ と考えられる。$\phi\to K\overline{K}$ の崩壊率は，$SU(3)$ で関係づけられる $\rho\to\pi\pi$ 崩壊から推定できる ((12.129) 参照)。$\phi\to K\overline{K}$ が運動学的に抑制されることは，観測される幅 $\Gamma(\phi)=4\,\mathrm{MeV}$ と $\Gamma(\rho)=150\,\mathrm{MeV}$ の比較から明らかである。

2.10 運動量移行が小さいとき，$\pi\pi$ 系は主として π 交換で生成される。交換される(仮想)パイオンはほとんど実である(すなわち質量殻上にある)。したがって，この実験可能な過程は，π"π" → $\pi\pi$ 散乱を研究するうまい方法である(図4・8参照)。パイオンは Bose 統計に従い，$\pi\pi$ 波動関数が対称なことから $(-1)^J(-1)^I=+1$ が要請される。



2.11* $\phi_A{}^8=\sqrt{\frac{1}{2}}(ds-sd)d$，$\phi_S{}^{10}=\sqrt{\frac{1}{3}}[dds+(ds+sd)d]$，

$$\phi_S{}^8=\sqrt{\frac{1}{6}}[(ds+sd)d-2dds].$$

2.12 $q_1=u$，$q_2=d$，$q_3=s$ と書けば

$$(qqq)_{\text{singlet}}=\frac{1}{\sqrt{6}}\varepsilon_{ijk}q_iq_jq_k=\frac{1}{\sqrt{6}}(uds-ssd+sud-sdu+dsu-dus).$$

これはまさに (2.63) である。他の5つの状態は次の通り：

$$\Sigma(M_S)=\sqrt{\frac{1}{12}}[(sd+ds)u+(su+us)d-2(du+ud)s],$$

$$\Sigma(M_A)=\frac{1}{2}[(sd-ds)u+(su-us)d],$$

$$\Lambda(M_S)=\frac{1}{2}[(sd+ds)u-(su-us)d],$$

$$\Lambda(M_A)=\sqrt{\frac{1}{12}}[(sd-ds)u+(us-su)d-2(du-ud)s],$$

$$\Sigma(S)=\sqrt{\frac{1}{6}}[(\mathrm{sd}+\mathrm{ds})\mathrm{u}+(\mathrm{su}+\mathrm{us})\mathrm{d}+(\mathrm{du}+\mathrm{ud})\mathrm{s}].$$

ここでΣとΛはそれぞれ$I=1$および$I=0$の状態である。

2.13* (2.71) で$\uparrow\leftrightarrow\downarrow$, $\mathrm{u}\leftrightarrow\mathrm{d}$の置き換えをすれば

$$|\mathrm{p}\downarrow>=\sqrt{\frac{1}{18}}[\mathrm{u}\downarrow\mathrm{u}\uparrow\mathrm{d}\downarrow+\mathrm{u}\uparrow\mathrm{u}\downarrow\mathrm{d}\downarrow-2\mathrm{u}\downarrow\mathrm{u}\downarrow\mathrm{d}\uparrow+\text{permutations}]$$

$$|\mathrm{n}\uparrow>=\sqrt{\frac{1}{18}}[\mathrm{d}\uparrow\mathrm{d}\downarrow\mathrm{u}\uparrow+\mathrm{d}\downarrow\mathrm{d}\uparrow\mathrm{u}\uparrow-2\mathrm{d}\uparrow\mathrm{d}\uparrow\mathrm{u}\downarrow+\text{permutations}]$$

$$|\mathrm{n}\downarrow>=\sqrt{\frac{1}{18}}[\mathrm{d}\downarrow\mathrm{d}\uparrow\mathrm{u}\downarrow+\mathrm{d}\uparrow\mathrm{d}\downarrow\mathrm{u}\downarrow-2\mathrm{d}\downarrow\mathrm{d}\downarrow\mathrm{u}\uparrow+\text{permutations}]$$

を得る。

$$Q_i|\mathrm{u}\uparrow(\downarrow)>=\frac{2}{3}|\mathrm{u}\uparrow(\downarrow)>,\qquad Q_i|\mathrm{d}\uparrow(\downarrow)>=-\frac{1}{3}|\mathrm{d}\uparrow(\downarrow)>$$

を用いて

$$<\mathrm{p}\uparrow|Q|\mathrm{p}\uparrow>=<\mathrm{p}\uparrow|\sum_i Q_i|\mathrm{p}\uparrow>=\frac{1}{18}\left[\left(\frac{2}{3}+\frac{2}{3}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{2}{3}+\frac{2}{3}-\frac{1}{3}\right)+4\left(\frac{2}{3}+\frac{2}{3}-\frac{1}{3}\right)\right]\times 3=1.$$

同様に

$$<\mathrm{p}\downarrow|Q|\mathrm{p}\downarrow>=<\mathrm{p}\downarrow|\sum_i Q_i|\mathrm{p}\downarrow>=1,$$

$$<\mathrm{n}\uparrow|Q|\mathrm{n}\uparrow>=<\mathrm{n}\uparrow|\sum_i Q_i|\mathrm{n}\uparrow>=\frac{1}{18}\left[\left(-\frac{1}{3}-\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\right)+\left(-\frac{1}{3}-\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\right)+4\left(-\frac{1}{3}-\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\right)\right]\times 3=0.$$

同様に

$$<\mathrm{n}\downarrow|Q|\mathrm{n}\downarrow>=<\mathrm{n}\downarrow|\sum_i Q_i|\mathrm{n}\downarrow>=0.$$

2.14 $|\pi^+>=\sqrt{\frac{1}{6}}\sum_{a=\mathrm{R,G,B}}|\bar{\mathrm{d}}_a\uparrow\mathrm{u}_a\downarrow-\bar{\mathrm{d}}_a\downarrow\mathrm{u}_a\uparrow).$

2.15 U スピン多重項の構成要素は同じ電荷を持つ。電荷演算子 Q は U スピンの 3 つの生成演算子と可換である。$\Sigma^\pm$ と $\Sigma^*(1385)^+$ は $U=1/2$ 多重項の構成要素であるが，$\Sigma^*(1385)^-$ は $U=3/2$ 多重項に属している。したがって，もし γ が $U=0$ ならば U スピン保存から $\Sigma^*\to\Sigma^-\gamma$ は禁止される。

2.16 全角運動量 J およびパリティ P は，πN 相互作用で保存される。$L'=J\pm1/2$ 状態は互いにパリティが逆なので L' も保存される。$P=\eta_\pi\eta_{\mathrm{N}}(-1)^{L'}$ と書くと，内部パリティは $\eta_\pi\eta_{\mathrm{N}}=-1$. クォーク模型の予想によれば，バリオンの最初の励起レベルは次の状態を含む：S_{11}(2 つ)，D_{13}(2 つ)，D_{15}，S_{31}，D_{33}. ここで I は共鳴状態のアイソスピンであり，$L_{2I,2J}{}'$ の記法を用いた。なお Close の教科書(1979) を参照。

2.17 $\mu_\Lambda=\mu_{\mathrm{s}}$，$\mu_{\Sigma^+}=(4\mu_{\mathrm{u}}-\mu_{\mathrm{s}})/3$，$\mu_{\Xi^0}=(4\mu_{\mathrm{s}}-\mu_{\mathrm{u}})/3$ などが成り立つ。$\mu_{\mathrm{p}}=2.79$ を用いれば

$$\mu_{\mathrm{d}}=\mu_{\mathrm{s}}=-\mu_{\mathrm{u}}/2=-0.93\ \mathrm{nm}.$$

クォークの質量差を考慮に入れると，μ_{s} に対してもっとよい評価ができて (2.14 節参照)

$$\mu_{\mathrm{s}}=\frac{m_{\mathrm{d}}}{m_{\mathrm{s}}}\mu_{\mathrm{d}}$$

を得る。

2.18* (2.60)，(2.62) および (2.65) を用いて

$$|\mathrm{p}\uparrow>=\sqrt{1/2}\,[p_A\chi(M_S)-p_S\chi(M_A)]$$

$$=\sqrt{1/6}\,[\mathrm{u\!\uparrow\! u\!\downarrow\! d\!\uparrow} + \mathrm{u\!\downarrow\! d\!\uparrow\! u\!\uparrow} + \mathrm{d\!\uparrow\! u\!\uparrow\! u\!\downarrow} - \mathrm{u\!\downarrow\! u\!\uparrow\! d\!\uparrow} - \mathrm{u\!\uparrow\! d\!\uparrow\! u\!\downarrow} - \mathrm{d\!\uparrow\! u\!\downarrow\! u\!\uparrow}],$$

$$\mu_{\mathrm{p}} = \sum_{i=1}^{3} < \mathrm{p}\!\uparrow|\mu_i(\sigma_3)_i|\mathrm{p}\!\uparrow> = 3\times\left(\frac{1}{\sqrt{6}}\right)^2[(\mu_{\mathrm{u}}-\mu_{\mathrm{u}}+\mu_{\mathrm{d}})+(-\mu_{\mathrm{u}}+\mu_{\mathrm{d}}+\mu_{\mathrm{u}})+(\mu_{\mathrm{d}}+\mu_{\mathrm{u}}-\mu_{\mathrm{u}})$$
$$+(-\mu_{\mathrm{u}}+\mu_{\mathrm{u}}+\mu_{\mathrm{d}})+(\mu_{\mathrm{u}}+\mu_{\mathrm{d}}-\mu_{\mathrm{u}})+(\mu_{\mathrm{d}}-\mu_{\mathrm{u}}+\mu_{\mathrm{u}})] = 3\mu_{\mathrm{d}},$$

$$|\mathrm{n}\!\uparrow> = \sqrt{1/2}\,[n_A\chi(M_S) - n_S\chi(M_A)]$$
$$=\sqrt{1/6}\,[\mathrm{d\!\uparrow\! d\!\downarrow\! u\!\uparrow} + \mathrm{d\!\downarrow\! u\!\uparrow\! d\!\uparrow} + \mathrm{u\!\uparrow\! d\!\uparrow\! d\!\downarrow} - \mathrm{d\!\downarrow\! d\!\uparrow\! u\!\uparrow} - \mathrm{d\!\uparrow\! u\!\uparrow\! d\!\downarrow} - \mathrm{u\!\uparrow\! d\!\downarrow\! d\!\uparrow}],$$

$$\mu_{\mathrm{n}} = \sum_{i=1}^{3} < \mathrm{n}\!\uparrow|\mu_i(\sigma_3)_i|\mathrm{n}\!\uparrow> = 3\times\left(\frac{1}{\sqrt{6}}\right)^2[(\mu_{\mathrm{d}}-\mu_{\mathrm{d}}+\mu_{\mathrm{u}})+(-\mu_{\mathrm{d}}+\mu_{\mathrm{u}}+\mu_{\mathrm{d}})+(\mu_{\mathrm{u}}+\mu_{\mathrm{d}}-\mu_{\mathrm{d}})$$
$$+(-\mu_{\mathrm{d}}+\mu_{\mathrm{d}}+\mu_{\mathrm{u}})+(\mu_{\mathrm{d}}+\mu_{\mathrm{u}}-\mu_{\mathrm{d}})+(\mu_{\mathrm{u}}-\mu_{\mathrm{d}}+\mu_{\mathrm{d}})]$$
$$=3\mu_{\mathrm{u}}.$$

したがって

$$\frac{\mu_{\mathrm{n}}}{\mu_{\mathrm{p}}} = \frac{\mu_{\mathrm{u}}}{\mu_{\mathrm{d}}}$$

となる。(2.72) により $\mu_{\mathrm{u}} = -2\mu_{\mathrm{d}}$ であるから，求める結果

$$\frac{\mu_{\mathrm{n}}}{\mu_{\mathrm{p}}} = -2$$

を得る。

2.19* $\mu_{\rho^+} = \sum_{i=1}^{2} < \rho^+|\mu_i(\sigma_3)_i|\rho^+ >$ に ρ^+ の波動関数 $|\rho^+> = \mathrm{u\!\downarrow\!\bar{d}\!\uparrow}$ を代入して

$$\mu_{\rho^+} = \mu_{\mathrm{u}} - \mu_{\mathrm{d}}$$

を得る。同様に $|\rho^-> = \mathrm{d\!\uparrow\!\bar{u}\!\uparrow}$ を代入して

$$\mu_{\rho^-} = \mu_{\mathrm{d}} - \mu_{\mathrm{u}} = -(\mu_{\mathrm{u}} - \mu_{\mathrm{d}}).$$

すなわち

$$\mu_{\rho^+} = -\mu_{\rho^-}$$

である。$\mu_{\mathrm{u}} = -2\mu_{\mathrm{d}}$ を用いれば

$$\mu_{\rho^+} = -3\mu_{\mathrm{d}}$$

となるが，陽子の磁気モーメント (2.73) は

$$\mu_{\mathrm{p}} = (4\mu_{\mathrm{u}} - \mu_{\mathrm{d}})/3 = (-8\mu_{\mathrm{d}} - \mu_{\mathrm{d}})/3 = -3\mu_{\mathrm{d}},$$

すなわち

$$\mu_{\rho^+} = -\mu_{\rho^-} = \mu_{\mathrm{p}}$$

が成り立つ。

2.20 電磁遷移 $\omega\to\pi^0\gamma$ はスピン変化を起こす磁気 2 重極遷移であるから，クォークの磁気モーメント μ_i $(i=1,2)$ による相互作用である。光子は図 2·10 の z 軸方向に放出されるとすれば，偏極ベクトルは $\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{R}} = -(1, i, 0)/\sqrt{2}$ ととることができて，磁気 2 重極相互作用は

$$\mu_i\boldsymbol{\sigma}_i\cdot\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{R}}^* = -\frac{\mu_i}{\sqrt{2}}(\sigma_1 - i\sigma_2) = -\sqrt{2}\,\mu_i(\sigma_-)_i$$

である。ω, π^0 の波動関数は

$$|\omega(M_J=1)> = \sqrt{\frac{1}{2}}(\bar{\mathrm{u}}\mathrm{u} + \bar{\mathrm{d}}\mathrm{d})\uparrow\uparrow,$$

$$|\pi^0> = \sqrt{\frac{1}{2}}(\bar{\mathrm{u}}\mathrm{u} - \bar{\mathrm{d}}\mathrm{d})\sqrt{\frac{1}{2}}(\uparrow\downarrow - \downarrow\uparrow)$$

だから

$$(\mu\sigma_-)_i(\mathrm{q}\!\uparrow)_i = \mu_{\mathrm{q}}(\mathrm{q}\!\downarrow)_i, \quad (\mu\sigma_-)_i(\mathrm{q}\!\downarrow)_i = 0, \qquad \mu_{\bar{\mathrm{q}}} = -\mu_{\mathrm{q}}$$

を用いて

$$\mathcal{M}(\omega\to\pi^0\gamma)=\sum_{i=1}^{2}<\pi^0|\mu_i\boldsymbol{\sigma}_i\cdot\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{R}}{}^*|\omega(M_J=1)>$$
$$=-\sqrt{2}\sum_{i=1}^{2}<\pi^0|\mu_i(\sigma_-)_i|\omega(M_J=1)>$$
$$=-\sqrt{2}\,\frac{2(\mu_{\mathrm{u}}-\mu_{\mathrm{d}})}{2}\,\frac{1}{\sqrt{2}}=\mu_{\mathrm{d}}-\mu_{\mathrm{u}}.$$

すなわち

$$\mathcal{M}(\omega\to\pi^0\gamma)=\mu_{\mathrm{d}}-\mu_{\mathrm{u}}.$$

2.21* 電磁相互作用はフレーバーを変えず，s は u, d と直交するから $\phi\nrightarrow\pi^0\gamma$.

次に，
$$|\rho^0>=\sqrt{\frac{1}{2}}(-\bar{\mathrm{u}}\mathrm{u}+\bar{\mathrm{d}}\mathrm{d})\uparrow\uparrow$$
を用いれば，前問と同様にして

$$\mathcal{M}(\rho\to\pi^0\gamma)=-\sqrt{2}\,\frac{2(\mu_{\mathrm{u}}+\mu_{\mathrm{d}})}{2}\,\frac{1}{\sqrt{2}}=-(\mu_{\mathrm{u}}+\mu_{\mathrm{d}}).$$

したがって
$$\frac{\mathrm{Rate}(\omega\to\pi^0\gamma)}{\mathrm{Rate}(\rho\to\pi^0\gamma)}=\left(\frac{\mu_{\mathrm{d}}-\mu_{\mathrm{u}}}{\mu_{\mathrm{d}}+\mu_{\mathrm{u}}}\right)^2.$$
$\mu_{\mathrm{d}},\mu_{\mathrm{u}}$ は d, u の電荷に比例しているから，$m_{\mathrm{d}}=m_{\mathrm{u}}$ と仮定すれば
$$(\mu_{\mathrm{d}}-\mu_{\mathrm{u}})^2/(\mu_{\mathrm{d}}+\mu_{\mathrm{u}})^2=1/(1/9)=9.$$
すなわち
$$\frac{\mathrm{Rate}(\omega\to\pi^0\gamma)}{\mathrm{Rate}(\rho\to\pi^0\gamma)}=\left(\frac{\mu_{\mathrm{d}}-\mu_{\mathrm{u}}}{\mu_{\mathrm{d}}+\mu_{\mathrm{u}}}\right)^2=9.$$

2.22 $\bar{\mathrm{u}}$ をスペクテーターとして，$\mathrm{c}\to\mathrm{s}(\bar{\mathrm{d}}\mathrm{u})$ によって $\mathrm{D}^0\to\mathrm{K}^-\pi^+$ が，$\mathrm{c}\to\mathrm{d}(\bar{\mathrm{d}}\mathrm{u})$ によって $\mathrm{D}^0\to\pi^-\pi^+$ が起こる。12.11 節でわかるように，$\mathrm{c}\to\mathrm{s}$ に比べて $\mathrm{c}\to\mathrm{d}$ 転化は "Cabibbo 角による抑制" を受ける。

2.23 ハドロン状態は $I=0$，$C=+1$ を持つはずである。観測されている主要なハドロン崩壊様式は，$\psi'\to\psi\pi^+\pi^-$，$\psi\pi^0\pi^0$，$\psi\eta$ で，その分岐比はそれぞれ 33, 17, 3 % である。

2.24 輻射遷移はパリティ逆の 2 つの状態間で起こる：レベルの相対パリティが奇か偶かにしたがって，$\Delta J=1$ 遷移は $E1$ または $M1$ になる。$\psi'\to\chi\gamma$ のそれぞれの χ に対する分岐比がほぼ等しいのは，$E1$ 遷移確率の表式に入っている $(2J+1)$ と位相空間 (k^3) の寄与が相殺するからである。

2.25 $\Gamma(\mathrm{q}\bar{\mathrm{q}}\to\mathrm{e}^+\mathrm{e}^-)$ は $e_{\mathrm{q}}{}^2$ に比例する：$|\rho>$ と $|\omega>$ はそれぞれ $(\mathrm{u}\bar{\mathrm{u}}\mp\bar{\mathrm{d}}\mathrm{d})/\sqrt{2}$ に対応する。$\mathrm{u}\bar{\mathrm{u}}$ 消滅と $\mathrm{d}\bar{\mathrm{d}}$ 消滅は区別できないので，2 つの振幅を加えなければならない。すなわち
$$\Gamma_{\rho,\omega}\propto\frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\mp\left(-\frac{1}{3}\right)\right)^2.$$

2.26* メソンのレプトン対崩壊の確率は，波動関数の原点の値の絶対値の 2 乗に比例する。D 波は原点で 0 だから，素朴に考えれば $\Gamma(^3\mathrm{D}_1\to\mathrm{e}^+\mathrm{e}^-)=0$ である。実験は $\Gamma(^3\mathrm{D}_1\to\mathrm{e}^+\mathrm{e}^-)\simeq0.4$ keV であり，2^3S_1 の $\psi(3.68)$ は $\Gamma(\psi(3.68)\to\mathrm{e}^+\mathrm{e}^-)\simeq2.1\,\mathrm{keV}$ である。これは 2^3S_1 と 1^3D_1 が混じることができて，$\psi(3.68)$ は 2^3S_1 にわずかの 1^3D_1 が混ざった状態であると考えられる。注意しなければならないのは，D メソン対 $\mathrm{D}\overline{\mathrm{D}}$ の閾値が 3.73 GeV で開けるから，$2^3S_1, 1^3D_1$ の $\mathrm{D}\overline{\mathrm{D}}$ 状態との混合も可能になり，問題はそれほど簡単ではない。

2.27* $\eta_c(\mathrm{c}\bar{\mathrm{c}})$ は，$L=0$，$S=0$ であるから，$P=-(-1)^L=-1$，$C=(-1)^{L+S}=1$. また，$\psi(\mathrm{c}\bar{\mathrm{c}})$ は，$L=0$，$S=1$ であり，$P=-1$，$C=-1$. グルーオンは，$J^{PC}=1^{--}$ だから，強い相互作用に

よるグルーオン崩壊は，$\eta_c(c\bar{c}) \to gg$，$\psi(c\bar{c}) \to ggg$，すなわち $n=2$，$n'=3$ が許される最小のグルーオン数である。

2.28 $4 \otimes 4 \otimes 4 = 20_S \oplus 20_{M_S} \oplus 20_{M_S} \oplus 4_A$ の 20_M は $SU(3)$ 分解すると

$$20_M = 8 \oplus (6 \oplus \bar{3}) \oplus 3$$

となる。$6 \oplus \bar{3}$ が $C=1$ 状態であり，$\Lambda_C{}^+$ は $\bar{3}$，Σ_C は 6 に属する。フレーバー波動関数は次のように書くことができる：

$$\Lambda_C{}^+ = c(ud - du), \qquad \Sigma_C{}^{++} = cuu,$$
$$\Sigma_C{}^+ = c(ud + du), \qquad \Sigma_C{}^0 = cdd.$$

強い相互作用による $\Sigma_C{}^{++} \to \Lambda_C{}^+ \pi^+$ 崩壊に続いて，弱い相互作用によって，$\Lambda_C{}^+ \to \Lambda \pi^+ \pi^+ \pi^-$，$\Lambda \to p\pi^-$ 崩壊が起こる。

2.29 $\boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \boldsymbol{\sigma}_2 = \begin{cases} -3 : S=0 \\ \;\;1 : S=1 \end{cases}$ であるから

$\Delta E_{hf}({}^3S_1) = \dfrac{2\pi\alpha}{3} \dfrac{1}{m_1 m_2} |\psi(0)|^2$，$\Delta E_{hf}({}^1S_0) = -\dfrac{2\pi\alpha}{3} \dfrac{3}{m_1 m_2} |\psi(0)|^2$ となり

$\Delta E_{hf}({}^3S_1) > \Delta E_{hf}({}^1S_0)$ である。

2.30* $\boldsymbol{S}_i = \boldsymbol{\sigma}_i/2$ とすれば，$\boldsymbol{S} = \boldsymbol{S}_1 + \boldsymbol{S}_2$ として

$$(\boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \boldsymbol{\sigma}_2) = 4(\boldsymbol{S}_1 \cdot \boldsymbol{S}_2) = 2(\boldsymbol{S}^2 - \boldsymbol{S}_1{}^2 - \boldsymbol{S}_2{}^2) = 2[S(S+1) - S_1(S_1+1) - S_2(S_2+1)].$$

$S_1 = S_2 = 1/2$，$S=0(\pi)$，$S=1(K^*)$ を代入して

$$\boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \boldsymbol{\sigma}_2 = \begin{cases} -3 : & \pi \\ \;\;1 : & K^* \end{cases}$$

(2.91) に代入して

$$m(\pi) = m_u + m_d - (3a/m_u m_d), \qquad m(K^*) = m_u + m_s + (a/m_u m_s) \tag{1}$$

を得る。$\rho, \pi \sim (u\bar{d})$，$K, K^* \sim (\bar{s}u)$，$D, D^* \sim (c\bar{d})$，$F, F^* \sim (\bar{s}c)$ だから，$m_u = m_d$ とすれば，$m_\rho \equiv \rho$ 等と略記して

$$\rho - \pi = \frac{4a}{m_u{}^2}, \qquad K^* - K = \frac{4a}{m_u m_s}, \qquad D^* - D = \frac{4a}{m_u m_c}, \qquad F^* - F = \frac{4a}{m_c m_s} \tag{2}$$

より

$$\rho - \pi = \frac{m_s}{m_u}(K^* - K) = \frac{m_c}{m_u}(D^* - D) = \frac{m_c m_s}{m_u{}^2}(F^* - F) \tag{3}$$

を得る。

$m_u = m_d = 0.31$，$m_s = 0.48$，$m_c = 1.65$，$a/m_u{}^2 = 0.16$ を用いれば，

$$m(\pi) = 0.14, \qquad m(D) = 1.87$$
$$m(\rho) = 0.78, \qquad m(D^*) = 1.99$$
$$m(K) = 0.48, \qquad m(F) = 2.07$$
$$m(K^*) = 0.89, \qquad m(F^*) = 2.15$$

を得る。また $m_s/m_u = 1.55$，$m_c/m_u = 5.32$，$m_c m_s/m_u{}^2 = 8.24$ を用いて，

$$\rho - \pi = 0.64, \qquad \frac{m_s}{m_u}(K^* - K) = 0.635,$$

$$\frac{m_c}{m_u}(D^* - D) = 0.64, \qquad \frac{m_c m_s}{m_u{}^2}(F^* - F) = 0.66$$

を得るので，(3) はよい近似になっていることがわかる。

2.31* 各々のクォークのスピンを $\boldsymbol{S}_i=\boldsymbol{\sigma}_i/2$ として $\boldsymbol{S}=(\boldsymbol{\sigma}_1+\boldsymbol{\sigma}_2+\boldsymbol{\sigma}_3)/2$ と書けば

$$\sum_{i>j}\boldsymbol{\sigma}_i\cdot\boldsymbol{\sigma}_j=4\sum_{i>j}\boldsymbol{S}_i\cdot\boldsymbol{S}_j=2\left[S(S-1)-3\cdot\frac{3}{4}\right]=\begin{cases}-3：\mathrm{N},\ S=1/2\\+3：\Delta,\ S=3/2\end{cases}$$

(2.92) で $m_{\mathrm{d}}=m_{\mathrm{u}}$ として

$$m(\mathrm{N})=3m_{\mathrm{u}}-\frac{3a'}{2m_{\mathrm{u}}{}^2},\qquad m(\Delta)=3m_{\mathrm{u}}+\frac{3a'}{2m_{\mathrm{u}}{}^2}$$

$a'>0$ とすれば $m(\Delta)>m(\mathrm{N})$ で，質量差は

$$m(\Delta)-m(\mathrm{N})=\frac{3a'}{m_{\mathrm{u}}{}^2}$$

である。前問により $m(\rho)-m(\pi)=4a/m_{\mathrm{u}}{}^2$ だから，$a=a'$ とすれば

$$m(\Delta)-m(\mathrm{N})=\frac{3}{4}[m(\rho)-m(\pi)]$$

となる。原著では 3/4 ではなく 1/2 となっているが，これは誤りである。原著者の了解を得て訂正しておく。

2.32* Q がアイソ 1 重項だから qq が $\Lambda(\Sigma)$ のアイソスピンを作り出さなければならない。したがって $\Lambda(\Sigma)$ では $I(\mathrm{qq})=0\ (1)$ でアイソスピン反対称(対称)であるから，スピンは $\Lambda(\Sigma)$ に対して $S=0\ (1)$ で反対称 (対称) である。カラーにつきどちらも反対称なので，全体として反対称というわけである。

$\boldsymbol{S}_i\equiv\boldsymbol{\sigma}_i/2$ として

$$\boldsymbol{S}^2=(\boldsymbol{S}_1+\boldsymbol{S}_2+\boldsymbol{S}_3)^2$$
$$=(\boldsymbol{S}_1+\boldsymbol{S}_2)^2+\boldsymbol{S}_3{}^2+2(\boldsymbol{S}_1+\boldsymbol{S}_2)\cdot\boldsymbol{S}_3$$

$$(\boldsymbol{S}_1+\boldsymbol{S}_2)\cdot\boldsymbol{S}_3=\frac{1}{2}[\boldsymbol{S}^2-(\boldsymbol{S}_1+\boldsymbol{S}_2)^2-\boldsymbol{S}_3{}^2]$$

$$\Lambda：\quad \boldsymbol{S}^2=\frac{3}{4},\ (\boldsymbol{S}_1+\boldsymbol{S}_2)^2=0,\ \boldsymbol{S}_3{}^2=\frac{3}{4}$$

$$\Sigma：\quad \boldsymbol{S}^2=\frac{3}{4},\ (\boldsymbol{S}_1+\boldsymbol{S}_2)^2=2,\ \boldsymbol{S}_3{}^2=\frac{3}{4}$$

$$\Sigma^*：\quad \boldsymbol{S}^2=\frac{15}{4},\ (\boldsymbol{S}_1+\boldsymbol{S}_2)^2=2,\ \boldsymbol{S}_3{}^2=\frac{3}{4}$$

を代入すれば

$$(\boldsymbol{S}_1+\boldsymbol{S}_2)\cdot\boldsymbol{S}_3=\begin{cases}0 & \Lambda\\-1 & \Sigma\\+\dfrac{1}{2} & \Sigma^*\end{cases}$$

一方

$$\boldsymbol{S}_1\cdot\boldsymbol{S}_2=\begin{cases}-3/4 & \Lambda\\ 1/4 & \Sigma,\Sigma^*\end{cases}$$

であるから，$m_0=2m_{\mathrm{u}}+m_Q$ とすれば，(2.92) により

$$m(\Lambda_Q)=m_0-\frac{3a'}{2m_{\mathrm{u}}{}^2}$$

$$m(\Sigma_Q)=m_0+\frac{2a'}{m_{\mathrm{u}}{}^2}\left(\frac{1}{4}-\frac{m_{\mathrm{u}}}{m_Q}\right)$$

$$m(\Sigma_Q{}^*)=m_0+\frac{a'}{m_{\mathrm{u}}{}^2}\left(\frac{1}{2}+\frac{m_{\mathrm{u}}}{m_Q}\right)$$

となる。上で得た質量公式を用いて $m_Q=m_{\mathrm{s}}, m_{\mathrm{c}}$ を代入して

$$\frac{m(\Sigma_c)-m(\Lambda_c)}{m(\Sigma)-m(\Lambda)}=\frac{2\dfrac{a'}{m_u{}^2}\left(1-\dfrac{m_u}{m_c}\right)}{2\dfrac{a'}{m_u{}^2}\left(1-\dfrac{m_u}{m_s}\right)}=\frac{m_s}{m_c}\frac{(m_c-m_u)}{(m_s-m_u)},$$

すなわち

$$m(\Sigma_c)-m(\Lambda_c)=\frac{m_s}{m_c}\frac{(m_c-m_u)}{(m_s-m_u)}[m(\Sigma)-m(\Lambda)]\simeq 0.16\ \text{GeV}.$$

ただし次の値を用いた：

$m(\Sigma)=1.19\,\text{GeV}$, $m(\Lambda)=1.12\,\text{GeV}$, $m_c=1.65\,\text{GeV}$, $m_s=0.48\,\text{GeV}$, $m_u=0.31\,\text{GeV}$.

3.1* z と t の Lorentz 変換は

$$ct'=\gamma(ct-\beta z),\qquad z'=\gamma(z-\beta ct)$$

と書くことができる。ただし $\beta=v/c$, $\gamma=1/\sqrt{1-\beta^2}$. $\beta=\tanh\theta$ であるから $\gamma=\cosh\theta$ となる。これを上式に代入して,

$$ct'=\cosh\theta\cdot ct-\sinh\theta\cdot z,\qquad z'=-\sinh\theta\cdot ct+\cosh\theta\cdot z$$

を得る。

3.2

$$\sum_{\mu\nu}g_{\mu\nu}g^{\mu\nu}=\sum_{\mu}(g_{\mu\mu})^2=4.$$

3.3

重心系： $p_1=\left(\frac{1}{2}E_{\text{cm}},\ \boldsymbol{p}\right)$, $p_2=\left(\frac{1}{2}E_{\text{cm}},\ -\boldsymbol{p}\right)$

実験室系： $p_1=(E_{\text{lab}},\ \boldsymbol{p}_{\text{lab}})$, $p_2=(M,\ \boldsymbol{0})$

だから $s=(E_{\text{lab}}+M)^2-\boldsymbol{p}_{\text{lab}}{}^2=(E_{\text{lab}}+M)^2-(E_{\text{lab}}{}^2-M^2)=2ME_{\text{lab}}+M^2.$

固定標的の利点：標的の密度が大きいので，フラックスが増える。πp, Kp, πd 等々の反応を選択できる。検出器は相互作用点のまわりの比較的小さい立体角をカバーすれば十分だから，実験が安くつく。

3.4

$$\sum_{\substack{n\neq i\\ m\neq n}}V_{fn}\frac{1}{E_m-E_n+i\varepsilon}V_{nm}\frac{1}{E_i-E_m+a\varepsilon}V_{mi}.$$

3.5 (a) 出ていく e^- および e^+ のエネルギーをそれぞれ E, E' とすれば，行列要素には

$$\int(e^{-iEt})^*e^{-i\omega t}e^{-i(-E')t}dt=2\pi\delta(E+E'-\omega)$$

が含まれる。

(b) 消滅する e^- および e^+ のエネルギーをそれぞれ E, E' とすれば，行列要素には

$$\int(e^{-i(-E')t})^*e^{+i\omega t}e^{-iEt}dt=2\pi\delta(E+E'-\omega)$$

が含まれ, (a), (b) ともにエネルギー保存を満足している。

行列要素の空間部分を考えると，(a) で入射光子，e^-, e^+ の運動量をそれぞれ $\boldsymbol{k}, \boldsymbol{p}, \boldsymbol{p}'$ とすれば，行列要素は

$$\int(e^{-i\,\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x}})^*e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}}e^{i\boldsymbol{p}'\cdot\boldsymbol{x}}d^{3}x=(2\pi)^3\delta^3(\boldsymbol{p}+\boldsymbol{p}'-\boldsymbol{k}).$$

すなわち，3次元運動量の保存則が得られる。

4.1 周期境界条件を満足するためには, p_x の許される値は $L\cdot p_x=2\pi n$ である。ただし n は整数である。したがって，p_x と p_x+dp_x の間にある許される状態の数は $Ldp_x/2\pi$ である。

4.2 (4.30) から

$$dQ=\frac{1}{4\pi^2}\frac{d^3p_C}{2E_C}\cdot\frac{d^3p_D}{2E_D}\delta^{(4)}(p_A+p_B-p_C-p_D)$$
$$=\frac{1}{4\pi^2}\frac{d^3p_C}{2E_C}\frac{1}{2E_D}\delta(E_A+E_B-E_C-E_D).$$

重心系 ($\sqrt{s}\equiv W=E_A+E_B$) では

$$dQ=\frac{1}{4\pi^2}\frac{p_f{}^2dp_fd\Omega}{4E_CE_D}\delta(W-E_C-E_D).$$

ここで $W=E_C+E_D=(p_f{}^2+m_C{}^2)^{1/2}+(p_f{}^2+m_D{}^2)^{1/2}$ を用いると

$$\frac{dW}{dp_f}=p_f\left(\frac{1}{E_C}+\frac{1}{E_D}\right).$$

dp_f を dQ の表式に代入して

$$dQ=\frac{1}{4\pi^2}\frac{p_f}{4}\left(\frac{1}{E_C+E_D}\right)dWd\Omega\delta(W-E_C-E_D).$$

$$\boxed{dQ=\frac{1}{4\pi^2}\frac{p_f}{4\sqrt{s}}d\Omega.}$$

(4.32) から

$$F=4(p_iE_B+p_iE_A)=4p_i\sqrt{s}$$

を得るから，微分断面積は

$$\boxed{\left.\frac{d\sigma}{d\Omega}\right|_{cm}=\frac{1}{64\pi^2s}\frac{p_f}{p_i}|\mathcal{M}|^2}$$

ここで $s=(E_A+E_B)^2=(E_C+E_D)^2$，$|\boldsymbol{p}_A|=|\boldsymbol{p}_B|=p_i$，$|\boldsymbol{p}_C|=|\boldsymbol{p}_D|=p_f$ である。

4.3* 電子，ミューオンの質量を無視すれば，A+B→C+D の重心系で

$$p_A=(p,\boldsymbol{p}),\quad p_B=(p,-\boldsymbol{p}),\quad p_C=(p,\boldsymbol{p}'),\quad p_D=(p,-\boldsymbol{p}')$$

と書くことができる。ただし $p=|\boldsymbol{p}|=|\boldsymbol{p}'|$ である。(4.18) に代入して $q=p_D-p_B$ とすれば

$$\mathcal{M}=-e^2\frac{(p_A+p_C)\cdot(p_B+p_D)}{(p_D-p_B)^2}=-e^2\frac{(2p)^2+(\boldsymbol{p}+\boldsymbol{p}')^2}{(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}')^2}=-e^2\frac{3+\cos\theta}{1-\cos\theta},$$

$$\left.\frac{d\sigma}{d\Omega}\right|_{cm}=\frac{e^4}{64\pi^2s}\left(\frac{3+\cos\theta}{1-\cos\theta}\right)^2=\frac{\alpha}{4s}\left(\frac{3+\cos\theta}{1-\cos\theta}\right)^2.$$

4.4* まず $e^-(p_A)+\mu^-(p_B)\to e^-(p_C)+\mu^-(p_D)$ は (4.18) により次式で与えられている：

$$\mathcal{M}(e^-\mu^-\to e^-\mu^-)=-\frac{e^2(p_A+p_C)_\mu(p_B+p_D)^\mu}{(p_A-p_C)^2}.$$

$s=(p_A+p_B)^2=(p_C+p_D)^2$，$t=(p_A-p_C)^2=(p_D-p_B)^2$，$u=(p_A-p_D)^2=(p_C-p_B)^2$ とすると

$$\mathcal{M}(e^-\mu^-\to e^-\mu^-)=\frac{-e^2(s-u)}{t}. \qquad (1)$$

$e^-\mu^+\to e^-\mu^+$ は $p_B\to -p_B$，$p_D\to -p_D$ として，$e^-(p_A)+\mu^+(-p_D)\to e^-(p_C)+\mu^+(-p_B)$ だから，Mandelstam 変数は s↔u の入れ換えになっている。すなわち $e^-\mu^+\to e^-\mu^+$ は (1) から su 交叉により得られて

$$\mathcal{M}(e^-\mu^+\to e^-\mu^+)=\frac{-e^2(u-s)}{t}.$$

次に $e^-e^+\to\mu^-\mu^+$ は $p_C\to -p_C$, $p_B\to -p_B$ として $e^-(p_A)+e^+(-p_C)\to\mu^-(p_D)+\mu^+(-p_B)$ だから，Mandelstam 変数は s↔t の入れ換えになっている。すなわち $e^-\mu^+\to\mu^-\mu^+$ は (1) から st

交叉により得られて

$$\mathscr{M}(e^-e^+ \to \mu^-\mu^+) = \frac{-e^2(t-u)}{s}.$$

(2), (3) はいずれも，Feynman 則に従って正直に計算した結果と一致していることは容易にわかる。

4.5 (4.5) を用い，$p_i{}^2 = m_i{}^2$ に注意すれば

$$s+t+u = \sum_i m_i{}^2 + 2p_A{}^2 + 2p_A\cdot(p_B - p_C - p_D) = \sum_i m_i{}^2.$$

4.6 $e^-e^- \to e^-e^-$ が s チャネル過程 A+B→C+D であれば

$$p_A = (E, \boldsymbol{k}_i),\ \ p_B = (E, -\boldsymbol{k}_i),\ \ p_C = (E, \boldsymbol{k}_f),\ \ p_D = (E, -\boldsymbol{k}_f).$$

ただし $E = (k^2 + m^2)^{1/2}$ である。したがって，

$$s = (p_A + p_B)^2 = 4E^2 = 4(k^2 + m^2).$$

$\boldsymbol{k}_i \cdot \boldsymbol{k}_f = k^2 \cos\theta$ を用いて

$$t = (p_A - p_C)^2 = -(\boldsymbol{k}_i - \boldsymbol{k}_f)^2 = -2k^2(1-\cos\theta),$$
$$u = (p_A - p_D)^2 = -(\boldsymbol{k}_i + \boldsymbol{k}_f)^2 = -2k^2(1+\cos\theta)$$

を得る。$k^2 \geq 0$ から $s \geq 4m^2$：$-1 \leq \cos\theta \leq 1$ から $t \leq 0$ および $u \leq 0$ である。

4.7 $p_A, \cdots, p_D$ は s チャネル AB→CD で定義されたものを用いれば，$A\bar{D} \to C\bar{B}$ の重心系に対して

$$p_A = (E, \boldsymbol{k}_i),\ \ -p_D = (E, -\boldsymbol{k}_i),\ \ p_C = (E, \boldsymbol{k}_f),\ \ -p_B = (E, -\boldsymbol{k}_f).$$

ここで $\boldsymbol{k}_i$，$-\boldsymbol{k}_i$，$\boldsymbol{k}_f$，$-\boldsymbol{k}_f$ はそれぞれ A, $\bar{D}$, C, $\bar{B}$ の 3 次元運動量である。(4.43) を用いて

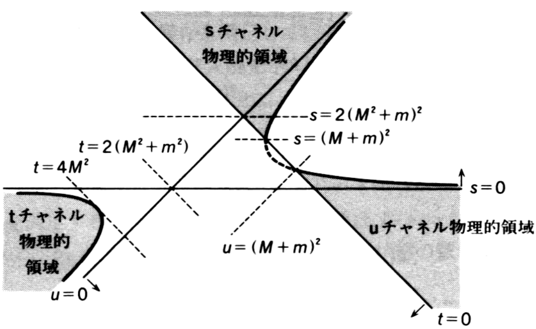
$$u = (p_A - p_D)^2 = (p_A + \bar{p}_{\bar{D}})^2 = 4E^2 = 4(k^2 + m^2),$$
$$s = (p_A + p_B)^2 = (p_A - p_{\bar{B}})^2 = -2k^2(1+\cos\theta),$$
$$t = (p_A - p_C)^2 = -2k^2(1-\cos\theta),$$

すなわち，物理的領域は $u \geq 4m^2$，$s \leq 0$，$t \leq 0$ である。

4.8* $e^-(p_A) + \mu^-(p_B) \to e^-(p_C) + \mu^-(p_D)$ において，$s = (p_A + p_B)^2$，$t = (p_A - p_C)^2$，$u = (p_A - p_D)^2$ とすれば，s チャネルの物理的領域は $s \geq (M+m)^2$，$t \leq 0$，すなわち $-1 \leq \cos\theta_s \leq 1$ である (θ_s は s チャネル散乱角)。境界は $\cos\theta_s = 1$ より $t = 0$，$\cos\theta_s = -1$ より $su = (M^2 - m^2)^2$ が得られる。交叉 u チャネルの物理的領域も同様にして

$$u \geq (M+m)^2, \quad t \leq 0, \quad s \leq (M^2 - m^2)^2/u$$

で与えられる。Mandelstam 図は下のようになる。



4.9 $e^-(p_A)+e^+(p_B)\to e^-(p_C)+e^+(p_D)$ は，(4.42) により $e^-(p_A)+e^-(-p_D)\to e^-(p_C)+e^-(-p_B)$ となるから，$s=(p_A+p_B)^2\to(p_A-p_D)^2$, $t=(p_A-p_C)^2\to(p_A-p_C)^2$, $u=(p_A-p_D)^2\to(p_A+p_B)^2$ となり，$s\leftrightarrow u$ の入れ換えになっている。すなわち (4.42) は

$$\mathcal{M}_{e^-e^+}(s,t,u)=\mathcal{M}_{e^-e^-}(u,t,s)$$

を意味する。

4.10* (4.41) により $e^-(p_A)+e^+(p_B)\to e^-(p_C)+e^+(p_D)$ の行列要素は

$$\mathcal{M}_{e^-e^+}=-e^2\left[\frac{(p_A+p_C)_\mu(-p_D-p_B)^\mu}{(p_D-p_B)^2}+\frac{(p_A-p_B)_\mu(-p_D+p_C)^\mu}{(p_C+p_D)^2}\right]$$

である。$s=(p_A+p_B)^2=(p_C+p_D)^2$, $t=(p_A-p_C)^2=(p_D-p_B)^2$, $u=(p_A-p_D)^2=(p_C-p_B)^2$ を用いれば

$$p_A\cdot p_D+p_A\cdot p_B+p_C\cdot p_D+p_B\cdot p_C=2m^2-u+s-2m^2=s-u$$
$$p_A\cdot p_D-p_A\cdot p_C-p_B\cdot p_D+p_B\cdot p_C=2m^2-u+t-2m^2=t-u$$

となるから

$$\mathcal{M}_{e^-e^+}=e^2\left(\frac{s-u}{t}+\frac{t-u}{s}\right) \tag{4.47}$$

を得る。第 1 項は図 4·5 (a)，第 2 項は図 4·5 (c) に対応する。$\mathcal{M}_{e^-e^+}$ は $s\leftrightarrow t$ に対して交叉対称であるが，これは交叉 $s\leftrightarrow t$ は，図 4·5 (a) ↔ 図 4·5 (c) に対応することを示す。

5.1* (1) ハミルトニアン H，運動量 $\boldsymbol{P}$ がエルミートだから，$\boldsymbol{\alpha}$ と $\boldsymbol{\beta}$ はエルミートである。(2) 4 つの Dirac 行列 α_i と β それぞれと反可換な行列が存在する。b_μ を $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ の 1 つ，b_ν を b_μ と反可換な行列とすれば，$b_\nu{}^2=1$，$\mathrm{Tr}AB=\mathrm{Tr}BA$ であるから

$$\mathrm{Tr}b_\mu=\mathrm{Tr}b_\mu b_\nu{}^2=\mathrm{Tr}b_\nu b_\mu b_\nu=-\mathrm{Tr}b_\mu b_\nu{}^2=0.$$

すなわち $\mathrm{Tr}b_\mu=0$ となり，$\mathrm{Tr}\alpha_i=\mathrm{Tr}\beta=0$ である。$\alpha_i{}^2=\beta^2=1$ であるから，それらの固有値が ±1 であることは明らかである。α_i,β のどれか 1 つを対角化する表示が存在するが，$\alpha_i{}^2=\beta^2=1$, $\mathrm{Tr}\alpha_i=\mathrm{Tr}\beta=0$ の性質は表示に無関係であり，対角要素に固有値 ±1 が並ぶが，$+1$ と -1 の数は等しくなければならない。すなわち α_i,β の行列の次元は偶数である。

5.2 (5.7) に $\gamma^\nu\partial_\nu$ を作用させれば

$$\begin{aligned}0&=\gamma^\nu\partial_\nu(i\gamma^\mu\partial_\mu-m)\psi=i(1/2)(\gamma^\nu\gamma^\mu+\gamma^\mu\gamma^\nu)\partial_\nu\partial_\mu\psi-m\gamma^\nu\partial_\nu\psi\\&=ig^{\mu\nu}\partial_\nu\partial_\mu\psi+im^2\psi\\&=i(\Box^2+m^2)\psi.\end{aligned}$$

5.3 運動量 $\boldsymbol{p}'=(p\sin\theta,\ 0,\ p\cos\theta)$ ベクトルは，ベクトル $\boldsymbol{p}=(0,0,p)$ を y 軸のまわりに θ だけ回転して得られる。したがって，求めるヘリシティー固有スピノール $u(\boldsymbol{p}')$ は，(2.26) を用いて (5.27) の $u^{(1)}(\boldsymbol{p})$ から得られる：

$$u(\boldsymbol{p}')=N\left(\begin{array}{c|c}\cos\dfrac{\theta}{2}-i\sigma_2\sin\dfrac{\theta}{2} & 0\\\hline 0 & \cos\dfrac{\theta}{2}-i\sigma_2\sin\dfrac{\theta}{2}\end{array}\right)\begin{pmatrix}1\\0\\p/(E+m)\\0\end{pmatrix}$$

$$=N\cos\frac{\theta}{2}\begin{pmatrix}1\\0\\p/(E+m)\\0\end{pmatrix}.$$

5.4 軌道角運動量 $\boldsymbol{L}$ 以外に角運動量が存在して，$\boldsymbol{L}$ だけではハミルトニアン H と交換しないことを示せばよい。その 1 つの方法は，具体的な成分で計算することである。すなわち

$$[H,\ L_1]=[\alpha\cdot\boldsymbol{P},\ x_2P_3-x_3P_2]=-i(\alpha_2P_3-\alpha_3P_2)=-i(\boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{P})_1\neq 0,$$

他の成分も同様に計算できて，$[H,\ \boldsymbol{L}]=-i(\boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{p})\neq 0.$

5.5* (5.24) で $E>0$ の解に対して $u_A{}^{(s)}=\chi^{(s)}$，$\chi^{(1)}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$，$\chi^{(2)}=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ と書けば

$$u_B{}^{(s)}=\frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{P}}{E+m}u_A{}^{(s)}=\frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{P}}{E+m}\chi^{(s)}.$$

非相対論的とすれば $E\sim m$，$\boldsymbol{P}=m\boldsymbol{v}$ だから，$u_A{}^{(s)}$ に比べて $u_B{}^{(s)}$ は v/c の程度になる。次に (5.24) で $u_{A,B}$ のかわりに $\psi_{A,B}$ と書き，$P^\mu\to P^\mu+A^\mu$ と置き換えると

$$\boldsymbol{\sigma}\cdot(\boldsymbol{P}+e\boldsymbol{A})\psi_B=(E+eA^0-m)\psi_A, \quad (1)$$

$$\boldsymbol{\sigma}\cdot(\boldsymbol{P}+e\boldsymbol{A})\psi_A=(E+eA^0+m)\psi_B. \quad (2)$$

(1) の両辺に $E+eA^0+m$ を乗じて

$$(E+eA^0+m)\boldsymbol{\sigma}\cdot(\boldsymbol{P}+e\boldsymbol{A})\psi_B=(E+eA^0+m)(E+eA^0-m)\psi_A. \quad (3)$$

$E^{NR}=E-m$ と定義し，$E\simeq m$，$|eA^0|\ll m$ に注意すると，(3) の右辺は

$$\begin{aligned}(E+eA^0+m)(E+eA^0-m)&=(E^{NR}+2m+eA^0)(E^{NR}+eA^0)\\&=2m(E^{NR}+eA^0)+(E^{NR}+eA^0)^2\simeq 2m(E^{NR}+eA^0).\end{aligned}$$

(2) を (3) の左辺に代入して

$$(1/2m)\boldsymbol{\sigma}\cdot(\boldsymbol{P}+e\boldsymbol{A})\boldsymbol{\sigma}\cdot(\boldsymbol{P}+e\boldsymbol{A})\psi_A=(E^{NR}+eA^0)\psi_A.$$

$(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{A})(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{B})=\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}+i\boldsymbol{\sigma}\cdot(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})$, $\boldsymbol{P}\times\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{P}=-i\nabla\times\boldsymbol{A}=-i\boldsymbol{B}$ を用いて左辺を簡単にすると

$$[(\boldsymbol{P}+e\boldsymbol{A})^2/2m+e\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{B}/2m-eA^0]\psi_A=E^{NR}\psi_A$$

を得る。これは，すなわち (5.31) である。

5.6 $\gamma^\mu=-(C\gamma^0)\gamma^{\mu *}(C\gamma^0)^{-1}=-C\gamma^0\gamma^{\mu *}\gamma^0C^{-1}=-C\gamma^{\mu T}C^{-1}$ だから $\gamma^0=-C\gamma^0C^{-1}$ が成り立ち，$C\gamma^0=(C\gamma^0)^T$ となるが，これは $C=-C^T$ が成り立つことを示す。また $(C\gamma^0)^2=1$ より $C=-C^{-1}$ である。(5.4) および (5.8) の γ 行列の表示をとれば

$$\gamma^0=\begin{pmatrix}0 & I\\ I & 0\end{pmatrix},\qquad \gamma^k=\begin{pmatrix}0 & \sigma_k\\ -\sigma_k & 0\end{pmatrix}$$

であるから，上の $C\gamma^0$ の満たす性質と比較して

$$C\gamma^0=i\gamma^2=\begin{pmatrix} & & & 1\\ & & -1 & \\ & -1 & & \\ 1 & & & \end{pmatrix}$$

を得る。また

$$\bar{\psi}_c=\psi_c{}^\dagger\gamma^0=(C\gamma^0\psi^*)^\dagger\gamma^0=\psi^TC\gamma^0\gamma^0=-\psi^TC^{-1}$$

が成り立つ。

5.7 $\bar{u}\gamma^0(\gamma^\mu p_\mu-m)u=0$ と $\bar{u}(\gamma^\mu p_\mu-m)\gamma^0u=0$ を作り，引き算すると $\gamma^0\gamma^k=-\gamma^k\gamma^0$ だから $2\bar{u}p_0u-2mu^\dagger u=0$，すなわち

$$\bar{u}^{(r)}u^{(s)}=\frac{m}{E}u^{(r)\dagger}u^{(s)}=2m\delta_{rs}.$$

v についても同様にして

$$\bar{v}^{(r)}v^{(s)}=-2m\delta_{rs}$$

が得られる。

5.8* $(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p})^2=(\sigma_x p_x+\sigma_y p_y+\sigma_z p_z)^2=p_x{}^2\sigma_x{}^2+p_y{}^2\sigma_y{}^2+p_z{}^2\sigma_z{}^2+p_xp_y(\sigma_x\sigma_y+\sigma_y\sigma_x)$
$+p_yp_z(\sigma_y\sigma_z+\sigma_z\sigma_y)+p_xp_z(\sigma_x\sigma_z+\sigma_z\sigma_x).$

$\{\sigma_i,\sigma_j\}=2\delta_{ij}$ であるから

$$(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p})^2=|\boldsymbol{p}|^2.$$

5.9 $u^{(s)}=N\begin{pmatrix}\chi^{(s)}\\ \dfrac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p}}{E+m}\chi^{(s)}\end{pmatrix},\qquad \bar{u}^{(s)}=N\begin{pmatrix}\chi^{(s)\dagger} & \dfrac{-\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p}}{E+m}\chi^{(s)\dagger}\end{pmatrix}.$

$\sum_{s=1,2}\chi^{(s)}\chi^{(s)\dagger}=I$, $N^2=E+m$ であるから

$$\sum_{s=1,2}u^{(s)}\bar{u}^{(s)}=\begin{pmatrix}I & -\dfrac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p}}{E+m}\\ \dfrac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p}}{E+m} & -\left(\dfrac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p}}{E+m}\right)^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}E+m & -\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p}\\ \boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p} & -(E-m)\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}0 & -\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p}\\ \boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p} & 0\end{pmatrix}+E\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}+m\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$=-\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & \boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p}\\ \boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p} & 0\end{pmatrix}+E\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}+m\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$=E\beta-\beta\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{p}+m$$

$$=\not{p}+m.$$

すなわち $\sum_{s=1,2}u^{(s)}\bar{u}^{(s)}=\not{p}+m.$

同様にして

$$\sum_{s=1,2}v^{(s)}\bar{v}^{(s)}=\not{p}-m.$$

5.10 $\not{p}\not{p}=\gamma^\nu\gamma^\mu p_\nu p_\mu=-\gamma^\mu\gamma^\nu p_\nu p_\mu+2g^{\mu\nu}p_\nu p_\mu=-\not{p}\not{p}+2p^2.$

すなわち　$\not{p}\not{p}=p^2.$

5.11 任意のスピノルに Λ_+ を作用させれば

$$\Lambda_+\left(\sum_{r=1}^4 a_r u^{(r)}\right)=\sum_{r=1}^4 a_r\left(\frac{\sum_{s=1}^2 u^{(s)}\bar{u}^{(s)}}{2m}\right)u^{(r)}=\sum_{r=1}^4 a_r\sum_{s=1}^2\frac{u^{(s)}2m}{2m}\delta_{rs}$$

$$=\sum_{r=1}^2 a_r u^{(r)},$$

$$\Lambda_+{}^2=\frac{\not{p}\not{p}+2m\not{p}+m^2}{4m^2}=\frac{p^2+2m\not{p}+m^2}{4m^2}=\frac{2m(\not{p}+m)}{4m^2}=\frac{\not{p}+m}{2m}=\Lambda_+.$$

同様にして，Λ_- は負エネルギー状態の射影演算子であることを示すことができる。

5.12*

$$S^{-1}\gamma^\mu S=\Lambda_\nu{}^\mu\gamma^\nu$$

を無限小 Lorentz 変換として微小量の 1 次までとり

$$S=1+T$$

とすれば

$$S^{-1}\gamma^\mu S=(1-T)\gamma^\mu(1+T)=\gamma^\mu+(\gamma^\mu T-T\gamma^\mu)=\Lambda_\nu{}^\mu\gamma^\nu=\gamma^\mu+\varepsilon_\nu{}^\mu\gamma^\nu.$$

1 次の量を比較して T は

$$\gamma^\mu T-T\gamma^\mu=\varepsilon_\nu{}^\mu\gamma^\nu$$

を満足しなけばならない。S を $\det S=1$ と規格化すれば

$$\det(1+T)=1+\mathrm{Tr}\,T=1$$

であるから

$$\mathrm{Tr}\,T=0.$$

したがって

$$T=(1/4i)(\gamma_\mu\gamma_\nu-\gamma_\nu\gamma_\mu)\varepsilon^{\mu\nu},$$

すなわち

$$T=-\frac{i}{4}\sigma_{\mu\nu}\varepsilon^{\mu\nu}, \qquad S_L=1-\frac{i}{4}\sigma_{\mu\nu}\varepsilon^{\mu\nu}$$

を得る。次に

$$S_L{}^{-1}\gamma^\mu S_L=\Lambda_\nu{}^\mu\gamma^\nu$$

の両辺の Hermite 共役をとれば

$$(S_L{}^{-1}\gamma^\mu S_L)^\dagger=(\Lambda_\nu{}^\mu\gamma^\nu)^\dagger.$$

左と右から γ^0 を掛ければ $(\gamma^0)^{-1}=\gamma^0$ であるから

$$左辺=\gamma^0(S_L{}^{-1}\gamma^\mu S_L)^\dagger\gamma^0=(\gamma^0 S_L{}^\dagger\gamma^0)\gamma^\mu(\gamma^0 S_L{}^\dagger\gamma^0)^{-1},$$
$$右辺=\gamma^0(\Lambda_\nu{}^\mu\gamma^\nu)^\dagger\gamma^0=\gamma^0(\Lambda_0{}^\mu\gamma^0-\Lambda_k{}^\mu\gamma^k)^\dagger\gamma^0=\Lambda_0{}^\mu-\Lambda_k{}^\mu\gamma^k=\Lambda_\nu{}^\mu\gamma^\nu.$$

すなわち

$$(\gamma^0 S_L{}^\dagger\gamma^0)\gamma^\mu(\gamma^0 S_L{}^\dagger\gamma^0)^{-1}=\Lambda_\nu{}^\mu\gamma^\nu.$$

右辺は $S_L{}^{-1}\gamma^\mu S_L$ に等しいから

$$(S_L\gamma^0 S_L{}^\dagger\gamma^0)\gamma^\mu(S_L\gamma^0 S_L{}^\dagger\gamma^0)^{-1}=\gamma^\mu,$$

つまり $S_L\gamma^0 S_L{}^\dagger\gamma^0$ はすべての γ^μ と可換である。したがって Schur の Lemma によって

$$S_L\gamma^0 S_L{}^\dagger\gamma^0=aI$$

が成り立つ。ここで a は定数である。$a=1$ととってかまわないから以後 $a=1$ とすれば，$(\gamma^0)^{-1}=\gamma^0$ に注意して

$$S_L{}^\dagger\gamma^0=\gamma^0 S_L{}^{-1},$$

すなわち

$$S_L{}^{-1}=\gamma^0 S_L{}^\dagger\gamma^0$$

が証明された。$\{\gamma_5,\ \gamma_\mu\}=0$ だから $[\gamma_5,\ \gamma_\mu\gamma_\nu]=0$. すなわち $[\gamma_5,\ \sigma_{\mu\nu}]=0$ となり，

$$S_L=1-\frac{i}{4}\sigma_{\mu\nu}\varepsilon^{\mu\nu}$$

に対して

$$\gamma^5 S_L=S_L\gamma^5$$

が成り立つ。

5.13* $u=\frac{1}{2}(1+\gamma^5)u+\frac{1}{2}(1-\gamma^5)u\equiv P_{\mathrm{R}}u+P_{\mathrm{L}}u$

と書いてみれば，$i=R, L$ として

$$P_i{}^2=\frac{1}{4}(1\pm\gamma^5)(1\pm\gamma^5)=\frac{1}{4}(1\pm2\gamma^5+(\gamma^5)^2)=\frac{1}{2}(1\pm\gamma^5)=P_i,$$

すなわち

$$P_i{}^2=P_i, \qquad P_{\mathrm{L}}+P_{\mathrm{R}}=\frac{1}{2}(1-\gamma^5)+\frac{1}{2}(1+\gamma^5)=1,$$

すなわち $$P_{\mathrm{L}}+P_{\mathrm{R}}=1.$$

次に

$$P_{\mathrm{R}}P_{\mathrm{L}}=(1+\gamma^5)(1-\gamma^5)/4=(1-(\gamma^5)^2)/4=0$$

すなわち

$$P_{\mathrm{R}}P_{\mathrm{L}}=0.$$

こうして $P_{\mathrm{R}}, P_{\mathrm{L}}$ はそれぞれ右巻き成分，左巻き成分の射影演算子であることがわかる。

5.14 $\{\gamma^5, \gamma^\mu\}=0$ だから $\beta\alpha^i=\gamma^0\alpha^i=\gamma^i$ に注意すれば

$$[\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{p}+\beta m,\ \gamma^5]=[\gamma^5,\ \boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{p}-\beta m]\neq 0$$

となり，γ^5 はハミルトニアンと交換しない。

5.15 $E\gg m$ の極限では，$E\simeq|\boldsymbol{p}|$ であるから

$$\gamma^5\begin{pmatrix}\chi^{(S)}\\ \dfrac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p}}{E+m}\chi^{(S)}\end{pmatrix}\simeq\begin{pmatrix}\boldsymbol{\sigma}\cdot\hat{\boldsymbol{p}}\chi^{(S)}\\ \chi^{(S)}\end{pmatrix}\simeq\boldsymbol{\sigma}\cdot\hat{\boldsymbol{p}}\begin{pmatrix}\chi^{(S)}\\ \dfrac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p}}{E+m}\chi^{(S)}\end{pmatrix}.$$

すなわち，γ^5 はヘリシティー演算子になっている。

6.1 交換関係 (5.9) と Dirac 方程式 $\gamma^\nu p_{i\nu}u_i=mu_i$, $\bar{u}_f\gamma^\nu p_{f\nu}=m\bar{u}_f$ を用いて (6.7) 右辺第 2 項を書き換えると

$$\begin{aligned}\bar{u}_f i\sigma^{\mu\nu}(p_f-p_i)_\nu u_i&=-(1/2)\,\bar{u}_f(\gamma^\mu\gamma^\nu-\gamma^\nu\gamma^\mu)(p_f-p_i)_\nu u_i\\&=\bar{u}_f(p_f-p_i)^\mu u_i-\bar{u}_f\gamma^\nu\gamma^\mu(p_f-p_i)_\nu u_i\\&=-\bar{u}_f(p_i+p_f)^\mu u_i+2m\bar{u}_f\gamma^\mu u_i.\end{aligned}$$

すなわち
$$\bar{u}_f\gamma^\mu u_i=(1/2m)[\bar{u}_f(p_i+p_f)^\mu u_i+i\bar{u}_f\sigma^{\mu\nu}(p_f-p_i)_\nu u_i].$$

6.2* Gordon 分解 (6.7) を用いれば，第 1 項はスピンを持たないスカラー粒子の電磁相互作用と完全に同じであるから，これは電荷 $-e$ による相互作用である。そこで，第 2 項が磁気モーメント $(-e/2m)\boldsymbol{\sigma}$ による相互作用であることを示そう。

$A_\mu(x)$ が時間に依存しないとすれば，$E_i=E_f$ となり，$q^\nu\equiv(p_f-p_i)^\nu$ は空間成分しか持たない。したがって非相対論的な近似をすれば，

$$\begin{aligned}\int\Big[-\frac{e}{2m}\bar{\psi}_f\sigma_{\mu\nu}(p_f-p_i)^\nu\psi_i\Big]A^\mu(x)\,d^3\boldsymbol{x}&\simeq-\frac{ie}{2m}\int\Big[\psi_A{}^\dagger\frac{i(\sigma_j\sigma_k-\sigma_k\sigma_j)}{2}q^kA^j\psi_A\Big]d^3\boldsymbol{x}\\&=\frac{ie}{2m}\int\psi_A{}^\dagger\varepsilon_{jkl}\sigma_lq^jA^k\psi_Ad^3\boldsymbol{x}=\frac{ie}{2m}\int\psi_A{}^\dagger\boldsymbol{\sigma}\cdot(\boldsymbol{q}\times\boldsymbol{A})\psi_Ad^3\boldsymbol{x}\\&=\frac{e}{2m}\int\psi_A{}^\dagger\boldsymbol{\sigma}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{A})\psi_Ad^3\boldsymbol{x}=-\int\psi_A{}^\dagger\Big(-\frac{e}{2m}\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{B}\Big)\psi_Ad^3\boldsymbol{x}.\end{aligned}$$

ここに ψ_A は電子の波動関数 ψ の大きい成分である。すなわち，Gordon 分解の第 2 項からは，磁気モーメント $\boldsymbol{\mu}=-e\boldsymbol{\sigma}/2m$ による相互作用 $-(\boldsymbol{\mu}\cdot\boldsymbol{B})$ が生ずる。

6.3* (1) $\mathrm{Tr}(\not{a}\not{b})=\dfrac{1}{2}\mathrm{Tr}(\not{a}\not{b}+\not{b}\not{a})=\dfrac{1}{2}2g^{\mu\nu}a_\mu b_\nu\mathrm{Tr}(1)=4a\cdot b.$

(2) $\mathrm{Tr}(\not{a}_1\cdots\not{a}_n)=\mathrm{Tr}(\not{a}_1\cdots\not{a}_n\gamma^5\gamma^5).$

$\{\gamma^\mu,\gamma^5\}=0$ を用いて γ^5 を先頭に移すと

$$=(-1)^n\mathrm{Tr}(\gamma^5\not{a}_1\cdots\not{a}_n\gamma^5)=(-1)^n\mathrm{Tr}(\not{a}_1\cdots\not{a}_n).$$

したがって，$n=$奇数のときは $\mathrm{Tr}(\not{a}_1\cdots\not{a}_n)=0$ である。

(3)
$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}(\not{a}\not{b}\not{c}\not{d})&=\mathrm{Tr}[(-\not{b}\not{a}+2a\cdot b)\not{c}\not{d}]\\&=2a\cdot b\mathrm{Tr}(\not{c}\not{d})-\mathrm{Tr}(\not{b}\not{a}\not{c}\not{d})\\&=8(a\cdot b)(c\cdot d)-2a\cdot c\mathrm{Tr}(\not{d}\not{b})+\mathrm{Tr}(\not{b}\not{c}\not{a}\not{d})\\&=8(a\cdot b)(c\cdot d)-8(a\cdot c)(b\cdot d)+8(a\cdot d)(b\cdot c)-\mathrm{Tr}(\not{b}\not{c}\not{d}\not{a}),\end{aligned}$$

すなわち
$$\mathrm{Tr}(\not{a}\not{b}\not{c}\not{d})=4[(a\cdot b)(c\cdot d)-(a\cdot c)(b\cdot d)+(a\cdot d)(b\cdot c).$$

(4)
$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}(\gamma_5\not{a}\not{b})&=\mathrm{Tr}(i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3\gamma^\mu\gamma^\nu)a_\mu b_\nu\\&=[-2ig^{0\mu}\mathrm{Tr}(\gamma^1\gamma^2\gamma^3\gamma^\nu)+2ig^{0\nu}\mathrm{Tr}(\gamma^1\gamma^2\gamma^3\gamma^\nu)-\mathrm{Tr}(i\gamma_5\gamma^1\gamma^2\gamma^3\gamma^\mu\gamma^\nu)]a_\mu b_\nu,\end{aligned}$$

$$\therefore\quad\mathrm{Tr}(\gamma_5\not{a}\not{b})=2i[-g^{0\mu}\mathrm{Tr}(\gamma^1\gamma^2\gamma^3\gamma^\nu)+g^{0\nu}\mathrm{Tr}(\gamma^1\gamma^2\gamma^3\gamma^\mu]a_\mu b_\nu=0$$

すなわち

$$\mathrm{Tr}(\gamma_5\not{a}\not{b})=0.$$

（5） $\mathrm{Tr}(\gamma_5 \not{a}\not{b}\not{c}\not{d})=i\,\mathrm{Tr}(\gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma_\rho\gamma_\sigma)a^\mu b^\nu c^\rho d^\sigma$
だから，μ,ν,ρ,σ のうちどれか 2 つが等しいときは $\mathrm{Tr}(\gamma_5\not{a}\not{b})$ に還元されて 0 になり，$\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}$ に比例することがわかる。μ,ν,ρ,σ に，0, 1, 2, 3 のいろいろな値を指定してみると

$$\mathrm{Tr}(\gamma_5\not{a}\not{b}\not{c}\not{d})=4i\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}a^\mu b^\nu c^\rho d^\sigma$$

が成り立つことがわかる。

次に (6.24) の証明は次の通り：

（1） $\gamma_\mu\gamma^\mu=4\times 1=4$

（2） $\gamma_\mu\not{a}\gamma^\mu=\gamma_\mu(2a_\mu-\gamma^\mu\not{a})=2\not{a}-4\not{a}=-2\not{a}$. すなわち $\gamma_\mu\not{a}\gamma^\mu=-2\not{a}$.

（3） $\gamma_\mu\not{a}\not{b}\gamma^\mu=(2a_\mu-\not{a}\gamma_\mu)(2b^\mu-\gamma_\mu\not{b})=4a\cdot b-2\not{a}\not{b}-2\not{a}\not{b}+4\not{a}\not{b}=4a\cdot b$. すなわち $\gamma_\mu\not{a}\not{b}\gamma^\mu=4a\cdot b$

（4） $\gamma_\mu\not{a}\not{b}\not{c}\gamma^\mu=(2a_\mu-\not{a}\gamma_\mu)\not{b}\not{c}\gamma^\mu=2\not{b}\not{c}\not{a}-4(b\cdot c)\not{a}$
$=2[2(b\cdot c)-\not{c}\not{b}]\not{a}-4(b\cdot c)\not{a}=-2\not{c}\not{b}\not{a}$.

すなわち $\gamma_\mu\not{a}\not{b}\not{c}\gamma^\mu=-2\not{c}\not{b}\not{a}$.

6.4 図 6・8 を参照して，$\bar{\nu}_e$ は右巻きだから e^- は左巻きのはずである。$\mu^+\to e^+\nu_e\bar{\nu}_\mu$ においては，ν_e は左巻きだから e^+ は右巻きである (詳細は第 12 章参照)。

6.5 スピンを持たない電子とミューオンが，スピン 1 の光子の中間状態を通って反応 $e^-e^+\to\mu^-\mu^+$ が起こるから，散乱振幅は $d_{00}{}^1(\theta)$ に比例する。ここで θ は散乱角である。(2.21) により $d_{00}{}^1(\theta)=\cos\theta$ であるから，(4.45) により

$$\cos\theta\simeq\frac{t-u}{s}.$$

すなわち
$$\mathcal{M}(e^-e^+\to\mu^-\mu^+)\simeq\frac{t-u}{s}$$

である。(4.47) の第 2 項は $e^-e^+\to\gamma\to e^-e^+$ に対応するから，この問題と同じ物理的状況を表していることがわかる。

6.6* $e^-(k)+e^-(p)\to e^-(k')+e^-(p')$ と $e^-(k)+e^-(p)\to e^-(p')+e^-(k')$ の行列要素をそれぞれ $\mathcal{M}_F$，$\mathcal{M}_B$ として

$$\overline{|\mathcal{M}|^2}=\overline{|\mathcal{M}_F-\mathcal{M}_B|^2}=\overline{|\mathcal{M}_F|^2}+\overline{|\mathcal{M}_B|^2}-2\overline{\mathcal{M}_F{}^*\mathcal{M}_B}\equiv F+B+I$$

と表せば，第 3 項の干渉項は

$$\begin{aligned}
\frac{1}{e^4}utI&=(-2)\sum_{\text{spin}}[\bar{u}(k')\gamma^\mu u(k)\,u(p')\gamma_\mu u(p)\,\bar{u}(k)\gamma_\nu u(p')\,u(p)\gamma^\nu u(k')]\\
&=(-2)\mathrm{Tr}[\not{k}'\gamma^\mu\not{k}\gamma_\nu\not{p}'\gamma_\mu\not{p}\gamma^\nu]\\
&=(-2)\mathrm{Tr}[(2p_\mu-\not{p}\gamma_\mu)\gamma^\nu(2k_\mu{}'-\gamma^\mu\not{k}')\not{k}\gamma_\nu\not{p}']\\
&=(-2)[4(p\cdot k')\mathrm{Tr}(\gamma^\nu\not{k}\gamma_\nu\not{p}')-2\mathrm{Tr}(\gamma^\nu\not{p}\not{k}'\not{k}\gamma_\nu\not{p}')-2\mathrm{Tr}(\not{p}\not{k}'\gamma^\nu\not{k}\gamma_\nu\not{p}')+\\
&\quad\mathrm{Tr}(\not{p}\gamma_\mu\gamma^\nu\gamma^\mu\not{k}'\not{k}\gamma_\nu\not{p}')]\\
&=(-2)[-8(p\cdot k')\mathrm{Tr}(\not{k}\not{p}')+4\mathrm{Tr}(\not{p}'\not{p}\not{k}'\not{k})+4\mathrm{Tr}(\not{p}\not{k}'\not{k}\not{p}')-8(k\cdot k')\mathrm{Tr}(\not{p}\not{p}')]\\
&=(-32)[-2(p\cdot k')(p'\cdot k)+(p\cdot p')(k\cdot k')-(p'\cdot k')(p\cdot k)+(p'\cdot k)(p\cdot k')+\\
&\quad(p\cdot k')(p'\cdot k)-(p\cdot k)(p'\cdot k')\\
&\quad+(p\cdot p')(k\cdot k')-2(p\cdot p')(k\cdot k')]\\
&=64(p\cdot k)(p'\cdot k').
\end{aligned}$$

$s=(p+k)^2=(p'+k')^2$ だから電子の質量を無視すれば，$(p\cdot k)=(p'\cdot k')=s/2$ となり

$$I=8e^4\frac{2s^2}{ut}.$$

$\overline{|\mathcal{M}_F|^2}$，$\overline{|\mathcal{M}_B|^2}$ も計算すると，

$$|\mathcal{M}_F|^2=\frac{8e^4(s^2+u^2)}{t^2}, \qquad |\mathcal{M}_B|^2=\frac{8e^4(s^2+t^2)}{u^2}$$

となるから，

$$|\mathcal{M}_F+\mathcal{M}_B|^2 \propto \frac{s^2+u^2}{t^2}+\frac{2s^2}{ut}+\frac{s^2+t^2}{u^2}$$

で，表 6-1 の結果が得られる。

6.7 $\delta(p'^2-M^2)=\delta(p_0'^2-\boldsymbol{p}'^2-M^2)=\frac{1}{2\sqrt{\boldsymbol{p}'^2+M^2}}[\delta(p_0'-\sqrt{\boldsymbol{p}'^2+M^2})$

$$+\delta(p_0'+\sqrt{\boldsymbol{p}'^2+M^2})],$$

$$\int dp_0' 2p_0' \theta(p_0')\delta(p'^2-M^2)=1$$

を用いれば

$$\begin{aligned}\int\frac{d^3p'}{2p_0'}\delta^{(4)}(p+q-p') &= \int\frac{d^3p'}{2p_0'}dp_0'\theta(p_0')2p_0'\delta(p'^2-M^2)\delta^{(4)}(p+q-p')\\ &= \int d^3p'\,dp_0'\delta^{(4)}(p+q-p')\theta(p_0')\delta(p'^2-M^2)\\ &= \delta((p+q)^2-M^2)\\ &= \delta(p^2-M^2+2pq+q^2).\end{aligned}$$

$p^2=M^2$，$2pq=2M\nu=2M(E-E')$，$q^2=-4EE'\sin^2(\theta/2)$ などを用いて

$$\begin{aligned}&=\frac{1}{2M}\delta\left(\nu+\frac{q^2}{2M}\right)\\ &=\frac{1}{2M}\delta\left(E-E'-\frac{2EE'\sin^2(\theta/2)}{M}\right)\\ &=\frac{1}{2M}\delta\left(E'\left(1+\frac{2E\sin^2(\theta/2)}{M}\right)-E\right)\\ &=\frac{1}{2M\left(1+\frac{2E\sin^2(\theta/2)}{M}\right)}\delta\left(E'-\frac{E}{1+(2E/M)\sin^2(\theta/2)}\right).\end{aligned}$$

すなわち，$A=1+(2E/M)\sin^2(\theta/2)$ とおけば

$$\int\frac{d^3p'}{2p_0'}\delta^{(4)}(p+q-p')=\frac{1}{2MA}\delta\left(E'-\frac{E}{A}\right).$$

6.8* (6.18) の $L_{\mu\nu}{}^{\text{muon}}$ を $(p+p')_\mu(p+p')_\nu$ で置き換えて

$$\begin{aligned}\overline{|\mathcal{M}|^2} &= \frac{e^4}{q^4}\frac{1}{2}\sum_{\text{spin}}[\bar{u}(k')\gamma^\mu u(k)][\bar{u}(k')\gamma^\nu u(k)]^\dagger(p+p')_\mu(p+p')_\nu\\ &= \frac{e^4}{2q^4}\mathrm{Tr}(\not{k}'\gamma^\mu\not{k}\gamma^\nu)(p+p')_\mu(p+p')_\nu.\end{aligned}$$

ここで電子の質量は無視した。標的の質量を M として，$p+k=p'+k'$ を用い $\overline{|\mathcal{M}|^2}$ を計算すればば

$$\begin{aligned}\overline{|\mathcal{M}|^2} &= \frac{4e^4}{q^4}\left[4(k\cdot p)(k'\cdot p)+2\{(k\cdot p)-(k'\cdot p)\}(k\cdot k')-(k\cdot k')^2-\frac{(k\cdot k')}{2}\{4M^2-q^2\}\right]\\ &= \frac{4e^4}{q^4}\left[4EE'M^2+2M(E-E')\left(-\frac{q^2}{2}\right)-\frac{q^4}{4}+\frac{q^2}{4}(4M^2-q^2)\right]\end{aligned}$$

$$=\frac{4e^4}{q^4}\left[4EE'M^2-q^2\left(\frac{-q^2}{2}\right)-\frac{q^4}{2}+M^2q^2\right]=\frac{4e^4}{q^4}\left[4EE'M^2-4EE'M^2\sin^2\frac{\theta}{2}\right]$$
$$=\frac{4e^4}{q^4}(4M^2EE')\left[1-\sin^2\frac{\theta}{2}\right]$$
$$=\frac{4e^4}{q^4}(4M^2EE')\cos^2\frac{\theta}{2}.$$

(6.46) を用いて断面積を計算すれば

$$\left.\frac{d\sigma}{d\Omega}\right|_{\text{lab}}=\left(\frac{\alpha^2}{4E^2\sin^4(\theta/2)}\right)\frac{E'}{E}\cos^2\frac{\theta}{2}.$$

6.9* (6.55) を (6.53) に代入する。$\nabla\cdot\boldsymbol{B}=0$ と $\nabla\times\boldsymbol{E}+(\partial\boldsymbol{B}/\partial t)=0$ は自動的に満足することはすぐわかる。第1式と第4式は次のようになる。

$$-\frac{\partial}{\partial t}(\nabla\cdot\boldsymbol{A})-\nabla^2\phi=\rho \quad \text{すなわち} \quad \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\nabla^2\right)\phi-\frac{\partial}{\partial t}\left(\nabla\cdot\boldsymbol{A}+\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)=\rho \qquad (1)$$

$$\nabla\times(\nabla\times\boldsymbol{A})+\frac{\partial^2\boldsymbol{A}}{\partial t^2}+\nabla\left(\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)=\boldsymbol{j}$$

すなわち
$$\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{A})-\nabla^2\boldsymbol{A}+\frac{\partial^2\boldsymbol{A}}{\partial t^2}+\nabla\left(\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)=\boldsymbol{j},$$
$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\nabla^2\right)\boldsymbol{A}+\nabla\left(\nabla\cdot\boldsymbol{A}+\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)=\boldsymbol{j}. \qquad (2)$$

$A^\mu=(\phi,\boldsymbol{A})$, $j^\mu=(\rho,j)$ をそれぞれベクトルポテンシャル，電流の4元ベクトルとすれば，(1) と (2) は

$$\Box^2A^\mu-\partial^\mu(\partial_\nu A^\nu)=j^\mu \qquad (3)$$

を満足している。

$$F^{\mu\nu}=\partial^\mu A^\nu-\partial^\nu A^\mu. \qquad (4)$$

両辺の ∂_μ をとれば

$$\partial_\mu F^{\mu\nu}=\partial_\mu\partial^\mu A^\nu-\partial_\mu\partial^\nu A^\mu=\Box^2A^\nu-\partial^\nu(\partial_\mu A^\mu)=j^\nu.$$

すなわち Maxwell 方程式は簡単に

$$\partial_\mu F^{\mu\nu}=j^\nu \qquad (5)$$

と書くことができる。次に (5) の両辺の ∂_ν をとれば

$$\partial_\nu\partial_\mu F^{\mu\nu}=\partial_\nu j^\nu.$$

しかるに $F^{\mu\nu}=-F^{\nu\mu}$ であるから，$\partial_\nu\partial_\mu F^{\mu\nu}=0$. すなわち

$$\partial_\nu j^\nu=0. \qquad (6)$$

6.10* $A_\mu\to A_\mu'=A_\mu+\partial_\mu\chi$ を空間成分と時間成分に分けて書けば，$\boldsymbol{A}'=\boldsymbol{A}+\nabla\chi$, $\phi'=\phi-\partial\chi/\partial t$ であるから

$$\boldsymbol{E}=-\frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial t}-\nabla\phi=-\frac{\partial}{\partial t}(\boldsymbol{A}'-\nabla\chi)-\nabla\left(\phi'+\frac{\partial}{\partial t}\chi\right)$$
$$=-\frac{\partial\boldsymbol{A}'}{\partial t}-\nabla\phi'+\frac{\partial}{\partial t}(\nabla\chi)-\nabla\left(\frac{\partial}{\partial t}\chi\right)=-\frac{\partial\boldsymbol{A}'}{\partial t}-\nabla\phi',$$
$$\boldsymbol{B}=\nabla\times\boldsymbol{A}=\nabla\times(\boldsymbol{A}'-\nabla\chi)=\nabla\times\boldsymbol{A}'-(\nabla\times\nabla\chi)=\nabla\times\boldsymbol{A}'.$$

すなわち，$\boldsymbol{E}$ と $\boldsymbol{B}$ は (6.58) のゲージ変換に対して不変である。(6.54) の左辺は (6.58) のゲージ変換により次のように変換される：

$$\Box^2A_\mu-\partial^\mu(\partial_\nu A^\nu)=\Box^2A_\mu'-\Box(\partial_\mu\chi)-\partial^\mu(\partial_\nu A'^\nu-\Box\chi)$$
$$=\Box^2A_\mu'-\partial^\mu(\partial_\nu A'^\nu).$$

Lorentz ゲージ $\partial_\nu A'^\nu=0$ をとれば第2項は0だから

$$\Box^2 A'_\mu = j_\mu$$

となり，(6.59) を得る。

6.11* 光子の進行方向 (3 軸) のまわりに θ の回転をすれば，各軸方向の単位ベクトル $\boldsymbol{\varepsilon}_i$ $(i=1,2,3)$ は

$$\boldsymbol{\varepsilon}_1' = \boldsymbol{\varepsilon}_1 \cos\theta + \boldsymbol{\varepsilon}_2 \sin\theta, \qquad \boldsymbol{\varepsilon}_2' = -\boldsymbol{\varepsilon}_1 \sin\theta + \boldsymbol{\varepsilon}_2 \cos\theta, \qquad \boldsymbol{\varepsilon}_3' = \boldsymbol{\varepsilon}_3$$

のように変換するから，$\boldsymbol{\varepsilon}_\mathrm{R}, \boldsymbol{\varepsilon}_\mathrm{L}$ は次のように変換する：

$$\boldsymbol{\varepsilon}_\mathrm{R}' = -(1/\sqrt{2})(\boldsymbol{\varepsilon}_1 \cos\theta + \boldsymbol{\varepsilon}_2 \sin\theta - i\boldsymbol{\varepsilon}_1 \sin\theta + i\boldsymbol{\varepsilon}_2 \cos\theta) = \boldsymbol{\varepsilon}_\mathrm{R} e^{-i\theta},$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_\mathrm{L}' = (1/\sqrt{2})(\boldsymbol{\varepsilon}_1 \cos\theta + \boldsymbol{\varepsilon}_2 \sin\theta + i\boldsymbol{\varepsilon}_1 \sin\theta - i\boldsymbol{\varepsilon} \cos\theta) = \boldsymbol{\varepsilon}_\mathrm{L} e^{i\theta}.$$

(2.12) を思い出せば，$\boldsymbol{\varepsilon}_\mathrm{R}, \boldsymbol{\varepsilon}_\mathrm{L}$ はそれぞれ光子のヘリシティーが 1 および -1 の状態を表す偏極ベクトルであることがわかる。

6.12* $\boldsymbol{\varepsilon}_\mathrm{R}, \boldsymbol{\varepsilon}_\mathrm{L}, \hat{\boldsymbol{q}}$ は正規直交系を作っている。したがって closure 関係が成り立ち，i, j をベクトルの成分とすれば

$$(\boldsymbol{\varepsilon}_\mathrm{R})_i^*(\boldsymbol{\varepsilon}_\mathrm{R})_j + (\boldsymbol{\varepsilon}_\mathrm{L})_i^*(\boldsymbol{\varepsilon}_\mathrm{L})_j + \hat{q}_i \hat{q}_j = \delta_{ij},$$

すなわち

$$\sum_{\lambda=\mathrm{R,L}} (\boldsymbol{\varepsilon}_\lambda)_i^*(\boldsymbol{\varepsilon}_\lambda)_j = \delta_{ij} - \hat{q}_i \hat{q}_j.$$

6.13 逆演算子を運動量空間で表せば，もっとも一般的な形は，A, B を q^2 の関数として

$$Aq^2 q_{\mu\nu} + Bq_\mu q_\nu$$

と書くことができる。したがって

$$(Aq^2 g_{\mu\nu} + Bq_\mu q_\nu)(-g^{\nu\lambda} q^2 + q^\nu q^\lambda) = Aq^2(-\delta_\mu{}^\lambda q^2 + q_\mu q^\lambda)$$

が $\delta_\mu{}^\lambda$ に等しければ逆演算子が存在するわけであるが，右辺は任意関数 A, B をどのように選んでも $\delta_\mu{}^\lambda$ に等しくすることはできない。すなわち (6.78) の逆演算子は存在しない。

6.14* 求める逆演算子を $Ag_{\mu\nu} + Bq_\mu q_\nu$ と書けば

$$[-q^2 g^{\lambda\mu} + (1-(1/\xi))q^\lambda q^\mu][Ag_{\mu\nu} + Bq_\mu q_\nu] = \delta_\nu{}^\lambda$$

である。左辺を展開すれば

$$A\ \text{の係数} = -q^2 \delta_\nu{}^\lambda + (1-(1/\xi))q^\lambda q_\nu,$$

$$B\ \text{の係数} = -q^2 q^\lambda q_\nu + (1-(1/\xi))q^2 q^\lambda q_\nu$$

であるから，右辺と比較して

$$-q^2 A = 1, \qquad \left(1-\frac{1}{\xi}\right)A + \left[-q^2 + \left(1-\frac{1}{\xi}\right)q^2\right]B = 0$$

$$\therefore \quad A = -\frac{1}{q^2}, \qquad B = (1-\xi)\frac{1}{q^2}\frac{1}{q^2}$$

すなわち

$$Ag_{\mu\nu} + Bq_\mu q_\nu = \frac{1}{q^2}\left(-g_{\mu\nu} + (1-\xi)\frac{q_\mu q_\nu}{q^2}\right).$$

6.15* $\boldsymbol{\varepsilon}^{(\lambda=0)}$ を $\boldsymbol{p}$ 方向にとれば，問題 6.11 により，z 軸のまわりの回転で $\boldsymbol{\varepsilon}^{(\lambda=0)}$ は変わらないから，たしかにヘリシティー $\lambda=0$ の状態に対応している。

3 つの独立な偏り $\lambda=\pm1,0$ の状態を記述する 3 つの 4 元偏極ベクトルを求めるには，まず，粒子の静止系で

$$\varepsilon_0{}^{(\lambda)} = 0 \qquad (\lambda = \pm1, 0)$$

として，4 元偏極ベクトルを

$$\varepsilon_\mu{}^{(\lambda)} = (\varepsilon_0{}^{(\lambda)},\ \boldsymbol{\varepsilon}^{(\lambda)})$$

と定義する。(6.91) により $p^\mu \varepsilon_\mu{}^{(\lambda)} = 0$ であるから，$\boldsymbol{p}$ を z 方向にとって $p = (E, 0, 0, |\boldsymbol{p}|)$ とすれば，(6.69) を思い出して

$$\varepsilon^{(\lambda=\pm1)}=\mp(0,\ 1,\ \pm i,\ 0)/\sqrt{2},$$
$$\varepsilon^{(\lambda=0)}=(|\boldsymbol{p}|,\ 0,\ 0,\ E)/M$$

が得られる。

6.16 $\sum_\lambda \varepsilon_\mu^{(\lambda)*}(p)\varepsilon_\nu^{(\lambda)}(p)=Ag_{\mu\nu}+Bp_\mu p_\nu$ と一般的に表すことができる。ここで A と B は未定係数である。両辺に p^μ を乗じて μ で加えれば (6.91) により

$$0=Ap_\nu+Bp^2p_\nu=(A+BM^2)p_\nu \qquad \therefore \quad A+BM^2=0. \tag{1}$$

次に $g^{\mu\nu}$ を乗じて μ で加えれば

$$\sum_\lambda \varepsilon_\mu^{(\lambda)*}(p)\varepsilon_\nu^{(\lambda)}(p)=Ag^{\mu\nu}g_{\mu\nu}+Bg^{\mu\nu}p_\mu p_\nu.$$

左辺は計算すると -3 になるから

$$-3=4A+BM^2. \tag{2}$$

(1) と (2) から $A=-1$, $B=1/M^2$ が得られるので

$$\sum_\lambda \varepsilon_\mu^{(\lambda)*}(p)\varepsilon_\nu^{(\lambda)}(p)=-g_{\mu\nu}+\frac{p_\mu p_\nu}{M^2}$$

が証明できた。

6.17* カレント $j_0{}^A$, $j_0{}^B$ の相互作用を，時空点 $x_1=(\boldsymbol{x}_1, t_1)$, $x_2=(\boldsymbol{x}_2, t_2)$ の間で 4 元運動量 q の仮想光子の交換によると解釈して，相互作用前後の 2 粒子の 4 元運動量をそれぞれ p_A, p_B および p_C, p_D とすれば，(6.8) により

$$T_{fi}=-i(2\pi)^4\delta^4(p_A+p_B-p_C-p_D)j_0{}^A(q)\frac{1}{|\boldsymbol{q}|^2}j_0{}^B(q)$$
$$=-i(2\pi)^4\int d^4q\,\delta^4(p_A-p_C-q)\delta^4(q+p_B-p_D)j_0{}^A(q)\frac{1}{|\boldsymbol{q}|^2}j_0{}^B(q)$$
$$=\frac{-i}{(2\pi)^4}\int d^4x_1\int d^4x_2\int d^4q\ e^{ix_1\cdot(p_A-p_C)}e^{ix_2\cdot(p_B-p_D)}e^{-iq\cdot(x_1-x_2)}$$
$$\times j_0{}^A(q)\frac{1}{|\boldsymbol{q}|^2}j_0{}^B(q),$$

$$j_0{}^A(\boldsymbol{x}_1, t_1)=\int e^{ix_1\cdot(p_A-p_C)}j_0{}^A(q),$$
$$j_0{}^B(\boldsymbol{x}_2, t_2)=\int \mathrm{e}^{ix_2\cdot(p_B-p_D)}j_0{}^B(q)$$

はそれぞれカレントの座標表示であるから

$$T_{fi}=-\frac{i}{(2\pi)^4}\int d^3\boldsymbol{x}_1dt_1j_0{}^A(t_1, \boldsymbol{x}_1)\int d^3\boldsymbol{x}_2dt_2j_0{}^B(t_2, \boldsymbol{x}_2)\int d^3\boldsymbol{q}\,d\omega\frac{e^{i\boldsymbol{q}\cdot(\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{x}_2)-i\omega(t_1-t_2)}}{|\boldsymbol{q}|^2}$$

と書くことができる。ここで $q=(\omega, \boldsymbol{q})$ とした。ω で積分すれば $2\pi\delta(t_1-t_2)$ が出るから，t_1 または t_2 で積分して $t_1=t_2\equiv t$ とすれば

$$T_{fi}=-\frac{i}{(2\pi)^3}\int dt\int d^3\boldsymbol{x}_1\int d^3\boldsymbol{x}_2j_0{}^A(t, \boldsymbol{x}_1)\cdot j_0{}^B(t, \boldsymbol{x}_2)\int\frac{e^{i\boldsymbol{q}\cdot(\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{x}_2)}}{|\boldsymbol{q}|^2}d^3\boldsymbol{q},$$

ところが

$$\frac{1}{(2\pi)^3}\int\frac{e^{i\boldsymbol{q}\cdot(\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{x}_2)}}{|\boldsymbol{q}|^2}d^3\boldsymbol{q}=\frac{1}{4\pi|\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{x}_2|}$$

であるから

$$T_{fi}=\frac{-i}{4\pi}\int dt\int d^3\boldsymbol{x}_1\int d^3\boldsymbol{x}_2\frac{j_0{}^A(t, \boldsymbol{x}_1)j_0{}^B(t, \boldsymbol{x}_2)}{|\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{x}_2|}$$

を得る。

6.18 $\mathcal{M}_1 \equiv \varepsilon_\nu'^* \varepsilon_\mu T_1{}^{\nu\mu}$, $\mathcal{M}_2 = \varepsilon_\mu \varepsilon_\nu'^* T_2{}^{\mu\nu}$ とおけば

$$k_\mu T_1{}^{\nu\mu} = e^2 \bar{u}^{(s')}(p')\gamma^\nu \frac{\not{p}+\not{k}+m}{(p+k)^2-m^2}\not{k}u^{(s)}(p)$$
$$= e^2 \bar{u}^{(s')}(p')\gamma^\nu \left[\frac{2(p\cdot k)-\not{k}(\not{p}-m)}{2(p\cdot k)}\right]u^{(s)}(p)$$
$$= e^2 \bar{u}^{(s')}(p')\gamma^\nu u^{(s)}(p) \neq 0,$$

同様にして

$$k_\nu' T_2{}^{\mu\nu} = e^2 \bar{u}^{(s')}(p')\gamma^\mu \frac{\not{p}-\not{k}'+m}{(p-k')^2-m^2}\not{k}' u^{(s)}(p)$$
$$= e^2 \bar{u}^{(s')}(p')\gamma^\mu \left[\frac{2(p\cdot k')-\not{k}'(\not{p}-m)}{-2(p\cdot k')}\right]u^{(s)}(p)$$
$$= -e^2 \bar{u}^{(s')}(p')\gamma^\mu u^{(s)}(p) \neq 0$$

である。したがって，$\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2$ それぞれはゲージ不変ではない。$\mathcal{M}_2$ は $k \leftrightarrow k', \mu \leftrightarrow \nu$ と入れ換えても変らないから

$$k_\mu(T_1{}^{\nu\mu} + T_2{}^{\nu\mu}) = 0$$

を得る。すなわち $\mathcal{M} = \mathcal{M}_1 + \mathcal{M}_2$ はゲージ不変である。

6.19*
$$\overline{|\mathcal{M}_1|^2} = \frac{e_4}{s^2}\mathrm{Tr}(\not{p}'\not{k}\not{p}\not{k}) = \frac{4e^4}{s^2}[2(p\cdot k)(p'\cdot k) - k^2(p\cdot p')],$$
$$\overline{|\mathcal{M}_2|^2} = \frac{e^4}{u^2}\mathrm{Tr}(\not{p}'\not{k}'\not{p}\,\not{k}')\frac{4e^4}{u^2}[2(p'\cdot k')(p\cdot k') - k'^2(p\cdot p').$$

$k^2 = -Q^2$, $k'^2 = 0$, $s = 2(p\cdot k) - Q^2 = 2(p'\cdot k')$, $(p'\cdot k) = -(Q^2+u)/2$, $(p\cdot k') = -u/2$, $(p\cdot p') = -t/2$ などを代入して

$$\overline{|\mathcal{M}_1|^2} = \frac{4e^4}{s^2}\left[-\frac{1}{2}(s+Q^2)(u+Q^2) - \frac{t}{2}Q^2\right]$$
$$= 2e^4\left[-\frac{u}{s} - \frac{Q^2(s+u+t+Q^2)}{s^2}\right].$$

$s+t+u = -Q^2$ であるから

$$\overline{|\mathcal{M}_1|^2} = 2e^4(-u/s).$$

$k'^2 = 0$ だから $\overline{|\mathcal{M}_2|^2}$ も前と変わらず，$\overline{|\mathcal{M}_1|^2}$, $\overline{|\mathcal{M}_2|^2}$ ともに $k^2 = 0$ の場合と同じである。次に干渉項は

$$\mathcal{M}_1\mathcal{M}_2{}^\dagger = \frac{e^4}{4su}\sum_{s,s'}[\bar{u}^{(s')}(p')\gamma^\nu(\not{p}+\not{k})\gamma^\mu u^{(s)}(p)][\bar{u}^{(s)}(p)\gamma_\nu(\not{p}-\not{k}')\gamma_\mu u^{(s')}(p')]$$
$$= \frac{e^4}{4su}\mathrm{Tr}[\not{p}'\gamma^\nu(\not{p}+\not{k})\gamma^\mu\not{p}'\gamma_\nu(\not{p}-\not{k}')\gamma_\mu]$$

(6.24) を用いて

$$= -\frac{2e^4}{su}(p+k)\cdot(p-k')\mathrm{Tr}(\not{p}\cdot\not{p}').$$

$(p\cdot p') = -t/2$, $(k\cdot k') = -(t+Q^2)/2$ などに注意すれば

$$\mathcal{M}_1\mathcal{M}_2{}^\dagger = \frac{2e^4}{su}t[s+t+u+2Q^2]$$
$$= \frac{2e^4}{su}t[-Q^2+2Q^2] = \frac{2e^4}{su}tQ^2.$$

$\mathcal{M}_1{}^\dagger\mathcal{M}_2$ の寄与も同じだから

$$\overline{|\mathcal{M}|^2} = 2e^4\left[-\frac{u}{s} - \frac{s}{u} + \frac{2tQ^2}{su}\right].$$

6.20* $\mathcal{M}_1=\varepsilon_\nu'^*(k')\varepsilon_\mu(k)e^2\bar{u}(p')\gamma^\nu(\not p+\not k+m)\gamma^\mu u(p)/[2(p\cdot k)]$,

$\mathcal{M}_2=\varepsilon_\nu'^*(k')\varepsilon_\mu(k)e^2\bar{u}(p')\gamma^\mu(\not p-\not k'+m)\gamma^\nu u(p)/[-2(p\cdot k')]$

だから，

$$\overline{|\mathcal{M}_1|^2}=2e^4[(p\cdot k)(p'\cdot k)-m^2(p\cdot p')-m^2(p'\cdot k)]/(p\cdot k)^2,$$
$$\overline{|m_2|^2}=2e^4[(p\cdot k')(p'\cdot k')-m^2(p\cdot p')+m^2(p'\cdot k')]/(p\cdot k')^2,$$
$$2\overline{\mathcal{M}_1\mathcal{M}_2^\dagger}=-2e^4m^2(p\cdot p')/(p\cdot k)(p\cdot k')$$

となる。$2(p\cdot k)=2(p'\cdot k')=s-m^2$, $2(p\cdot k')=2(p\cdot k')=-u+m^2$, $2(p\cdot p')=-t+2m^2$ に注意して，s が十分大きいときの振舞いをみれば，$\overline{|\mathcal{M}_2|^2}$ の第1項が主に効いて

$$\overline{|\mathcal{M}|^2}\equiv\overline{|\mathcal{M}_1|^2}+\overline{|\mathcal{M}_2|^2}-2\overline{\mathcal{M}_1\mathcal{M}_2^\dagger}\simeq 2e^4\left(\frac{-s}{u-m^2}\right)$$

である。$u=-(s/2-2m^2)(1+\cos\theta)$ を用いれば，$\alpha\equiv e^2/4\pi$ として

$$\overline{|\mathcal{M}|^2}\simeq 2e^4\left(\frac{2s}{s-4m^2}\right)\frac{1}{\cos\theta+\dfrac{s-2m^2}{s-4m^2}}=64\pi^2\alpha^2\left(1-\frac{4m^2}{s}\right)^{-1}\frac{1}{\cos\theta+\left(\dfrac{1-2m^2/s}{1-4m^2/s}\right)}$$

となるから

$$\sigma=\frac{1}{64\pi^2 s}\int\overline{|\mathcal{M}|^2}d\Omega=\frac{2\pi\alpha^2}{s}\left(1-\frac{4m^2}{s}\right)^{-1}\int_{-1}^{1}d(\cos\theta)\frac{1}{\cos\theta+\left(\dfrac{1-2m^2/s}{1-4m^2/s}\right)}$$
$$=\frac{2\pi\alpha^2}{s}\left(1-\frac{4m^2}{s}\right)^{-1}\log\left(\frac{2s}{m^2}-3\right).$$

s は十分大きく，$s/m^2\gg 1$ だから，全断面積の漸近的な値は

$$\sigma\simeq\frac{2\pi\alpha^2}{s}\log\left(\frac{s}{m^2}\right)$$

である。

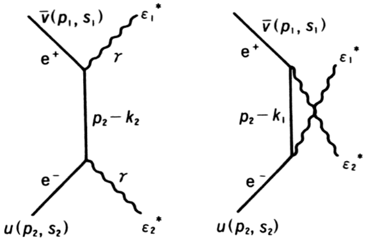
6.21* 6.6節の議論により，高エネルギー電磁相互作用においては電子のヘリシティーが保存する。したがって，高エネルギー Compton 散乱で図6·12の最初の図に寄与する振幅は $\mathcal{M}$(上向きスピン→上向きスピン) と$\mathcal{M}$(下向きスピン → 下向きスピン) である。すなわち

$$\overline{|\mathcal{M}_1|^2}\propto|d_{++}{}^{1/2}(\theta)|^2+|d_{--}{}^{1/2}(\theta)|^2$$
$$=\cos^2\frac{\theta}{2}+\cos^2\frac{\theta}{2}$$
$$=1+\cos\theta.$$

ここで $u\simeq-s(1+\cos\theta)/2$ を使えば

$$\overline{|\mathcal{M}_1|^2}\propto-\frac{2u}{s}.$$

6.22* 対消滅 $e^+(p_1,s_1)+e^-(p_2,s_2)\to\gamma(k_1,\varepsilon_1)+\gamma(k_2,\varepsilon_2)$ の最低次の Feynman 図は次の通りである。p,k は運動量，s,ε はそれぞれスピンおよび偏極を表す。



Feynman 則を用いて振幅を書けば右図に対応して

$$-i\mathcal{M}=(ie)^2\bar{v}^{(s_1)}(p_1)\left[\not\varepsilon_1{}^*\frac{i}{\not p_2-\not k_2-m}\not\varepsilon_2{}^*+\not\varepsilon_2{}^*\frac{i}{\not p_2-\not k_1-m}\not\varepsilon_1{}^*\right]u^{(s_2)}(p_2)$$

となる。$p_1{}^2=p_2{}^2=m^2$, $k_1{}^2=k_2{}^2=0$ を用いれば

$$\mathcal{M}=e^2\bar{v}^{(s_1)}(p_1)\left[\not\varepsilon_1{}^*\frac{\not p_2-\not k_2+m}{-2(p_2\cdot k_2)}\not\varepsilon_2{}^*+\not\varepsilon_2{}^*\frac{\not p_2-\not k_1+m}{-2(p_2\cdot k_1)}\not\varepsilon_1{}^*\right]u^{(s_2)}(p_2)$$

である。$(\not p_2-m)u^{(s_2)}(p_2)=0$ を用い，$(p_2\cdot\varepsilon_2{}^*)=(p_2\cdot\varepsilon_1{}^*)=0$ のゲージを選べば，

$$\not p_2\not\varepsilon_2{}^*u^{(s_2)}(p_2)=[2(p_2\cdot\varepsilon_2{}^*)-\not\varepsilon_2{}^*\not p_2]u^{(s_2)}(p_2)=-m\not\varepsilon_2{}^*u^{(s_2)}(p_2),$$
$$\not p_2\not\varepsilon_1{}^*u^{(s_2)}(p_2)=[2(p_2\cdot\varepsilon_1{}^*)-\not\varepsilon_1{}^*\not p_2]u^{(s_2)}(p_2)=-m\not\varepsilon_1{}^*u^{(s_2)}(p_2)$$

が成り立つから

$$\mathcal{M}=e^2\bar{v}^{(s_1)}(p_1)\left[\frac{\not\varepsilon_1{}^*\not k_2\not\varepsilon_2{}^*}{2(p_2\cdot k_2)}+\frac{\not\varepsilon_2{}^*\not k_1\not\varepsilon_1{}^*}{2(p_2\cdot k_1)}\right]u^{(s_2)}(p_2)$$

を得る。したがって

$$\overline{|\mathcal{M}|^2}=\frac{e^4}{4}\mathrm{Tr}(\not p_1-m)\left[\frac{\not\varepsilon_1{}^*\not k_2\not\varepsilon_2{}^*}{2(p_2\cdot k_2)}+\frac{\not\varepsilon_2{}^*\not k_1\not\varepsilon_1{}^*}{2(p_2\cdot k_1)}\right](\not p_2+m)\left[\frac{\not\varepsilon_2{}^*\not k_2\not\varepsilon_1{}^*}{2(p_2\cdot k_2)}+\frac{\not\varepsilon_1{}^*\not k_1\not\varepsilon_2{}^*}{2(p_2\cdot k_1)}\right],$$

$$\frac{1}{4(p_2\cdot k_2)^2}\mathrm{Tr}(\not p_1-m)\not\varepsilon_1{}^*\not k_2\not\varepsilon_2{}^*(\not p_2+m)(\not\varepsilon_2{}^*\not k_2\not\varepsilon_1{}^*)=2\frac{[2(k_2\cdot\varepsilon_1{}^*)^2+(p_1\cdot k_2)]}{(p_2\cdot k_2)},$$

$$\frac{1}{4(p_2\cdot k_1)^2}\mathrm{Tr}(\not p_1-m)\not\varepsilon_2{}^*\not k_1\not\varepsilon_1{}^*(\not p_2+m)\not\varepsilon_1{}^*\not k_1\not\varepsilon_2{}^*=2\frac{[2(k_1\cdot\varepsilon_2{}^*)^2+(p_1\cdot k_1)]}{(p_2\cdot k_1)},$$

$$\frac{1}{4(p_2\cdot k_2)(p_2\cdot k_1)}\mathrm{Tr}[(\not p_1-m)\not\varepsilon_1{}^*\not k_2\not\varepsilon_2{}^*(\not p_2+m)\not\varepsilon_1{}^*\not k_1\not\varepsilon_2{}^*+(\not p_1-m)\not\varepsilon_2{}^*\not k_1\not\varepsilon_1{}^*(\not p_2+m)\not\varepsilon_2{}^*\not k_2\not\varepsilon_1{}^*]$$
$$=-4\left[\frac{(k_2\cdot\varepsilon_1{}^*)^2}{(p_2\cdot k_2)}+\frac{(k_1\cdot\varepsilon_2{}^*)^2}{(p_2\cdot k_1)}+2(\varepsilon_1{}^*\cdot\varepsilon_2{}^*)^2-1\right]$$

であるから

$$\overline{|\mathcal{M}|^2}=\frac{e^4}{2}\left[\frac{(p_1\cdot k_1)}{(p_2\cdot k_1)}+\frac{(p_1\cdot k_2)}{(p_2\cdot k_2)}-4(\varepsilon_1{}^*\cdot\varepsilon_2{}^*)^2+2\right].$$

$t=(p_1-k_1)^2=(k_2-p_2)^2$，$u=(p_1-k_2)^2=(k_1-p_2)^2$ として，電子の質量を無視すれば

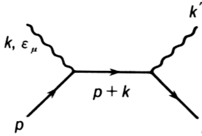
$$\overline{|\mathcal{M}|^2}=\frac{e^4}{2}\left[\left(\frac{t}{u}+\frac{u}{t}\right)-4(\varepsilon_1{}^*\cdot\varepsilon_2{}^*)^2+2\right]$$

となる。光子の偏極につき加えると

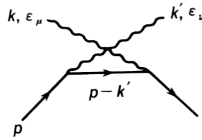
$$\overline{|\mathcal{M}|^2}=\frac{e^4}{2}\left(\frac{t}{u}+\frac{u}{t}\right)$$

を得る。

6.23*



$$\equiv\mathcal{M}_{\gamma e^-}{}^{(s)}=e^2\varepsilon'\cdot(2p'+k')\frac{1}{(p+k)^2-m^2}\varepsilon\cdot(2p+k),$$



$$\equiv\mathcal{M}_{\gamma e^-}{}^{(u)}=e^2\varepsilon'\cdot(2p-k')\frac{1}{(p-k')^2-m^2}\varepsilon\cdot(2p'-k).$$

以下 $s=(p+k)^2$，$u=(p-k')^2$ とおく。Lorentz ゲージをとれば，$k\cdot\varepsilon=k'\cdot\varepsilon'=0$ であるから，

$$\mathcal{M}_{\gamma e^-}{}^{(s)}=4e^2\frac{(p'\cdot\varepsilon')(p\cdot\varepsilon)}{s-m^2}=4e^2\varepsilon_\mu\varepsilon_\nu'^*\left[\frac{p^\mu p'^\nu}{s-m^2}\right],$$
$$\mathcal{M}_{\gamma e^-}{}^{(u)}=4e^2\frac{(p\cdot\varepsilon')(p'\cdot\varepsilon)}{u-m^2}=4e^2\varepsilon_\mu\varepsilon_\nu'^*\left[\frac{p'^\mu p^\nu}{u-m^2}\right]$$

となる。

$$\mathcal{M}_{\gamma e^-}{}^{(s+u)} \equiv \mathcal{M}_{\gamma e^-}{}^{(s)} + m_{\gamma e^-}{}^{(u)} \equiv \varepsilon_\mu \varepsilon_\nu{}^* T^{\mu\nu}$$

とすれば，$2p\cdot k = 2p'\cdot k' = s - m^2$，$-2p'\cdot k = -2p\cdot k' = u - m^2$ を用いて

$$k_\mu \varepsilon_\nu{}'^* T^{\mu\nu} = 2e^2 \varepsilon_\nu{}'^* (p'-p)^\nu = 2e^2(\varepsilon'^*\cdot k) \neq 0.$$

$\varepsilon_\nu{}'^* \to k'$ と置き換えると

$$k_\mu k_\nu{}' T^{\mu\nu} = 2e^2(k\cdot k') \neq 0$$

が得られ，

$$\mathcal{M}_{\gamma e^-}{}^{(s+u)} = \mathcal{M}_{\gamma e^-}{}^{(s)} + \mathcal{M}_{\gamma e^-}{}^{(u)}$$

はゲージ不変ではない。(6.108) のゲージ不変性の要求は，e の任意の次数で成り立つべきものだから，Compton 散乱の振幅をゲージ不変にするためには，$\mathcal{M}_{\gamma e^-}{}^{(s+u)}$ に次数 e^2 で寄与する

$$\mathcal{M}_{\gamma e^-}{}^{(c)} = -2e^2(\varepsilon\cdot\varepsilon')$$

を加えなければならない。したがってスカラー電子による Compton 散乱の不変振幅は

$$F = e^2 \varepsilon_\mu \varepsilon_\nu{}'^* \left(\frac{4p^\mu p'^\nu}{s-m^2} + \frac{4p'^\mu p^\nu}{u-m^2} - 2g^{\mu\nu} \right)$$

である。すなわち，バーテックスに $2ie^2 g^{\mu\nu}$ を対応させた図 6·16 を図 6·12 に加えることにより，ゲージ不変性が回復される。

8.1* (6.4) と (6.5) により散乱振幅は

$$T_{fi} = (-i)\int d^4x j_\mu{}^{fi}(x) A^\mu(x) = (-i)\int d^4x(-e)\bar{u}_f \gamma_\mu u_i e^{i(p_f-p_i)\cdot x} A^\mu(x).$$

$A^\mu = (\phi(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{0})$ ととれば

$$T_{fi} = (-i)\int dx^0 e^{i(E_f-E_i)x^0}(-e\bar{u}_f\gamma_0 u_i)\int d^3\boldsymbol{x}\, e^{i\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{x}}\phi(\boldsymbol{x})$$

$$= (-2\pi i)\delta(E_f-E_i)(-e\bar{u}_f\gamma_0 u_i)\int d^3\boldsymbol{x}\, e^{i\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{x}}\phi(\boldsymbol{x}).$$

ここで $\boldsymbol{q} = \boldsymbol{p}_f - \boldsymbol{p}_i$ である。次に $|\boldsymbol{x}| \to \infty$ で $\phi(\boldsymbol{x}) \to 0$ として部分積分すれば

$$\int e^{i\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{x}} \nabla^2 \phi(\boldsymbol{x})\, d^3\boldsymbol{x} = -|\boldsymbol{q}|^2 \int e^{i\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{x}}\phi(\boldsymbol{x})\, d^3\boldsymbol{x}$$

が得られる。$\nabla^2\phi(\boldsymbol{x}) = -Ze\rho(\boldsymbol{x})$ を用いれば

$$\int e^{i\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{x}}\phi(\boldsymbol{x})\, d^3x = \frac{Ze}{|\boldsymbol{q}|^2}\int e^{i\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{x}}\rho(\boldsymbol{x})\, d^3\boldsymbol{x} = \frac{Ze}{|\boldsymbol{q}|^2}F(\boldsymbol{q})$$

であるから，散乱振幅は

$$T_{fi} = 2\pi i\delta(E_f - E_i)\frac{Ze^2}{|\boldsymbol{q}|^2}F(\boldsymbol{q})(\bar{u}_f\gamma_0 u_i).$$

4.3 節により散乱断面積は

$$d\sigma = \frac{|T_{fi}|^2/TV}{(\text{始状態のフラックス})}(\text{終状態の数})$$

で表される。ただし，T, V はそれぞれ相互作用時間および規格化体積である。入射 (散乱) 電子の運動量およびエネルギーをそれぞれ $\boldsymbol{k}_i$ ($\boldsymbol{k}_f$)，E_i (E_f)，ただし $k = |\boldsymbol{k}_i| = |\boldsymbol{k}_f|$ とすれば

$$\text{始状態のフラックス} = v\frac{2E_i}{V}$$

$$\text{終状態の数} = \frac{d^3\boldsymbol{k}_f}{(2\pi)^3 2E_f}$$

である。ここで，v は入射電子の速度を表す。したがって

$$d\sigma = \frac{|T_{fi}|^2}{TV}\left(\frac{V}{v\cdot 2E_i}\right)\frac{d^3\boldsymbol{k}_f}{(2\pi)^3 2E_f} = \frac{|T_{fi}|^2}{T}\left(\frac{1}{v2E_i}\right)\frac{d^3\boldsymbol{k}_f}{(2\pi)^3 2E_f}.$$

$|T_{fi}|^2$ から出てくる 1 つの $\delta(E_f-E_i)$ は

$$2\pi\delta(E_f-E_i)=\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}e^{i(E_f-E_i)t}dt=T$$

となり，他の 1 つは $d^3\boldsymbol{k}_f$ を制限して

$$d^3\boldsymbol{k}_f\,\delta(E_f-E_i)=k_f{}^2dk_fd\Omega\delta(E_f-E_i)=k_fE_fdE_fd\Omega\delta(E_f-E_i)=kEd\Omega$$

となる。ここで $E_i=E_f=E$，$k_i=k_f=k$ である。こうして (8.6) は，電子のスピンにつき和をとって次のようになる：

$$d\sigma=\frac{1}{2}\sum_{s_i,s_f}|\bar{u}_f\gamma_0u_i|^2(2\pi)\left[\frac{Ze^2F(\boldsymbol{q})}{|\boldsymbol{q}|^2}\right]^2\frac{kEd\Omega}{(2\pi)^32E}\left(\frac{1}{v2E}\right).$$

ここで (6.19) を用いて

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\sum_{s_i,s_f}|\bar{u}_f\gamma_0u_i|^2&=L_e{}^{00}=2(k^0k'^0+k'^0k^0-(k\cdot k'-m^2)g^{00})\\&=2[2E^2-E^2+k^2\cos\theta+E^2-k^2]\\&=4\left[E^2-k^2\frac{1-\cos\theta}{2}\right]=4E^2\left[1-\frac{k^2}{E^2}\sin^2\frac{\theta}{2}\right]\\&=4E^2\left(1-v^2\sin^2\frac{\theta}{2}\right).\end{aligned}$$

$|\boldsymbol{q}|^2=|\boldsymbol{k}_i-\boldsymbol{k}_f|^2=4k^2\sin^2(\theta/2)$ であるから

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}=\frac{E^2}{4k^4\sin^4(\theta/2)}\left(1-v^2\sin^2\frac{\theta}{2}\right)\left(\frac{e^2Z}{4\pi}\right)^2|F(\boldsymbol{q})|^2$$

となる。$\alpha=e^2/4\pi$ と書いて

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{point}}\equiv\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{Mott}}=\frac{(Z\alpha)^2E^2}{4k^4\sin^4(\theta/2)}\left(1-v^2\sin^2\frac{\theta}{2}\right)$$

のように表せば

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}=\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{Mott}}|F(\boldsymbol{q})|^2$$

を得る。

8.2* 入射粒子がスピンを持たなければ

$$j_\mu{}^{fi}=-e(p_i+p_f)_\mu e^{i(p_f-p_i)\cdot x}$$

であるから，$E_i=E_f=E$ に注意すれば

$$|j_0{}^{fi}|^2=e^2(p_i{}^0+p_f{}^0)^2=e^2(E_i+E_f)^2=4e^2E^2$$

となり

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{point}}=\frac{(Z\alpha)^2E^2}{4k^4\sin^4(\theta/2)}$$

を得る。すなわち，$v\to0$ の非相対論的極限では，電子のスピンの有無は断面積に関係しない。これは，非相対論的電子と電磁場は主に電場を通して相互作用するから，スピン方向を変えないためである。

8.3* 6.6 節により，相対論的極限ではヘリシティーは保存するから，(8.7) の左辺に寄与するのは

$$|\bar{u}_{\mathrm{L}(R)}\gamma^0u_{\mathrm{L}(R)}|^2=\cos^2(\theta/2)$$

のみである。相対論的極限は $v\to1$ に相当するから (8.7) で $v\to1$ とすれば $1-\sin^2(\theta/2)=\cos^2(\theta/2)$ となり，相対論的極限の電子散乱ではヘリシティーが変わらないことがわかる。

8.4 $\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{x}=|\boldsymbol{q}|r\cos\theta$ として極座標で積分を実行すれば

$$F(|\boldsymbol{q}|)=N\int e^{-mr}e^{i\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{x}}d^3x=N\int_0^\infty r^2dre^{-mr}(2\pi)\int_{-1}^1 d(\cos\theta)e^{i|\boldsymbol{q}|r\cos\theta}$$

$$=\frac{2\pi N}{i|\boldsymbol{q}|}\int_0^\infty rdr(e^{-(m-i|\boldsymbol{q}|)r}-e^{-(m+i|\boldsymbol{q}|)r})=\frac{8\pi N}{m^3(1+|\boldsymbol{q}|^2/m^2)^2}.$$

ここで $N\int_0^\infty e^{-mr}d^3x=1$ としたから $N=m^3/8\pi$ であり，$|\boldsymbol{q}|^2\equiv -q^2$ と書けば

$$F(|\boldsymbol{q}|)=\left(1-\frac{q^2}{m^2}\right)^{-2}.$$

8.5 J^μ のもっとも一般的な形は ($x=0$ として) 次のように書けるだろう：

$$J^\mu=e\bar{u}(p')[\gamma^\mu K_1+i\sigma^{\mu\nu}(p'-p)_\nu K_2+i\sigma^{\mu\nu}(p'+p)_\nu K_3+(p'-p)^\mu K_4+(p'+p)^\mu K_5]u(p).$$

ここで $K_i\equiv K_i(q^2)$. Gordon 分解 (6.7) を用いて $(p'+p)^\mu$ を γ^μ と $\sigma^{\mu\nu}(p'-p)_\nu$ の 1 次結合で表すことができる。したがって，もっとも一般的な形は

$$J^\mu=e\bar{u}(p')\left(\gamma^\mu F_1+\frac{i\varkappa}{2M}F_2\sigma^{\mu\nu}q_\nu+q^\mu F_3\right)u(p)$$

に帰着される。電流保存

$$q_\mu J^\mu=e\bar{u}(p')\left(\not{q}F_1+\frac{i\varkappa}{2M}F_2q_\mu\sigma^{\mu\nu}q_\nu+q^2F_3\right)u(p)=0$$

により $F_3=0$ である。なぜなら，上式で第 1 項は Dirac 方程式により 0，第 2 項は $\sigma^{\mu\nu}$ の反対称性により 0 になるからである。

8.6 $p'=p+q$ を 2 乗すれば，$p^2=M^2$，$p'^2=M^2$ だから

$$M^2=M^2+2p\cdot q+q^2,$$

すなわち $p\cdot q=-q^2/2$ で，$p\cdot q$ は独立なスカラー変数ではない。

8.7* (8.12) を Gordon 分解 (6.7) を用いて書き換えれば

$$J^\mu(0)=e\bar{u}(p')\left[F_1(q^2)\gamma^\mu+\frac{\varkappa}{2M}F_2(q^2)i\sigma^{\mu\nu}q_\nu\right]u(p)$$

$$=e\bar{u}(p')\left[F_1(q^2)\gamma^\mu+\varkappa F_2(q^2)\left(\gamma^\mu-\frac{(p+p')^\mu}{2M}\right)\right]u(p)$$

$$=e\bar{u}(p')\left[\gamma^\mu(F_1(q^2)+\varkappa F_2(q^2))-\frac{(p+p')^\mu}{2M}\varkappa F_2(q^2)\right]u(p),$$

すなわち

$$J^\mu(0)=e\bar{u}(p')[\gamma^\mu(F_1(q^2)+F_2(q^2))-\frac{(p+p')^\mu}{2M}\varkappa F_2(q^2)]u(p).$$

Breit 系 $p^\mu=(E,\boldsymbol{p})$，$p'^\mu=(E,-\boldsymbol{p})$ で $J^\mu(0)\equiv(\rho,\boldsymbol{J})$ を計算する。$\bar{u}\gamma^0u=2M$, $\bar{u}u=2E$ だから

$$J^0(0)\equiv\rho=e\bar{u}(p')[\gamma^0(F_1+F_2)-(E/M)\varkappa F_2]u(p)$$

$$=2e[M(F_1+F_2)-(E^2/M)\varkappa F_2]=2Me[F_1+(1-E^2/M^2)\varkappa F_2]$$

$$=2Me[F_1+\{(M^2-E^2)/M^2\}\varkappa F_2].$$

$q^2=(p'-p)^2=-4\boldsymbol{p}^2=4(M^2-E^2)$ を用いて $\tau\equiv-q^2/4M^2$ を導入し，$F_{1,2}$ の変数を明示すれば

$$\rho(0)=2Me[F_1(q^2)-\tau\varkappa F_2(q^2)]=2MeG_E(q^2).$$

ここで $G_E(q^2)\equiv F_1(q^2)-\varkappa\tau F_2(q^2)$ は (8.16) の電気形状因子である。次に $J^\mu(0)$ の空間成分は

$$\boldsymbol{J}(0)=e\bar{u}(p')\boldsymbol{\gamma}u(p)(F_1+\varkappa F_2)=e\bar{u}(-\boldsymbol{p})\boldsymbol{\gamma}u(\boldsymbol{p})(F_1+\varkappa F_2)$$

$$=e\bar{u}(-\boldsymbol{p})\boldsymbol{\gamma}u(\boldsymbol{p})G_M.$$

ここで，$G_M(q^2)=F_1(q^2)+\varkappa F_2(q^2)$ は (8.16) の磁気形状因子である。Breit 系で $|\boldsymbol{q}|^2=|\boldsymbol{p}|^2/4\ll M^2$ の近似をして，Pauli スピノールを $\chi(\boldsymbol{p})$ とすれば

$$\bar{u}(-\boldsymbol{p})\boldsymbol{\gamma}^i u(\boldsymbol{p}) = (i/2M)\chi^\dagger(\boldsymbol{\sigma}\times\boldsymbol{q})\chi$$

であるから

$$\boldsymbol{J}(0) = (ie/2M)\chi^\dagger(\boldsymbol{\sigma}\times\boldsymbol{q})\chi G_M(q^2).$$

8.8* $\langle p'|J^\mu(x)|p\rangle$ は座標 x のずらしに対して不変だから

$$\langle p'|J^\mu(x)|p\rangle = \langle p'|J^\mu(0)|p\rangle e^{i(p'-p)\cdot x} \tag{1}$$

である。$J^\mu(x) = e\bar{\psi}(x)\gamma^\mu(x)$ の $\psi(x)$, $\bar{\psi}(x)$ に

$$\psi(x) = (2\pi)^{-3/2}\sum_s\int d^3\boldsymbol{p}_1 b(p_1, s)\, u^{(S)}(p_1)e^{-ip_1\cdot x},$$

$$\bar{\psi}(x) = (2\pi)^{-3/2}\sum_{s'}\int d^3\boldsymbol{p}_2 b^\dagger(p_2, s')\, u^\dagger(p_2)e^{ip_2\cdot x}$$

などを用いて，(1) の左辺の $\mu=0$ 成分の Fourier 変換を計算すれば

$$\int d^3\boldsymbol{x}\, e^{iq\cdot x}\langle p'|J^0(x)|p\rangle = (2\pi)^{-3}\int d^3\boldsymbol{x}\, e^{iq\cdot x}\, e^{i(p'-p)\cdot x}\, e\bar{u}^{(s')}\gamma^0 u^{(s)}(p)$$

$$= \delta^3(\boldsymbol{p}'-\boldsymbol{p}+\boldsymbol{q})[e\bar{u}^{(s')}(p')\gamma^0 u^{(s)}(p)]. \tag{2}$$

前問の結果を (2) の右辺に用いて

$$\int d^3\boldsymbol{x}\, e^{iq\cdot x}\langle p'|J^0(x)|p\rangle = 2MeG_E(q^2)\delta^3(\boldsymbol{p}'-\boldsymbol{p}+\boldsymbol{q}) \tag{3}$$

となる。そこで，改めて

$$\langle p'|J^0(x)|p\rangle = 2E_p\delta^3(\boldsymbol{p}'-\boldsymbol{p}+\boldsymbol{q})e\rho(\boldsymbol{x}) \tag{4}$$

と定義しなおし，Breit 系で $|\boldsymbol{q}|^2 \ll 4M^2$ とすれば，$E_p = \sqrt{M^2+|\boldsymbol{p}|^2} = M\sqrt{1+|\boldsymbol{q}|^2/4M^2} \simeq M$ であるから，(3) は

$$\int d^3\boldsymbol{x}\, e^{iq\cdot x}\rho(\boldsymbol{x}) = G_E(q^2) \tag{5}$$

と書くことができる。

磁気モーメント密度は，電流密度により $\boldsymbol{\mu} = (\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{J})/2$ と表されるから，(1) の空間成分に前問の結果を用いれば

$$\int d^3\boldsymbol{x}\, e^{iq\cdot x}\mu(\boldsymbol{x}) = G_M(q^2) \tag{6}$$

を得る。

8.9 (6.19) により，$L_{\mu\nu}{}^e$ は 2 つの電子カレントの積をスピンにつき加えたものだから

$$L_{\mu\nu}{}^e = \frac{1}{2}\sum_{\text{spin}}[\bar{u}(p')\gamma_\mu u(p)][\bar{u}(p')\gamma_\nu u(p)]^* \equiv \frac{1}{2}\sum_{\text{spin}} J_\mu J_\nu{}^*$$

$$= \frac{1}{2}\mathrm{Tr}[(\not{p}'+m)\gamma_\mu(\not{p}+m)\gamma_\nu].$$

同様に

$$L_{\nu\mu}{}^e = \frac{1}{2}\mathrm{Tr}[(\not{p}'+m)\gamma_\nu(\not{p}+m)\gamma_\mu]$$

であるから，直接計算してみれば

$$L_{\mu\nu}{}^e = L_{\nu\mu}{}^e = 2(p_\mu' p_\nu + p_\nu' q_\mu - (p\cdot p' - m^2)g_{\mu\nu})$$

がわかる。電流保存

$$q^\mu J_\mu = q^\nu J_\nu{}^* = 0$$

が成り立つから

$$q^\mu L_{\mu\nu}{}^e = q^\nu L_{\mu\nu}{}^e = 0.$$

8.10 $W_{\mu\nu}$ の具体的な形は (8.37) により

$$W^{\mu\nu} = \frac{1}{4\pi M}\left(\frac{1}{2}\sum_s\sum_{s'}\right)\int\frac{d^3p'}{(2\pi)^3 2p_0'} < p, s|\tilde{J}^{+\mu}|p', s'> < p', s'|\tilde{J}^\nu|p, s>(2\pi)^4\delta(p+q-p')$$

で与えられる。ただし

$$<p', s'|\tilde{J}^{\nu}|p, s> = \bar{u}^{(s')}(p')\gamma^{\nu}u^{(s)}(p)$$

である。ハドロンカレント保存 $\partial_{\mu}J^{\mu}=0$ により

$$q_{\mu}\tilde{J}^{\mu\dagger} = q_{\nu}\tilde{J}^{\nu} = 0$$

であるから

$$q_{\mu}W^{\mu\nu} = q_{\nu}W^{\mu\nu} = 0 \tag{8.26}$$

が成り立つ。次に $W^{\mu\nu}$ の一般的な形は

$$W^{\mu\nu} = -W_1 g^{\mu\nu} + \frac{W_2}{M^2}p^{\mu}p^{\nu} + \frac{W_4}{M^2}q^{\mu}q^{\nu} + \frac{W_5}{M^2}(p^{\mu}q^{\nu} + q^{\mu}p^{\nu}) \tag{8.24}$$

で与えられるから，(8.26) を使えば

$$0 = q_{\nu}W^{\mu\nu} = -q^{\mu}W_1 + \frac{W_2}{M^2}(p\cdot q)p^{\mu} + \frac{W_4}{M^2}q^2q^{\mu} + \frac{W_5}{M^2}(q^2p^{\mu} + (p\cdot q)q^{\mu}).$$

q^{μ} と p^{μ} の係数はそれぞれ 0 でなければならないから

$$-W_1 + \frac{W_4}{M^2}q^2 + \frac{W_5}{M^2}(p\cdot q) = 0, \qquad \frac{W_2}{M^2}(p\cdot q) + \frac{W_5}{M^2}q^2 = 0.$$

すなわち

$$W_5 = -\frac{p\cdot q}{q^2}W_2, \qquad W_4 = \left(\frac{p\cdot q}{q^2}\right)^2 W_2 + \frac{M^2}{q^2}W_1.$$

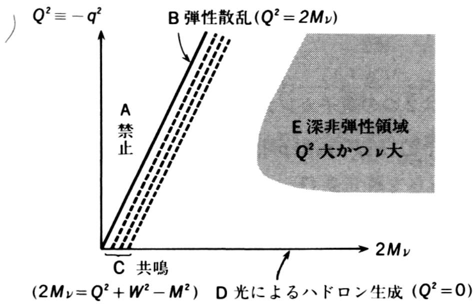
8.11

$$x = \frac{-q^2}{2p\cdot q} = \frac{-q^2}{2M\nu}, \qquad y = \frac{p\cdot q}{p\cdot k}.$$

ep→eX においては，$q^2 \leq 0$，$\nu \geq 0$ だから $x \geq 0$. また，(8.29) において $W^2 \geq M^2$ であるから，$2M\nu \geq -q^2$. すなわち $x \leq 1$. よって $0 \leq x \leq 1$ となる。y は Lorentz 不変な変数だから実験室系で計算すれば

$$y = 1 - (E'/E)$$

となる。したがって $0 \leq y \leq 1$.

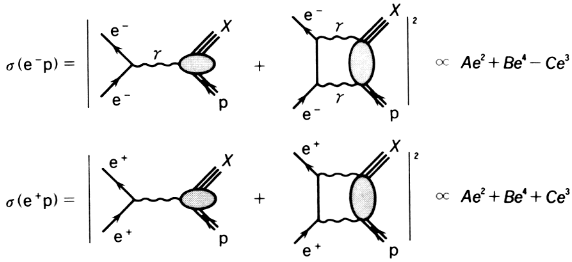


8.12* 標的陽子の静止系では $p=(M, \mathbf{0})$ だから $q=(E-E', \boldsymbol{q})$，$k=(E, \boldsymbol{k})$ とすれば

$$\nu = \frac{p\cdot q}{M} = \frac{M(E-E')}{M} = E - E',$$

$$y = \frac{p\cdot q}{p\cdot k} = \frac{M(E-E')}{ME} = \frac{E-E'}{E}.$$

8.13* $e^-p \to e^-X$ と $e^+p \to e^+X$ を比較すると，2 光子交換を考慮した場合，1 光子交換との干渉項に違いが現れる。図式的に書けば



となり，干渉項は符号が逆である。$\sigma(e^+p)/\sigma(e^-p)$ を $-q^2\equiv Q^2$ の関数としてプロットして1からのずれをみることができる。$e^\pm p\to e^\pm X$ と $\mu^\pm$ (鉄原子核)$\to\mu^\pm X$ の実験データ ($Q^2\leq 50$ GeV^2) では，誤差は大きいが1から有意のずれは認められない。

8.14* z 軸をベクトル $\boldsymbol{q}$ の向きにとれば，$q=(q_0,0,0,q_3)=(\nu,0,0,q_3)$ である。$\lambda=\pm1$ の場合は (8.49) の $\varepsilon_\pm$ の形から $q\cdot\varepsilon=0$ は自明。$\lambda=0$ の場合は

$$q\cdot\varepsilon=\frac{1}{\sqrt{-q^2}}(\nu\sqrt{\nu^2-q^2}-q_3\nu)=\frac{1}{\sqrt{-q^2}}(\nu\sqrt{\nu^2-q^2}-\sqrt{q_0{}^2-q^2}\,\nu)$$
$$=\frac{1}{\sqrt{-q^2}}(\nu\sqrt{\nu^2-q^2}-\sqrt{\nu^2-q^2}\,\nu)=0.$$

すなわち，各 λ の値に対して $\varepsilon\cdot q=0$ が成り立つ。

8.15 (8.27) を (8.52) に代入する。$\lambda=0$ の場合をやってみると $\varepsilon\cdot q=0$ を用い，

$$\varepsilon_0{}^{\mu*}W_{\mu\nu}\varepsilon_0{}^\nu=\left(\frac{1}{\sqrt{-q^2}}\right)^2(\sqrt{\nu^2-q^2},0,0,\nu)\left[-g_{\mu\nu}W_1+p_\mu p_\nu\frac{W_2}{M^2}\right]\begin{pmatrix}\sqrt{\nu^2-q^2}\\0\\0\\\nu\end{pmatrix}$$
$$=-W_1+\left(1-\frac{\nu^2}{q^2}\right)W^2$$

となるから

$$\sigma_{\rm L}\equiv\sigma_0{}^{\rm tot}=\frac{4\pi^2\alpha}{k}\left[\left(1-\frac{\nu^2}{q^2}\right)W_2(\nu,q^2)-W_1(\nu,q^2)\right]\tag{8.54}$$

を得る。次に $\lambda=\pm1$ の場合は $\varepsilon\cdot q=0$ と $p=(M,\mathbf{0})$ により W_1 のみが残り

$$\sigma_{\rm T}\equiv\frac{1}{2}(\sigma_+{}^{\rm tot}+\sigma_-{}^{\rm tot})=\frac{4\pi^2\alpha}{K}\varepsilon_{\pm1}{}^{\mu*}g_{\mu\nu}\varepsilon_{\pm1}{}^\nu W_1(\nu,q^2)=\frac{4\pi^2\alpha}{K}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)W_1(\nu,q^2)$$
$$=\frac{4\pi^2\alpha}{K}W_1(\nu,q^2)\tag{8.53}$$

を得る。

8.16* (8.53)，(8.54) を W_1, W_2 について解けば

$$W_1=\frac{K}{4\pi^2\alpha}\sigma_{\rm T},\qquad W_2=\frac{K}{4\pi^2\alpha}(\sigma_{\rm L}+\sigma_{\rm T})\frac{q^2}{q^2-\nu^2}$$

が得られる。これを (8.34) に代入すれば

$$\left.\frac{d\sigma}{dE'd\Omega}\right|_{\rm lab}=\frac{\alpha^2}{4E^2\sin^4(\theta/2)}\frac{K}{4\pi^2\alpha}\left\{\frac{q^2}{q^2-\nu^2}(\sigma_{\rm L}+\sigma_{\rm T})\cos^2\frac{\theta}{2}+2\sigma_{\rm T}\sin^2\frac{\theta}{2}\right\},$$
$$|q^2|=4EE'\sin^2\frac{\theta}{2},$$

$$\{\quad\}=\left(2\sin^2\frac{\theta}{2}+\frac{q^2}{q^2-\nu^2}\cos^2\frac{\theta}{2}\right)\left(\sigma_T+\frac{\sigma_L}{1-\dfrac{2(\nu^2-q^2)}{q^2}\tan^2\dfrac{\theta}{2}}\right)$$

$$=-\frac{q^2}{\nu^2-q^2}\cos^2\frac{\theta}{2}\left(1-2\frac{\nu^2-q^2}{q^2}\tan^2\frac{\theta}{2}\right)\left(\sigma_T+\varepsilon\sigma_L\right),$$

ただし
$$\varepsilon=\left(1-\frac{2(\nu^2-q^2)}{q^2}\tan^2\frac{\theta}{2}\right)^{-1}.$$

$\sigma_T+\varepsilon\sigma_L$ の係数とはじめの $\{\quad\}$ の係数をまとめて $|q^2|$ の表式を使うと

$$\frac{\alpha KE'}{4|q^2|\pi^2E}\left(\frac{-q^2\cos^2(\theta/2)}{\nu^2-q^2}\right)\frac{1}{\sin^2(\theta/2)}\left(1-2\frac{\nu^2-q^2}{q^2}\tan^2\frac{\theta}{2}\right)$$

$$=\frac{\alpha K}{2\pi^2|q^2|}\frac{E'}{E}\frac{\left(1-2\dfrac{\nu^2-q^2}{q^2}\tan^2\dfrac{\theta}{2}\right)}{-2\dfrac{(\nu^2-q^2)}{q^2}\tan^2\dfrac{\theta}{2}}=\frac{\alpha K}{2\pi^2|q^2|}\frac{E'}{E}\frac{1}{1-\varepsilon}.$$

すなわち

$$\left.\frac{d\sigma}{dE'd\Omega}\right|_{\text{lab}}=\Gamma(\sigma_T+\varepsilon\sigma_L)\qquad \text{ただし}\quad \Gamma=\frac{\alpha K}{2\pi^2|q^2|}\frac{E'}{E}\frac{1}{1-\varepsilon}$$

が得られた。

8.17 (8.27) $W^{\mu\nu}=W_1\left(-g^{\mu\nu}+\dfrac{q^\mu q^\nu}{q^2}\right)+W_2\dfrac{1}{M^2}\left(p^\mu-\dfrac{p\cdot q}{q^2}q^\mu\right)\left(p^\nu-\dfrac{p\cdot q}{q^2}q^\nu\right)$ は $q^2=0$ に極を持つようにみえるが，実は，これは $W^{\mu\nu}$ をこのように書くために現れた見かけ上だけのことである。この極を除くためには，$q^2\to 0$ で

$$q^2W_1+\{(p\cdot q)^2/M^2\}W_2\longrightarrow 0,$$

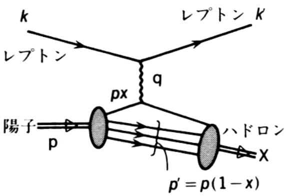
すなわち

$$W_2\longrightarrow -(q^2/\nu^2)W_1+O(q^4)$$

でなければならない。ところが，$q^2\to 0$ で $\sigma_T\propto W_1$ は定数 $\sigma^{\text{tot}}(\gamma\text{p})$ に近づくから $W_1\to$ 定数 となり，$W_2\to 0$ である。したがって，$q^2\to 0$ で $\sigma_L\propto(1-(\nu^2/q^2))W_2-W_1\simeq-(q^2/\nu^2)W_1\to 0$ となり，実光子 ($q^2=0$) の極限で成り立つべき関係が成り立っていることがわかる。

9.1* $x=1/\omega=Q^2/2M\nu$ において，$Q^2\geq 0$，$\nu\geq 0$ であるから $x\geq 0$ は明らか。(9.2) の左辺を，4 元運動量 p，質量 M の陽子と 4 元運動量 q の仮想光子が質量 W の系を作ったと考えれば，$W^2=(p+q)^2=M^2+2p\cdot q+q^2=M^2+2M\nu(1-Q^2/2M\nu)$．ただし $Q^2=-q^2$．$2M\nu(1-Q^2/2M\nu)=W^2-M^2\geq 0$　すなわち　$Q^2/2M\nu\leq 1$　よって　$0\leq x\leq 1$.

9.2* 陽子の運動量が無限大の系 ($|\boldsymbol{p}|\to\infty$系) でみれば，陽子はパンケーキ型に Lorentz 収縮しており，入射レプトンは核子内のパートンによって瞬間的に散乱されると考えてよい。相互作用時間 τ と Lorentz 収縮のためにのびている陽子内パートンの寿命 T を比較してみる。右図の運動量が 4 元運動量を表すとすれば



$$\tau\approx\frac{1}{q^0}=\frac{4|p|}{2M\nu-q^2}.$$

仮想光子と相互作用するパートンは陽子の運動量比 x を持てば，残りは $p'=p(1-x)$ を持つから，パートンの寿命は

$$T \simeq \frac{1}{\Delta E} = \frac{1}{E+E'-E_p} \cong \frac{2|p|}{\dfrac{m^2+p_\perp{}^2}{x}+\dfrac{m'^2+p_\perp{}'^2}{1-x}-M^2}.$$

ここで $m(m')$，$p_\perp(p_\perp{}')$ は仮想光子と相互作用するパートン（残りの部分）の質量および横運動量，M は核子の質量である。$p_\perp{}^2$，$p_\perp{}'^2 \simeq 0$ とすれば

$$T \simeq \frac{2|p|}{M^2}$$

となる。$\nu \gg M$ とすれば

$$T \gg \tau$$

が得られる。すなわち，衝突時間は，陽子内パートンが，ある決まったエネルギーを持つ仮想状態の寿命に比べてずっと短い。

9.3

$$\hat{s} = (k+xp)^2 \simeq x(2k\cdot p) \cong xs,$$
$$\hat{t} = (k-k')^2 = t,$$
$$\hat{u} = (k'-xp)^2 \simeq x(-2k'\cdot p) \simeq xu.$$

(6.30) により

$$\overline{|\mathcal{M}(\mathrm{eq}_i \to \mathrm{eq}_i)|^2} = 2(4\pi\alpha e_i)^2\frac{\hat{s}^2+\hat{u}^2}{\hat{t}^2}$$

であるから，(4.35) と (4.45) を用いて

$$\frac{d\sigma}{d\hat{t}} = \frac{2\pi\alpha^2 e_i{}^2}{\hat{s}^2}\left(\frac{\hat{s}^2+\hat{u}^2}{\hat{t}^2}\right)$$

を得る。次に $s \gg M^2$ とすれば $s=(p+k)^2 \simeq 2(p\cdot k)$，$u=(p-k')^2 \simeq -2(p\cdot k')$，$t=(k-k')^2=q^2$ だから，$-q^2=Q^2$ として

$$-\frac{t}{s+u} = \frac{-q^2}{2p\cdot q} = \frac{Q^2}{2M\nu} = x$$

となるから

$$x(s+u)+t=0,$$

すなわち

$$\hat{s}+\hat{u}+\hat{t}=0$$

を得る。これを用いれば

$$\left(\frac{d\sigma}{dtdu}\right)_{\mathrm{eq}_i\to\mathrm{eq}_i} = x\frac{d\sigma}{d\hat{t}d\hat{u}} = x\frac{d}{d\hat{u}}\int\frac{2\pi\alpha^2 e_i{}^2}{\hat{s}^2}\left(\frac{\hat{s}^2+\hat{u}^2}{\hat{t}^2}\right)\delta(\hat{s}+\hat{u}+\hat{t})\,d\hat{u}$$
$$= x\frac{2\pi\alpha^2 e_i{}^2}{t^2}\left(\frac{s^2+u^2}{s^2}\right)\delta(x(s+u)+t)$$

となり，(9.18) を得る。

(9.19) を導くには，まず (8.31) が次のように書けることに注意する：

$$(L^{\mathrm{e}})^{\mu\nu}W_{\mu\nu} = -2W_1 t + \frac{2W_2}{M^2}\left[-\frac{su}{2}-M^2 t\right].$$

$s \gg M^2$ と仮定したから，$t=-x(s+u)$ を用いて

$$(L^{\mathrm{e}})^{\mu\nu}W_{\mu\nu} = \frac{2}{M(s+u)}[x(s+u)^2F_1 - suF_2]$$

を得る。これを (8.35) に代入して，6.8 節の実験室系における運動学的関係

$$s=2ME, \qquad u=-2ME', \qquad t=-Q^2=-4EE'\sin^2(\theta/2)$$

を用いて得られる

$$d\Omega\, dE' = 2\pi d(\cos\theta)\, dE' = \frac{4\pi M^2}{su} dt\left(-\frac{1}{2M}du\right)$$

を使って (9.19) が導かれる：

$$\left(\frac{d\sigma}{dudt}\right)_{\mathrm{ep}\to\mathrm{eX}} = \frac{4\pi\alpha^2}{s^2t^2}\frac{1}{(s+u)}[x(s+u)^2F_1 - suF_2].$$

9.4 $Q^2 = 4EE'\sin^2(\theta/2)$ および $d\nu = -dE'$ を用いれば，(9.21) が導かれる。実験室系で

$$\sin^2\frac{\theta}{2} = \frac{Q^2}{4EE'} = \frac{2M\nu x}{4(\nu/y)E'} = \frac{xyM}{2E'}, \qquad \cos^2\frac{\theta}{2} = \frac{E}{E'}\left(1 - y - \frac{Mxy}{2E}\right)$$

が成り立つから，これらを (8.34) に代入して

$$\frac{d\sigma}{dxdy} = \frac{8ME\pi\alpha^2}{Q^4}\left[xy^2F_1 + \left(1 - y - \frac{Mxy}{2E}\right)F_2\right]$$

が得られる。実験室系で $\nu_{\max} = E$ だから

$$M\nu_{\max}x^2y^2 = Q^4/4ME$$

に注意すれば，前式からただちに (9.23) が導かれる。

9.5 深非弾性極限では，上の $d\sigma/dxdy$ は $s = 2ME$ および $2xF_1 = F_2$ であるから

$$\frac{d\sigma}{dxdy} = \frac{4\pi s\alpha^2}{Q^4}\left\{\frac{y^2}{2} + (1-y)\right\}F_2(x)$$

となる。$F_2(x) = \sum e_i^2 x f_i(x)$ を代入して (9.24) を得る。

9.6* $1 - y = 1 - \dfrac{p\cdot q}{p\cdot k} = \dfrac{p\cdot(k-q)}{p\cdot k} = \dfrac{p\cdot k'}{p\cdot k}$. 電子およびクォークの質量は無視して，重心系の散乱角を θ とすれば，$p\cdot k' \simeq |\boldsymbol{p}||\boldsymbol{k}'|(1+\cos\theta)$，$p\cdot k = 2|\boldsymbol{p}||\boldsymbol{k}|$，$|\boldsymbol{k}| = |\boldsymbol{k}'|$ だから

$$1 - y = \frac{p\cdot k'}{p\cdot k} \simeq \frac{1}{2}(1+\cos\theta)$$

を得る。

9.7 $\nu, Q^2 \to \infty$ の極限で (8.53) と (9.54) の比は

$$\frac{\sigma_{\mathrm{L}}}{\sigma_{\mathrm{T}}} \simeq \frac{\nu^2 W_2 - Q^2 W_1}{Q^2 W_1} = \frac{(F_2/2x) - F_2}{F_1} \longrightarrow 0$$

となる。

9.8* クォークのスピンが 0 ならば，電磁カレントは (4.11) で表されるから，(8.24) の $W^{\mu\nu}$ の $g^{\mu\nu}$ に比例する項は存在しない。したがって

$$W^{\mu\nu} = W_2\frac{1}{M^2}\left(p^\mu - \frac{p\cdot q}{q^2}q^\mu\right)\left(p^\nu - \frac{p\cdot q}{q^2}q^\nu\right)$$

となり，実験室 $p = (M, \mathbf{0})$ で計算すれば，電子の散乱角を θ として

$$d\sigma \propto L_{\mu\nu}{}^{\mathrm{e}}W^{\mu\nu} = 4M^2EE'\left(1 - \sin^2\frac{\theta}{2}\right)W_2(\nu, q^2) = 4M^2EE'\cos^2\frac{\theta}{2}W_2(\nu, q^2)$$

を得る。光子の伝播関数 q^{-2}，バーテックスにおける数係数，位相空間体積などをちゃんと含めれば

$$\left.\frac{d\sigma}{d\Omega}\right|_{\mathrm{lab}} = \left(\frac{\alpha^2}{4E^2\sin^4(\theta/2)}\right)\frac{E'}{E}\cos^2\frac{\theta}{2}W_2(\nu, q^2).$$

$\nu, q^2 \to \infty$ で $\nu W_2(\nu, q^2) \to F_2(x)$ とすれば，クォークのスピンが 0 の場合は $F_2(x)$ のみで $F_1(x) = 0$，したがって $\sigma_{\mathrm{T}} = 0$ である。構造関数をクォークの分布関数で表す 9.2 節の議論はクォークのスピンに依存しないから，$F_2(x) = \sum e_i^2 x f_i(x)$ はそのまま，クォークのスピンが 0 の場合にも成り立つ。

9.9 (9.27) と (9.28) によって $u(x)$, $\bar{u}(x)$ などは正であるから $(1/x)F_2^{\text{ep}}(x)\geq(1/9)[\mathrm{u}(x)+\bar{\mathrm{u}}(x)+\mathrm{d}(x)+\bar{\mathrm{d}}(x)+s(x)+\bar{s}(x)]$, $(1/x)F_2^{\text{en}}(x)\leq(4/9)[\mathrm{u}(x)+\bar{\mathrm{u}}(x)+\mathrm{d}(x)+\bar{\mathrm{d}}(x)+\mathrm{s}(x)+\bar{\mathrm{s}}(x)]$ が得られる。したがって $1/4\leq\dfrac{F_2^{\text{en}}(x)}{F_2^{\text{ep}}(x)}\leq 4$ となる。$F_2^{\text{ep}}(x)/x$, $F_2^{\text{en}}(x)/x$ に対する不等式から明らかなように，等号は陽子内に u (d) クォークだけが存在したときに成り立つ。(9.34) を使えば不等式の証明は自明かもしれない。

9.10 $x\to 0$ で $\nu W_2\to$ 定数 という実験的証拠がある。すると，(9.13) によって $x\to 0$ で $f_i(x)\sim 1/x$ でなければいけない。そこで問題の逆が成り立つことを示そう。(8.53), (9.13), (9.14) および (8.48) により，Q^2 を固定して $\nu\to\infty$ とすると

$$\sigma_{\mathrm{T}}=\frac{4\pi^2\alpha}{MK}F_1=\frac{4\pi^2\alpha}{M\nu}\frac{1}{2x}\sum_i e_i{}^2 x f_i(x)$$

であるから，もし $x\to 0$ で $f_i(x)\to 1/x$ ならば

$$\sigma_{\mathrm{T}}\longrightarrow\frac{4\pi^2\alpha}{Q^2}\sum_i e_i{}^2$$

が成り立つ。すなわち，σ_{T} は ν に依存せず，Q^2 を固定しておけば高エネルギーで一定値に近づく。

9.11* はじめの運動量を担う傍観者(スペクテーター)パートンの数が多ければ多いほど，大きな運動量比を持つパートンが作られる確率は小さくなる。

$-q^2\to\infty$ における陽子の弾性形状因子の漸近形は，陽子内の価クォークの数を n として

$$F_{el}{}^{\mathrm{p}}(q^2)\sim(q^2)^{-(n-1)}$$

だから，非弾性構造関数 $F_2(x)$ は $x\to 1$ で，$f_{\mathrm{u}}{}^{\mathrm{p}}(x)$ を陽子内 u クォークの分布関数とすれば

$$xf_{\mathrm{u}}{}^{\mathrm{p}}(x)\sim F_2{}^{\mathrm{p}}(x\to 1)\sim(1-x)^{2n-3}$$

のように振舞う (Drell-Yan-West の関係)。実験によれば $F_{el}{}^{\mathrm{p}}\sim(q^2)^{-2}$ $(-q^2\to\infty)$ だから，$x\to 1$ で

$$f_{\mathrm{u}}{}^{\mathrm{p}}(x)\longrightarrow(1-x)^3.$$

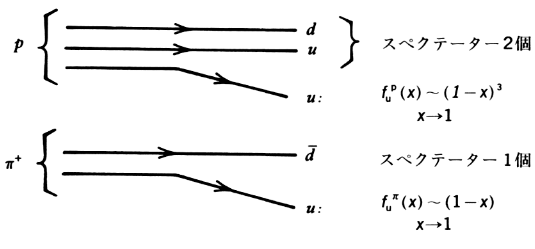
またメソンでは $F_{el}{}^{\mathrm{M}}\sim(q^2)^{-1}$ だから $n=2$ であり，$x\to 1$ で

$$f_{\mathrm{u}}{}^{\mathrm{M}}(x)\longrightarrow(1-x)$$

のように振舞う。反応 A+B→C+X が，素過程 a+b→c+d により実現されるとして，素過程に実際関与する (レプトンまたはパートン) の数を n_{active}, スペクテーター場の数を $n_{\text{spectator}}$ とすれば

$$N\equiv 2n_{\text{active}}-2,\qquad M\equiv 2n_{\text{spectator}}-1$$

$$E\frac{d\sigma}{d\boldsymbol{p}}(\mathrm{AB}\to\mathrm{CX})\bigg|_{x\to 1}\sim p_{\mathrm{T}}{}^{-2N}(1-x)^{-M}f(\theta_{\text{cm}})$$



である。ここで p_T は粒子 C の横運動量，θ_{cm} は重心系の散乱角である。

たとえば，ep→eX では素過程は eq→eq で $n_{active}=4$，$n_{spectator}^{hadronic}=2$ となり $x\to 1$ で $F_2^p(x)\sim(1-x)^3$ が得られる。

詳しくは R. Blankenbecler and S. G. Brodsky; Phys. Rev, **D 10** (1974) 2973,　J. F.Gunion; Phys. Rev, **D 10** (1974) 242 などを参照。

10.1* (8.53),(8.54) により

$$\sigma_T\equiv\frac{1}{2}(\sigma_+{}^{tot}+\sigma_-{}^{tot})=\frac{4\pi^2\alpha}{K}W_1(\nu,q^2),$$

$$\sigma_L\equiv\sigma_0{}^{tot}=\frac{4\pi^2\alpha}{K}\left[\left(1-\frac{\nu^2}{q^2}\right)W_2(\nu,q^2)-W_1(\nu,q^2)\right].$$

$\nu\to\infty$，$Q^2=-q^2\to\infty$ で $W_1(\nu,Q^2)=F_1(x)/M$，$W_2(\nu,Q^2)=F_2(x)/\nu$ $(x=Q^2/2M\nu)$ とすれば

$$2F_1(x)=\frac{2MK}{4\pi^2\alpha}\sigma_T\equiv\frac{\sigma_T}{\sigma_0}.$$

ここで $\sigma_0=4\pi^2\alpha/2MK$ であるが，$s=(p+q)^2=M^2+2M\nu-Q^2\simeq 2MK$, $K=\nu-Q^2/2M$ であるから

$$\sigma_0\simeq\frac{4\pi^2\alpha}{s}.$$

次に

$$\sigma_T+\sigma_L=\frac{4\pi^2\alpha}{K}\left(1-\frac{\nu^2}{q^2}\right)W_2(\nu,q^2)$$

であるから，$\nu^2\gg Q^2$ により

$$F_2(x)=\frac{K}{4\pi^2\alpha}\frac{Q^2}{\nu}(\sigma_T+\sigma_L)=\frac{2MK}{4\pi^2\alpha}\frac{Q^2}{2M\nu}(\sigma_T+\sigma_L)$$

すなわち

$$\frac{F_2(x)}{x}=\frac{\sigma_T+\sigma_L}{\sigma_0}.$$

10.2 偏極ベクトル ε_μ を持った仮想光子 γ^* が電荷 ee_i のクォークと相互作用する場合の不変振幅は

$$-i\mathcal{M}=\bar{u}(\mathrm{p}')(-iee_i\gamma^\mu)u(\mathrm{p})\varepsilon_\mu$$

である。したがって，クォークの質量を無視すれば (6.93) を用いて

$$\overline{|\mathcal{M}|^2}=(1/4)2e_i{}^2e^2\mathrm{Tr}(\not{p}'\not{p})=2e_i{}^2e^2p\cdot q$$

を得る。(10.13) から

$$F\hat{\sigma}_T=\overline{|\mathcal{M}|^2}2\pi\int d^3p'dp_0'\delta^4(p'-p-q)\theta(p_0')\delta(p'^2)$$
$$=2\pi\overline{|\mathcal{M}|^2}\delta[(p+q)^2]=8\pi^2\alpha e_i{}^2\delta(1-z)$$

が得られるが，$F\hat{\sigma}_0=8\pi^2\alpha$ だから $\hat{\sigma}_T/\hat{\sigma}_0=e_i{}^2\delta(1-z)$ が示されたことになる。

10.3

$$q=(q_0;0,0,k),\qquad q_2=(k';k'\sin\theta,0,k'\cos\theta)$$
$$q_1=(k;0,0,-k),\qquad g=(k';-k'\sin\theta,0,-k'\cos\theta)$$

とすれば，(10.20)-(10.23) を用いて次の関係を得る：

$$\hat{s}=(q+q_1)^2=(q_2+g)^2,$$
$$\hat{t}=(q-q_2)^2=(g-q_1)^2,$$
$$\hat{u}=(q_1-q_2)^2,$$
$$-\hat{t}-\hat{u}=Q^2+2k'q_0+2kk'=Q^2+4k'^2=Q^2+\hat{s}.$$

ここでエネルギー保存則 $q_0=2k'-k$ を用いた。(10.20)-(10.22) から

$$\hat{s}\hat{t}\hat{u}=4k'^2(2kk')^2\sin^2\theta=(4kk')^2 p_{\mathrm{T}}{}^2=(\hat{t}+\hat{u})^2 p_T{}^2=(\hat{s}+Q^2)^2 p_T{}^2$$

である。もし $\hat{t}\ll\hat{s}$ ならば，$-\hat{u}=\hat{s}+Q^2$ だから (10.25) が成り立つ。最後に $\cos\theta\simeq1$ の場合には次の関係が得られる：

$$\begin{aligned}dp_{\mathrm{T}}{}^2&=k'^2d(\sin^2\theta)=2k'^2\sin\theta\cos\theta d\theta\\&\simeq(\hat{s}/2)d(\cos\theta).\end{aligned}$$

10.4 K として (8.48) の約束を採用すれば，実験室系のフラックスは

$$F=4m_{\mathrm{q}}K=4m_{\mathrm{q}}\left(q_0-\frac{Q^2}{2m_{\mathrm{q}}}\right)=4m_{\mathrm{q}}q_0-2Q^2$$

となる。ここで γ^* は $q=(q_0,\ 0,\ 0,\ k_{\mathrm{L}})$ とする。一方

$$\hat{s}=(m_{\mathrm{q}}+q_0)^2-k_{\mathrm{L}}{}^2=2m_{\mathrm{q}}q_0-Q^2.$$

だから $F=2\hat{s}$ である。重心系にもどれば (4.29) は

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}=\frac{1}{64\pi^2\hat{s}}\overline{|\mathcal{M}|^2}$$

であるから，(10.26) を用いて (10.27) が導かれる。

10.5 図 10・7 を参照して $p_{\mathrm{T}}{}^2=k'^2\sin^2\theta$. (10.20) より $k'^2=\hat{s}/4$ だから $(p_{\mathrm{T}}{}^2)_{\max}=k'^2=\hat{s}/4$. (10.29) から $\hat{s}=Q^2(1-z)/z$ が得られる。これを上の $(p_{\mathrm{T}}{}^2)_{\max}$ の右辺に代入して

$$(p_{\mathrm{T}}{}^2)_{\max}=\hat{s}/4=Q^2(1-z)/4z.$$

10.6 (10.32), (10.33) をみればわかるように，$\log Q^2$ 項は $d\hat{\sigma}/dp_{\mathrm{T}}{}^2$ が $p_{\mathrm{T}}{}^{-2}$ のように振舞うことに由来する。$p_{\mathrm{T}}{}^{-2}$ は伝播関数の 2 乗 $t^{-2}\sim p_{\mathrm{T}}{}^{-4}$ とヘリシティー抑制因子 $\{\sin(\theta/2)\}^2\sim\theta^2\sim p_{\mathrm{T}}{}^2$ とから生じたものである。相対論的極限においては，実のスピン 1 グルーオンは $\mathrm{q_L}$ を $\mathrm{q_R}$ にフリップさせるから，角運動量保存によって $\theta=0$ では $\mathrm{q_L}\to$ グルーオン $+\mathrm{q_L}$ は禁止される。

10.7

$$q(x,Q^2)\sim\int^{Q^2}dp_{\mathrm{T}}{}^2\frac{\alpha_s(p_{\mathrm{T}}{}^2)}{p_{\mathrm{T}}{}^2}\sim\int\frac{d\log p_{\mathrm{T}}{}^2}{\log p_{\mathrm{T}}{}^2}\sim\log(\log Q^2).$$

したがって

$$\frac{d}{d\log Q^2}q(x,Q^2)\sim\frac{1}{\log Q^2}\sim\alpha_s(Q^2).$$

導出の筋道を辿ってみれば，$\alpha_s\to\alpha_s(Q^2)$ として (10.37) がふたたび得られることがわかる。

10.8 カラー因子 $=(1/2)^1(3\times3-1)/8=1/2$. 最初の 1/2 は習慣的な α_s の定義が再現されるための因子である ((10.19) 参照)。分母は始状態のグルーオンの 8 個のカラー状態に関する平均，分子は終状態の $\mathrm{q\bar{q}}$ のカラー状態に関する和である。(ただし，始状態 $\gamma^*\mathrm{g}$ はカラーを持っているから，カラーを持たない状態の組み合わせは除いてある。)

10.9 問題 6.19 で用いた方法に従う。(10.38) の項は，それぞれ $\overline{|\mathcal{M}_1|^2}$, $\overline{|\mathcal{M}_2|^2}$ および干渉項の寄与に対応する。(10.41) は (10.17) を (10.38) で置き換えて，(10.34) を導いた手続きを踏んで導くことができる。

10.10* (10.34), (10.40) からそれぞれ $P_{\mathrm{qq}}(z)$, $P_{\mathrm{qg}}(z)$ を求め，運動量保存から得られる関係 $P_{\mathrm{qq}}(1-z)=P_{\mathrm{gq}}(z)$ により $P_{\mathrm{gq}}(z)$ は求められる。しかし $P_{\mathrm{gg}}(z)$ は簡単ではない。$P_{\mathrm{qq}}(z)$, $P_{\mathrm{qg}}(z)$, $P_{\mathrm{gq}}(z)$, $P_{\mathrm{gg}}(z)$ を統一的に導く Altarelli-Parisi の方法を簡単に記しておこう。

(10.50) によれば，$\mathcal{P}_{\mathrm{BA}}(z,Q^2)$ はパートン A の中に運動量比 z を持つパートン B を見出す確率密度である。分岐関数 $P_{\mathrm{BA}}(z)\equiv P_{\mathrm{B\leftarrow A}}(z)$ はこの確率が，$\log Q^2/\mu^2$ の変化に対してどれだけ変化するかを $O(\alpha_s)$ で求めたものである。

対角成分 $P_{\mathrm{AA}}(z)$ は $z<1$ に限り確率密度に比例する意味を持ち，$z=1$ においては状態変化がないことを示す $\delta(1-z)$ に比例する項が寄与する。一方，非対角成分 $P_{\mathrm{BA}}(z)$ $(\mathrm{B}\neq\mathrm{A})$ は，z のすべての値に対して確率密度に比例し正値確定である。(10.50) を次のように書いておこう：

$$d\mathcal{P}_{\mathrm{BA}}(z, Q^2)=\frac{\alpha_s}{2\pi}P_{\mathrm{BA}}(z)\,dzd\left(\log\frac{Q^2}{\mu^2}\right). \tag{1}$$

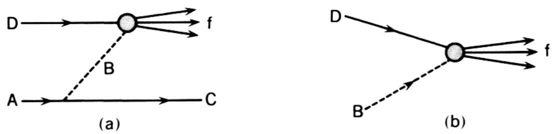
2 つの過程 (a) A+D→C+f，(b) B+D→f を考えると (図参照)，断面積は

$$d\sigma^{(\mathrm{a})}(\mathrm{A+D\to C+f})=d\mathcal{P}_{\mathrm{BA}}(z, Q^2)\,d\sigma^{(\mathrm{b})}(\mathrm{B+D\to f})\,dz, \tag{2}$$

すなわち

$$d\sigma^{(\mathrm{a})}(\mathrm{A+D\to C+f})=\frac{\alpha_s}{2\pi}P_{\mathrm{BA}}(z)\,dzd\left(\log\frac{Q^2}{\mu^2}\right)d\sigma^{(\mathrm{b})}(\mathrm{B+D\to f}) \tag{3}$$

であって，過程 (a) の断面積は，パートン A の中にパートン B が見出される確率と，過程 (b) の断面積の積で表される。



各バーテックスを V と書けば，行列要素は昔流の摂動計算により

$$\mathcal{M}(\mathrm{A+D\to C+f})=\frac{g^2 V_{\mathrm{A\to B+C}}V_{\mathrm{B+D\to f}}}{(2E_{\mathrm{B}})(E_{\mathrm{B}}+E_{\mathrm{C}}-E_{\mathrm{A}})}, \tag{4}$$

$$\mathcal{M}(\mathrm{B+D\to f})=gV_{\mathrm{B+D\to f}} \tag{5}$$

となるから

$$d\sigma^{(\mathrm{a})}(\mathrm{A+D\to C+f})=g^4\frac{|V_{\mathrm{A\to B+C}}|^2|V_{\mathrm{B+D\to f}}|^2}{(8E_{\mathrm{D}}E_{\mathrm{A}})(2E_{\mathrm{B}})^2(E_{\mathrm{B}}+E_{\mathrm{C}}-E_{\mathrm{A}})^2}(2\pi)^4\delta^{(4)}(k_{\mathrm{A}}+k_{\mathrm{D}}-k_{\mathrm{C}}-k_{\mathrm{f}})$$

$$\times\frac{d^3k_{\mathrm{C}}}{(2\pi)^3(2E_{\mathrm{C}})}\prod_{\mathrm{f}}\frac{d^3k_{\mathrm{f}}}{(2\pi)^3(2E_{\mathrm{f}})}, \tag{6}$$

$$d\sigma^{(\mathrm{b})}(\mathrm{B+D\to F})=g^2\frac{|V_{\mathrm{B+D\to f}}|^2}{(8E_{\mathrm{B}}E_{\mathrm{D}})}(2\pi)^4\delta^{(4)}(k_{\mathrm{B}}+k_{\mathrm{D}}-k_{\mathrm{f}})\prod_{\mathrm{f}}\frac{d^3k_{\mathrm{f}}}{(2\pi)^3(2E_{\mathrm{f}})} \tag{7}$$

を得る。(3),(6),(7) より

$$d\mathcal{P}_{\mathrm{BA}}(z, Q^2)=\frac{E_{\mathrm{B}}}{E_{\mathrm{A}}}\frac{g^2|V_{\mathrm{A\to B+C}}|^2}{(2E_{\mathrm{B}})^2(E_{\mathrm{B}}+E_{\mathrm{C}}-E_{\mathrm{A}})^2}\frac{d^3k_{\mathrm{C}}}{(2\pi)^3(2E_{\mathrm{C}})} \tag{8}$$

が導かれる。各粒子のエネルギー・運動量を次のようにとって，いわゆる $P=\infty$ 系で (8) を計算しよう：

$$k_{\mathrm{A}}=(P\,;\vec{0},\,P),$$

$$k_{\mathrm{B}}=([(zP)^2+p_\perp{}^2]^{1/2}\,;\vec{p}_\perp,\,zP)\simeq\left(zP+\frac{p_\perp{}^2}{2zP}\,;\vec{p}_\perp,\,zP\right),$$

$$k_{\mathrm{C}}=([(1-z)^2P^2+p_\perp{}^2]^{1/2}\,;-\vec{p}_\perp,\,(1-z)P)\simeq\left((1-z)P+\frac{p_\perp{}^2}{2(1-z)P}\,;+\vec{p}_\perp,\,(1-z)P\right).$$

ここで $P,\vec{p}_\perp$ はそれぞれ粒子 A の運動量の z 成分 (進行方向成分)，粒子 B の横運動量で，質量はすべて無視した。容易にわかるように

$$(2E_{\mathrm{B}})^2(E_{\mathrm{B}}+E_{\mathrm{C}}-E_{\mathrm{A}})\simeq\frac{(p_\perp{}^2)^2}{(1-z)^2},\qquad\frac{d^3k_{\mathrm{C}}}{(2\pi)^3(2E_{\mathrm{C}})}\simeq\frac{dzdp_\perp{}^2}{16\pi^2(1-z)}$$

であるから，終状態のスピンにつき和をとり，始状態のスピンについて平均すれば

$$d\mathcal{P}_{\rm BA}(z,Q^2)\simeq\frac{zP\left(1+\dfrac{p_\perp{}^2}{2z^2P^2}\right)}{P}\,\frac{(1-z)^2}{(p_\perp{}^2)^2}g^2\sum_{\rm spin}|V_{\rm A\to B+C}|^2\frac{dz\,dp_\perp{}^2}{16\pi^2(1-z)}$$
$$=\frac{\alpha_s}{2\pi}\,\frac{z(1-z)}{2}\sum_{\rm spin}\frac{|V_{\rm A\to B+C}|^2}{p_\perp{}^2}d(\log p_\perp{}^2),$$

すなわち

$$d\mathcal{P}_{\rm BA}(z,Q^2)=\frac{\alpha_s}{2\pi}\,\frac{z(1-z)}{2}\sum_{\rm spin}\frac{|V_{\rm A\to B+C}|^2}{p_\perp{}^2}d(\log p_\perp{}^2) \tag{9}$$

を得る。ここで $\alpha_s=g^2/4\pi$ である。粒子 B の仮想質量を $-Q^2$ とすれば，$p_\perp{}^2$ の上限は Q^2 の程度であるから，leading-log 近似では $dp_\perp{}^2\simeq d(\log Q^2/\mu^2)$ としてよい。したがって，(1) から分岐関数 $P_{\rm BA}(z)$ が次のように求められる：

$$P_{\rm BA}(z)=\frac{1}{2}z(1-z)\sum_{\rm spin}\frac{|V_{\rm A\to B+C}|^2}{p_\perp{}^2}. \qquad (z<1) \tag{10}$$

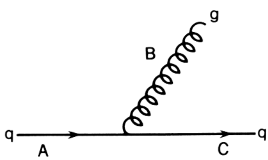
この形から，$P_{\rm BA}(z)$ はバーテックス ABC のみに依存すること，スピンの和が対称ならば，運動量保存によって

$$P_{\rm CA}(z)=P_{\rm BA}(1-z) \tag{11}$$

が成り立つことがわかる。

（1） $P_{\rm gq}(z)$， $P_{\rm qq}(z)$

$$\sum_{\rm spin}|V_{\rm q\to g+q}|^2=\frac{1}{2}C_2(R)\,{\rm Tr}(\not k_{\rm C}\gamma_\mu\not k_{\rm A}\gamma_\nu)\sum_{\rm pol}\varepsilon^{*\mu}\varepsilon^\nu.$$



ここで

$$C_2(R)=\frac{1}{N}\sum_a t^at^a=\frac{N^2-1}{2N}:\quad \text{カラー } SU(N) \text{ 群}$$

$$\sum_{\rm pol}\varepsilon^{*\mu}\varepsilon^\nu\to\delta^{ij}-\frac{k_{\rm B}{}^ik_{\rm B}{}^j}{k_{\rm B}{}^2}\qquad (i,j=1,2,3)$$
$$\to 0 \qquad (\mu,\nu \text{ の一方または両方が } 0)$$

である。

$$\frac{1}{4}{\rm Tr}(\not k_{\rm C}\gamma_\mu\not k_{\rm A}\gamma_\nu)\sum_{\rm pol.}\varepsilon^{*\mu}\varepsilon^\nu=[k_{{\rm C}i}k_{{\rm A}j}+k_{{\rm C}j}k_{{\rm A}i}+\delta_{ij}(k_{\rm A}\cdot k_{\rm C})]\left[\delta^{ij}-\frac{k_{\rm B}{}^ik_{\rm B}{}^j}{k_{\rm B}{}^2}\right]$$
$$=2(\vec k_{\rm A}\cdot\vec k_{\rm C})+3(k_{\rm A}\cdot k_{\rm C})-2\frac{(\vec k_{\rm B}\cdot\vec k_{\rm C})(\vec k_{\rm A}\cdot\vec k_{\rm B})}{k_{\rm B}{}^2}-(k_{\rm A}\cdot k_{\rm C})$$
$$=2(\vec k_{\rm A}\cdot\vec k_{\rm C})+2(k_{\rm A}\cdot k_{\rm C})-\frac{2(\vec k_{\rm B}\cdot\vec k_{\rm C})(\vec k_{\rm A}\cdot\vec k_{\rm B})}{k_{\rm B}{}^2}$$
$$=2\left[(E_{\rm A}E_{\rm C})-\frac{(\vec k_{\rm B}\cdot\vec k_{\rm C})(\vec k_{\rm A}\cdot\vec k_{\rm B})}{k_{\rm B}{}^2}\right]=2\left[(1-z)P^2+\frac{p_\perp{}^2}{2(1-z)}-\frac{(z(1-z)P^2-p_\perp{}^2)zP^2}{p_\perp{}^2+(zP)^2}\right]$$
$$=2P^2\left[1-z+\frac{p_\perp{}^2}{2(1-z)P^2}-\frac{(1-z)}{(1+p_\perp{}^2/z^2P^2)}+\frac{p_\perp{}^2}{zP^2(1+p_\perp{}^2/z^2P^2)}\right]$$
$$\simeq 2\left[\frac{1}{2(1-z)}+\frac{1-z}{z^2}+\frac{1}{z}\right]p_\perp{}^2=\left[\frac{z^2+2(1-z)^2+2z(1-z)}{z^2(1-z)}\right]p_\perp{}^2$$
$$\simeq\left[\frac{1+(1-z)^2}{z^2(1-z)}\right]p_\perp{}^2.$$

$N=3$ とすれば $C_2(R)=4/3$ だから

$$\sum_{\rm spin}|V_{\rm q\to g+q}|^2=\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3}\times 4\cdot\frac{1+(1-z)^2}{z^2(1-z)}p_\perp{}^2=\frac{4}{3}\left(\frac{1+(1-z)^2}{z^2(1-z)}\right)p_\perp{}^2,$$

(10) に代入して

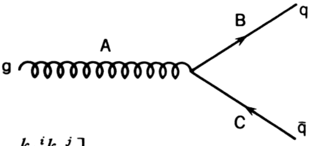
$$P_{\rm gq}(z)=\frac{4}{3}\,\frac{1+(1-z)^2}{z} \tag{12}$$

を得る。(11) と (12) から

$$P_{qq}(z)=\frac{4}{3}\,\frac{1+z^2}{1-z} \qquad (z<1) \tag{13}$$

が得られる。

(２) $\underline{P_{qg}(z)}$



$$\frac{1}{8}\sum_{c=1}^{8}\sum_{i=1}^{3}(t^c t^c)_{ii}=\frac{1}{2}$$

$$\overline{\sum_{\text{spin}}}|V_{g\to q+\bar{q}}|^2=\frac{1}{2}\mathrm{Tr}|\not{k}_C\gamma_\mu\not{k}_B\gamma_\nu)\frac{1}{2}\sum_{\text{pol.}}\varepsilon^{*\mu}\varepsilon^{\nu},$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{Tr}(\not{k}_C\gamma_\mu\not{k}_B\gamma_\nu)\sum_{\text{pol.}}\varepsilon^{*\mu}\varepsilon^{\nu}&=4[k_{Ci}k_{Bi}+k_{Cj}k_{Bi}+\delta_{ij}(k_B\cdot k_C)]\left[\delta^{ij}-\frac{k_A{}^i k_A{}^j}{k_A{}^2}\right]\\
&=4\left[2(\vec{k}_B\cdot\vec{k}_C)+3(k_B\cdot k_C)-\frac{(\vec{k}_A\cdot\vec{k}_C)(\vec{k}_A\cdot\vec{k}_B)}{k_A{}^2}-(k_B\cdot k_C)\right]\\
&=4\left[2(\vec{k}_B\cdot\vec{k}_C)+2(k_B\cdot k_C)-\frac{(\vec{k}_A\cdot\vec{k}_C)(\vec{k}_A\cdot\vec{k}_B)}{k_A{}^2}\right]\\
&=4\left[2E_BE_C-\frac{(1-z)zP^4}{P^2}\right]=4\left[\left(zP+\frac{p_\perp{}^2}{2zP}\right)\left((1-z)P+\frac{p_\perp{}^2}{2(1-z)P}\right)-z(1-z)P^2\right]\\
&\simeq 4\left[z(1-z)P^2+\frac{z}{2(1-z)}p_\perp{}^2+\frac{1-z}{2z}p_\perp{}^2-z(1-z)P^2\right]\\
&=2\left[\frac{z}{1-z}+\frac{1-z}{z}\right]p_\perp{}^2,
\end{aligned}$$

$$\therefore\quad P_{qg}(z)=\frac{1}{2}z(1-z)\left[\frac{z}{1-z}+\frac{1-z}{z}\right]=\frac{1}{2}\left[z^2+(1-z)^2\right].$$

すなわち

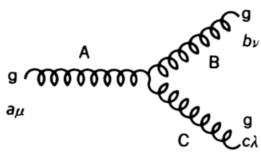
$$P_{qg}(z)=[z^2+(1-z)^2]/2, \tag{14}$$

つまり，対称性

$$P_{qg}(z)=P_{\bar{q}g}(z)=P_{qg}(1-z) \tag{15}$$

が成り立つことがわかる。

(３) $\underline{P_{gg}(z)}$



3 グルーオンのバーテックスは

$$-igf_{abc}[g_{\nu\mu}(k_A+k_B)_\lambda-g_{\mu\lambda}(k_C+k_A)_\nu+g_{\lambda\nu}(k_C-k_B)_\mu]$$

で表されるから

$$\begin{aligned}
V_{g\to g+g}=-f_{abc}\{&[(k_A+k_C)\cdot\varepsilon_B{}^{*b}](\varepsilon_A{}^a\cdot\varepsilon_C{}^{c*})+[(k_C-k_B)\cdot\varepsilon_A{}^a](\varepsilon_B{}^{b*}\cdot\varepsilon_C{}^{c*})\\
&+[(k_A+k_B)\cdot\varepsilon_C{}^{c*}](\varepsilon_A{}^a\cdot\varepsilon_A{}^{b*})\}
\end{aligned}$$

である。したがって

$$\overline{\sum_{\text{spin}}}|V_{g\to g+g}|^2=4C_2(G)\frac{p_\perp{}^2}{z(1-z)}\left[\frac{1-z}{z}+\frac{z}{1-z}+z(1-z)\right] \qquad (z<1)$$

が得られる。ここに

$$\delta_{ab}C_2(G)=\sum_{c,d=1}^{8}f_{acd}f_{bcd}$$

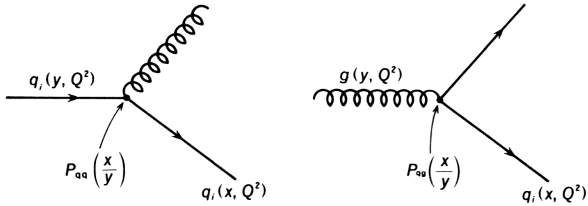
である。(10) に代入して $C_2(G)=3$ を用いれば

$$P_{gg}(z)=6\left[\frac{1-z}{z}+\frac{z}{1-z}+z(1-z)\right] \qquad (z<1) \tag{16}$$

を得る。

10.11*

$$\frac{d}{d\log Q^2}\left(\xrightarrow{q_i(x,\,Q^2)}\right)=$$



$$\frac{dq_i(x,\,Q^2)}{d\log Q^2}=\frac{\alpha_s}{2\pi}\int_x^1\frac{dy}{y}\left\{q_i(y,\,Q^2)\,P_{qq}\!\left(\frac{x}{y}\right)+g(y,\,Q^2)\,P_{qg}\!\left(\frac{x}{y}\right)\right\}.$$

10.12 (10.42) で，q_i と q_j に関する発展方程式の差をとると，第 2 項のグルーオンの項は相殺して，$q_{NS}\equiv q_i-q_j$ に対する発展方程式は次のようになる：

$$\frac{dq_{NS}(x,\,Q^2)}{d\log Q^2}=\frac{\alpha_s}{2\pi}\int_x^1\frac{dy}{y}q_{NS}(y,\,Q^2)\,P_{qq}\!\left(\frac{x}{y}\right).$$

$q_s\equiv\sum_i q_i$ とすれば (10.42), (10.44) より，フレーバー数を n_f とすれば，$q_s(x,\,Q^2)$ と $g(x,\,Q^2)$ に対する連立方程式を得る：

$$\frac{d}{d\log Q^2}\begin{pmatrix}q_s(x,\,Q^2)\\ g(x,\,Q^2)\end{pmatrix}=\frac{\alpha_s}{2\pi}\int_x^1\frac{dy}{y}\begin{pmatrix}P_{qq} & 2n_fP_{qg}\\ P_{gq} & P_{gg}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}q_s(y,\,Q^2)\\ g(y,\,Q^2)\end{pmatrix}.$$

10.13* $z<1$ に対しては (10.31) が成り立つが，$P_{qq}(z)$ にはクォーク状態が変化しない $z=1$ における寄与が $\delta(1-z)$ として加わるから，その係数を c とする。そこで

$$P_{qq}(z)=\frac{4}{3}\,\frac{1+z^2}{1-z}+c\delta(1-z)$$

が

$$\int_0^1 P_{qq}(z)\,dz=0$$

を満足するように第 1 項を (10.52) の処方で正則化して係数 c を決定する。すなわち

$$\frac{4}{3}\int_0^1 dz\frac{1+z^2-(1+1)}{1-z}+c\int_0^1\delta(1-z)=0,$$

$$\therefore\quad c=\frac{4}{3}\int_0^1(z+1)\,dz=\frac{4}{3}\left(\frac{1}{2}+1\right)=2,$$

$$\therefore\quad P_{qq}(z)=\frac{4}{3}\,\frac{1+z^2}{(1-z)_+}+2\delta(1-z).$$

10.14* パートン模型によれば，陽子内クォークを u, d, s として，グルーオンの担う運動量比を ε_g とすれば，(9.37) により

$$\int_0^1 dz\,z(\mathrm{u}(z)+\bar{\mathrm{u}}(z)+\mathrm{d}(z)+\bar{\mathrm{d}}(z)+\mathrm{s}(z)+\bar{\mathrm{s}}(z))=1-\varepsilon_g$$

であった。グルーオンの分布関数を $g(z)$ と書けば，運動量保存則は

$$\int_0^1 dz\,z(\mathrm{u}(z)+\bar{\mathrm{u}}(z)+\mathrm{d}(z)+\bar{\mathrm{d}}(z)+\mathrm{s}(z)+\bar{\mathrm{s}}(z)+\mathrm{g}(z))=1 \qquad (1)$$

と書いてよいだろう。したがって，分布関数が z のみならず Q^2 にも依存するようになった場合の運動量保存則も，クォーク，反クォークおよびグルーオン全部で陽子の運動量を担っていることを表現している

$$\int_0^1 dz\, z(q_s(z, Q^2)+g(z, Q^2))=1 \tag{2}$$

により表される。ここで $q_s(z, Q^2)=\sum_{i=1}^{n_f}(q_i(z, Q^2)+\bar{q}_i(z, Q^2))$ である。

しかし，(1) が成り立つとき，(2) も自明というわけではない。まず，(2) が如何なる Q^2 に対しても成り立つためには

$$\frac{d}{d\log Q^2}\int_0^1 dz\, z(q_s(z, Q^2)+g(z, Q^2))=0 \tag{3}$$

でなければならない。実際，モーメント：

$$\begin{aligned} q_s{}^{(n)}(Q^2)&=\int_0^1 z^{n-1}q_s(z, Q^2)\,dz,\\ g^{(n)}(Q^2)&=\int_0^1 z^{n-1}g(z, Q^2)\,dz \end{aligned} \tag{4}$$

をとれば，(3) の被積分関数は $n=2$ の場合に相当し，$n=2$ の異常次元 $\gamma_2=0$ により，それは Q^2 に依存しないことが証明できる。したがって，(1) と同じ意味で (2) を運動量保存則と考えてよい。

ところで，(2) は分岐関数 P_{qq} などに対する重要な拘束条件を与えるのである。Altarelli-Parisi 方程式を (4) のモーメントに対して書けば

$$\frac{dq_s{}^{(n)}(Q^2)}{d\log Q^2}=\frac{\alpha_s}{2\pi}\left[A_{qq}{}^{(n)}q_s{}^{(n)}(Q^2)+2n_f A_{qg}{}^{(n)}g^{(n)}(Q^2)\right], \tag{5}$$

$$\frac{dg^{(n)}(Q^2)}{d\log Q^2}=\frac{\alpha_s}{2\pi}\left[A_{gq}{}^{(n)}q_s{}^{(n)}(Q^2)+A_{gg}{}^{(n)}g^{(n)}(Q^2)\right] \tag{6}$$

ただし

$$A_{ij}{}^{(n)}=\int_0^1 dz\, z^{n-1}P_{ij}(z) \tag{7}$$

であり，n_f はフレーバー数である。

(5) と (6) を加え，$n=2$ として (3) を使えば

$$\int_0^1 dz\, z[P_{qq}(z)+P_{gq}(z)]q_s{}^{(2)}(Q^2)+\int_0^1 dz\, z[2n_f P_{qg}(z)+P_{gg}(z)]g^{(2)}(Q^2)=0$$

となる。$q_s{}^{(2)}(Q^2)$ および $g^{(2)}(Q^2)$ の係数がそれぞれ 0 でなくてはならないから，分岐関数に対する拘束条件として

$$\int_0^1 dz\, z[P_{qq}(z)+P_{gq}(z)]=0, \tag{8}$$

$$\int_0^1 dz\, z[2n_f P_{qg}(z)+P_{gg}(z)]=0 \tag{9}$$

を得る。

$P_{gg}(z)$ の δ 関数の係数を c とすれば，(10.41) により

$$P_{qg}(z)=[z^2+(1-z)^2]/2$$

であるから，(9) を用いて

$$\int_0^1 dz\, z\left[2n_f\cdot\frac{1}{2}\{z^2+(1-z)^2\}+6\left\{\frac{1-z}{z}+\frac{z}{(1-z)_+}+z(1-z)\right\}+c\delta(1-z)\right]=0,$$

すなわち

$$c=-n_f\int_0^1 z(1-2z+2z^2)\,dz-6\int_0^1\left(1-z+\frac{z^2-1}{1-z}+z^2-z^3\right)dz=-\frac{n_f}{3}+\frac{11}{2}.$$

すなわち

$$P_{gg}(z)=6\left(\frac{1-z}{z}+\frac{z}{(1-z)_+}+z(1-z)\right)+\left(\frac{11}{2}-\frac{n_f}{3}\right)\delta(1-z)$$

となり，(10.55) を得る。

10.15 クォーク・グルーオンバーテックスにおいて，クォークが運動量比 z を持っていれば，運動量保存によりグルーオンの運動量比は $1-z$ である。したがって分岐関数 P_{qq}, P_{gq} に対して，$z<1$ ならば

$$P_{qq}(z)=P_{gq}(1-z) \tag{1}$$

が成り立つ。同様にして $z<1$ の場合

$$P_{qg}(z)=P_{qg}(1-z), \tag{2}$$

$$P_{gg}(z)=P_{gg}(1-z) \tag{3}$$

が成り立つことがわかる。

具体的な形については，$z<1$ に注意すれば (1) は (10.45) と (10.53)，(2) は (10.41)，(3) は (10.55) から明らかである。

10.16* (10.37) の両辺に x^{n-1} を掛けて x で積分すれば，$x=zy$ を用いて

$$\frac{d}{d\log Q^2}\int_0^1 x^{n-1}q(x)\,dx=\frac{\alpha_s}{2\pi}\int_0^1 y^{n-1}q(y)\,dy\int_0^1 z^{n-1}P_{qq}(z)\,dz$$

を得る。$q(x)$ の n 次のモーメントを M_n と書けば，$\alpha_s=c/\log Q^2$ であるから，

$$\frac{d}{d\log Q^2}M_n=\frac{A_n}{\log Q^2}M_n \qquad \left(A_n=\frac{c}{2\pi}\int_0^1 z^{n-1}P_{qq}(z)\,dz\right)$$

となり，その解は

$$M_n\sim(\log Q^2)^{A_n}$$

である。すなわち

$$\frac{\displaystyle\int_0^1 x^{n-1}q(x,Q^2)\,dx}{\displaystyle\int_0^1 x^{n-1}q(x,Q_0{}^2)\,dx}=\left(\frac{\log Q^2}{\log Q_0{}^2}\right)^{A_n}.$$

(10.53) により

$$A_n=\frac{c}{2\pi}\int_0^1 x^{n-1}P_{qq}(x)\,dx=\frac{c}{2\pi}\,\frac{4}{3}\int_0^1\left[\frac{1+x^2}{(1-x)_+}x^{n-1}+\frac{3}{2}x^{n-1}\delta(1-x)\right]dx$$

$$=\frac{c}{2\pi}\cdot\frac{4}{3}\left[\frac{3}{2}+\int_0^1 dx\frac{x^{n-1}+x^{n+1}-2}{1-x}\right]=\frac{c}{2\pi}\,\frac{4}{3}\left[\frac{3}{2}+\int_0^1 dx\frac{(x^{n-1}-1)+(x^{n+1}-1)}{1-x}\right].$$

ここで $\displaystyle\int_0^1 dx\frac{x^{n-1}-1}{1-x}=-\sum_{j=0}^{n-1}\int_0^1 dx x^j=-\sum_{j=1}^{n-1}\frac{1}{j}$ を用いて

$$A_n=\frac{c}{2\pi}\frac{4}{3}\left[-\frac{1}{2}+\frac{1}{n(n+1)}-2\sum_{j=2}^{n}\frac{1}{j}\right].$$

11.1 $\displaystyle\langle z\rangle=\int_0^1 zD_q{}^h(z)\,dz=N\int_0^1(1-z)^n dz=\frac{N}{n+1}$ であるから，$N=(n+1)\langle z\rangle$.

$\displaystyle n_h=\sum_q\int_{z_{min}}^1[D_q{}^h(z)+D_{\bar{q}}{}^h(z)]dz$ で与えられるから，生成されるハドロンの質量を m_h とすれば，$z_{mim}=2m_h/Q$ を用いて

$$n_h\propto N\int_{2m_h/Q}^1\frac{(1-z)^n}{z}dz$$

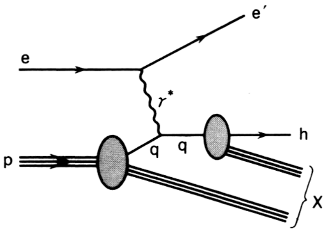
と書くことができるが，積分に効くのは $z\ll1$ だから

$$n_h\propto N\int_{2m_h/Q}^1\frac{dz}{z}\propto N\log\left(\frac{2m_h}{Q}\right)+\cdots$$

となる。省略した … は Q とともに大きくならない項である。

11.2*

$$N_{\mathrm{ep}}{}^{\mathrm{h}}(\mathrm{ep}\to\mathrm{e}'\mathrm{hX})=\frac{\sigma^{\mathrm{h}}(\mathrm{ep}\to\mathrm{e}'\mathrm{hX})}{\sigma_{\mathrm{tot}}(\mathrm{ep}\to\mathrm{e}'\mathrm{X})}$$



とすれば

$$\sigma^{\mathrm{h}}(\mathrm{ep}\to\mathrm{e}'\mathrm{hX})=\sum_{\mathrm{q}}f_{\mathrm{q}}(x)\,\sigma(\gamma^*\mathrm{q}\to\mathrm{q})\,D_{\mathrm{q}}{}^{\mathrm{h}}(z)$$
$$\propto\sum_{\mathrm{q}}e_{\mathrm{q}}{}^2f_{\mathrm{q}}(x)\,D_{\mathrm{q}}{}^{\mathrm{h}}(z),$$
$$\sigma_{\mathrm{tot}}(\mathrm{ep}\to\mathrm{e}'\mathrm{X})=\sum_{\mathrm{q}}f_{\mathrm{q}}(x)\,\sigma(\gamma^*\mathrm{q}\to\mathrm{q})$$
$$\propto\sum_{\mathrm{q}}e_{\mathrm{q}}{}^2f_{\mathrm{q}}(x).$$

ここで第2式から第3式に移るときの比例定数は両式で共通である。そこで $N_{\mathrm{ep}}{}^{\mathrm{h}}(\mathrm{ep}\to\mathrm{e}'\mathrm{pX})\equiv(1/\sigma)(d\sigma(\mathrm{ep}\to\mathrm{e}'\mathrm{hX})/dz)$ と定義すれば,

$$\frac{1}{\sigma}\frac{d\sigma(\mathrm{ep}\to\mathrm{e}'\mathrm{hX})}{dz}=\frac{\sum_{\mathrm{q}}e_{\mathrm{q}}{}^2f_{\mathrm{q}}(x)\,D_{\mathrm{q}}{}^{\mathrm{h}}(z)}{\sum_{\mathrm{q}}e_{\mathrm{q}}{}^2f_{\mathrm{q}}(x)}$$

を得る。この式は,陽子内クォーク q が仮想光子でたたかれる確率が $e_{\mathrm{q}}{}^2f_{\mathrm{q}}(x)/\sum_{\mathrm{q}}e_{\mathrm{q}}{}^2f_{\mathrm{q}}(x)$ であるから,このクォークがハドロン化する確率 $D_{\mathrm{q}}{}^{\mathrm{h}}(z)$ を乗じて(独立事象),陽子内のすべてのクォークにつき加えたものと解釈することができる。

11.3* 荷電共役不変性により

$$D_{\mathrm{u}}{}^{\pi^+}=D_{\bar{\mathrm{u}}}{}^{\pi^-},\qquad D_{\mathrm{d}}{}^{\pi^-}=D_{\bar{\mathrm{d}}}{}^{\pi^+}.$$

アイソスピン不変性により

$$D_{\mathrm{u}}{}^{\pi^+}=D_{\mathrm{d}}{}^{\pi^-},\qquad D_{\bar{\mathrm{u}}}{}^{\pi^-}=D_{\bar{\mathrm{d}}}{}^{\pi^+}$$

が成り立つから

$$D_{\mathrm{u}}{}^{\pi^+}=D_{\bar{\mathrm{u}}}{}^{\pi^-}=D_{\mathrm{d}}{}^{\pi^-}=D_{\bar{\mathrm{d}}}{}^{\pi^+}.$$

同様にして

$$D_{\mathrm{u}}{}^{\pi^-}=D_{\bar{\mathrm{u}}}{}^{\pi^+}=D_{\mathrm{d}}{}^{\pi^+}=D_{\bar{\mathrm{d}}}{}^{\pi^-}.$$

s はアイソスピン1重項で $s=\bar{s}$ だから,荷電共役不変性により

$$D_{\mathrm{s}}{}^{\pi^+}=D_{\mathrm{s}}{}^{\pi^-}$$

である。

11.4*

$$N_{\mathrm{p}}{}^{\pi^+}(z)=\frac{1}{\sigma}\frac{d\sigma(\mathrm{ep}\to\pi^+\mathrm{X})}{dz}$$
$$=\frac{\frac{4}{9}[u(x)D_{\mathrm{u}}{}^{\pi^+}(z)+\bar{u}(x)D_{\bar{\mathrm{u}}}{}^{\pi^+}(z)]+\frac{1}{9}[d(x)D_{\mathrm{d}}{}^{\pi^+}(z)+\bar{d}(x)D_{\bar{\mathrm{d}}}{}^{\pi^+}(z)]}{\frac{4}{9}[u(x)+\bar{u}(x)]+\frac{1}{9}[d(x)+\bar{d}(x)]+\frac{1}{9}[s(x)+\bar{s}(x)]}$$
$$+\frac{\frac{1}{9}[s(x)D_{\mathrm{s}}{}^{\pi^+}(z)+\bar{s}(x)D_{\bar{\mathrm{s}}}{}^{\pi^+}(z)]}{\frac{4}{9}[u(x)+\bar{u}(x)]+\frac{1}{9}[d(x)+\bar{d}(x)]+\frac{1}{9}[s(x)+\bar{s}(x)]}$$

$$N_{\mathrm{p}}{}^{\pi^-}(z)=$$
$$\frac{\frac{4}{9}[u(x)D_{\bar{\mathrm{u}}}{}^{\pi^-}(z)+\bar{u}(x)D_{\bar{\mathrm{u}}}{}^{\pi^-}(z)]+\frac{1}{9}[d(x)D_{\mathrm{d}}{}^{\pi^-}(z)+\bar{d}(x)D_{\bar{\mathrm{d}}}{}^{\pi^-}(z)]+\frac{1}{9}[s(x)D_{\mathrm{s}}{}^{\pi^-}(z)+\bar{s}(x)D_{\bar{\mathrm{s}}}{}^{\pi^-}(z)]}{\frac{4}{9}[u(x)+\bar{u}(x)]+\frac{1}{9}[d(x)+\bar{d}(x)]+\frac{1}{9}[s(x)+\bar{s}(x)]},$$

$$N_p^{\pi^+}(z)-N_p^{\pi^-}(z)=\frac{[D_u^{\pi^+}(z)-D_u^{\pi^-}(z)]\left[\frac{4}{9}(u(x)-\bar{u}(x))-\frac{1}{9}(d(x)-\bar{d}(x))\right]}{\frac{4}{9}[u(x)+\bar{u}(x)]+\frac{1}{9}[d(x)+\bar{d}(x)]+\frac{1}{9}[s(x)+\bar{s}(x)]},$$

$$\int_0^1 dz\int_0^1\frac{dx}{x}F_2^{\text{ep}}(x)[N_p^{\pi^+}(z)-N_p^{\pi^-}(z)]=$$

$$\int dz[D_u^{\pi^+}(z)-D_u^{\pi^-}(z)]\int_0^1\left[\frac{4}{9}(u(x)-\bar{u}(x))-\frac{1}{9}(d(x)-\bar{d}(x))\right]dx$$

$$=\frac{7}{9}\int_0^1 dz[D_u^{\pi^+}(z)-D_u^{\pi^-}(z)].$$

同様にして

$$\int_0^1 dz\int_0^1\frac{dx}{x}F_2^{\text{en}}(x)[N_n^{\pi^+}(z)-N_n^{\pi^-}(z)]=\frac{2}{9}\int_0^1 dz[D_u^{\pi^+}(z)-D_u^{\pi^-}(z)],$$

$$\therefore\quad \int_0^1 dz[N_n^{\pi^+}(z)-N_n^{\pi^-}(z)\Big/\int_0^1[N_p^{\pi^+}(z)-N_p^{\pi^-}(z)]dz=\frac{2}{7}.$$

11.5 (11.18) の $x_{\bar{q}}^2-x_T^2-x_L^2=0$ と $x_g^2-x_T^2-(x_L-x_q)^2=0$ を引き算すれば

$$x_{\bar{q}}^2+x_q^2-x_g^2=2x_Lx_q$$

を得る。2 乗して (11.18) の第 1 式を用いて x_L^2 を消去すれば

$$\begin{aligned}4x_q^2x_T^2&=4x_q^2x_{\bar{q}}^2-(x_{\bar{q}}^2+x_q^2-x_g^2)^2\\&=[(x_q+x_{\bar{q}})^2-x_g^2][x_g^2-(x_q-x_{\bar{q}})^2]\\&=16(1-x_q)(1-x_{\bar{q}})(1-x_g).\end{aligned}$$

第 2 式および第 3 式への変形は $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$ を用い，(11.17) も利用した。(11.20) を得るには，図 11·7 を参照して $x_{\bar{q}}\sin\theta=x_T$ に注意する。これを 2 乗して上式に代入し，(11.19) と (11.17) を用いれば

$$\begin{aligned}\frac{1}{4}x_q^2x_{\bar{q}}^2\sin^2\theta&=(1-x_q)(1-x_{\bar{q}})(x_q+x_{\bar{q}}-1)\\&=-(1-x_q-x_{\bar{q}}+x_qx_{\bar{q}}/2)^2+x_q^2x_{\bar{q}}^2/4\end{aligned}$$

となる。$1-\sin^2\theta=\cos^2\theta$ を用いて

$$1-x_q-x_{\bar{q}}+x_qx_{\bar{q}}/2=(x_qx_{\bar{q}}\cos\theta)/2$$

を得，これから (11.20) の結果

$$x_{\bar{q}}=\frac{2(1-x_q)}{2-x_q-x_q\cos\theta}$$

に到達する。

11.6 θ があまり大きくなければ，$\sin\theta\simeq\theta$ だから $\theta\simeq 2p_T/Q=x_T$. (11.30) を θ で表せば

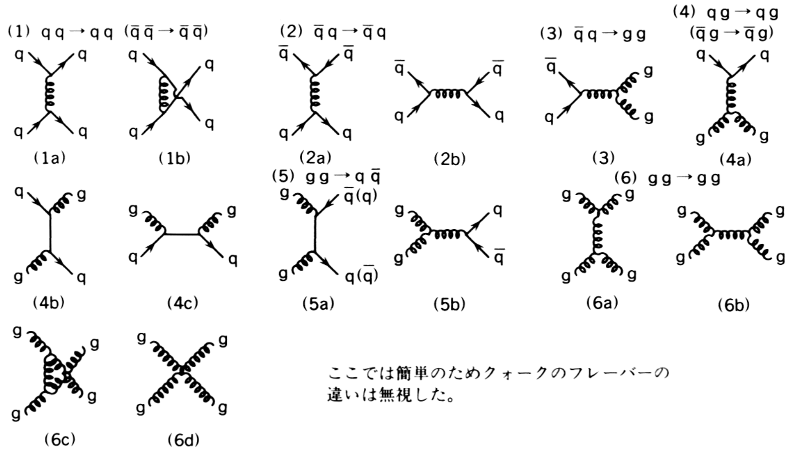
$$\begin{aligned}\frac{1}{\sigma}\frac{d\sigma}{dx_T^2}&\simeq\frac{1}{\sigma}\frac{d\sigma}{d\theta^2}=\frac{1}{\sigma}\frac{1}{2\theta}\frac{d\sigma}{d\theta}\\&\simeq\frac{4\alpha_s}{3\pi}\frac{1}{\theta^2}\log\left(\frac{1}{\theta^2}\right)\end{aligned}$$

より

$$\frac{1}{\sigma}\frac{d\sigma}{d\theta}\simeq\frac{8\alpha_s}{3\pi}\frac{1}{\theta}\log\left(\frac{1}{\theta^2}\right)$$

を得る。

11.7* ハドロン衝突で大横運動量ハドロン生成に寄与する素過程は次の通り。(4 c) が図 13·3 (c) である（詳細については，たとえば R.Cutler and D.Sivers, Phys. Rev. **D17** (1978) 196 参照)。



ここでは簡単のためクォークのフレーバーの違いは無視した。

たとえば pp→hX では，パートン素過程を $q_aq_b\to q_cq_d$ とすれば

$$E\frac{d\sigma}{d\boldsymbol{p}}(\mathrm{pp}\to\mathrm{hX})\sim\frac{1}{\pi}\sum_{\substack{a,b\\c,d}}\int dx_a dx_b f_{q_a}(x_a) f_{q_b}(x_b)\frac{dz}{z_c{}^2}D_{q_c}{}^{\mathrm{h}}(z_c)\left[\hat{s}\frac{d\sigma}{d\hat{t}}(q_aq_b\to q_cq_d)\right]\delta(\hat{s}+\hat{t}+\hat{u})$$

である。ここに $f_{q_a}(x)$ $(f_{q_b}(x))$ は陽子内のパートン q_a (q_b) の構造関数，x_a (x_b) は陽子に対するパートン q_a (q_b) の運動量比を表す。$D_c{}^{\mathrm{h}}(z_c)$ はパートン q_c のハドロン h への破砕化関数，z_c はハドロンのパートン c に対する運動量比である。

q が陽子内の価クォークならば，$f_q(x)$ は x の大きいところで大きな値を持つ。また，h が q_c を価クォークの 1 つとして含めば，$D_{z_c}{}^{\mathrm{h}}(z_c)$ は z_c の大きいところで大きな値を持つ。つまり，大横運動量には価クォークの寄与が重要である。pp→hX と p̄p→hX を比較すると，価パートン過程で，後者には前者にない $q\bar{q}\to gg$ が寄与する。したがって，たとえば p̄p→hX/pp→hX を $x_T=2p_T/\sqrt{s}$ に対する変化でみると，x_T の増加とともに 1 より大きくなっていくことが期待される。

11.8 原著者は Berman et al., Phys. Rev. **D4** (1971) 3388 をみよ，とだけ記しているので，同論文を参照して説明しておこう。

AB→ $l\bar{l}$X の Drell-Yan 過程は，(11.57)

$$\frac{d\sigma(\mathrm{pp}\to l\bar{l}\mathrm{X})}{d\Omega}=\frac{4\pi\alpha^2}{9Q^4}\sum_{\mathrm{q}} e_{\mathrm{q}}{}^2\int dx\int dy\, f_{\mathrm{q}}{}^{\mathrm{A}}(x) f_{\bar{\mathrm{q}}}{}^{\mathrm{B}}(y)\,\delta\left(1-y\frac{s}{Q^2}\right) \tag{1}$$

で与えられる。ここに $f_{\mathrm{q}}{}^{\mathrm{A}}$ $(f_{\bar{\mathrm{q}}}{}^{\mathrm{B}})$ はハドロン A (B) 内のクォーク（反クォーク）構造関数で，核子の深非弾性散乱の構造関数 $F_2{}^{\mathrm{p}}(x)$ を用いて求めることができる。9.3 節を参照して，価クォーク分布を $V(x)$，海クォーク分布を $S(x)$ と書けば，

$$\frac{F_2{}^{\mathrm{p}}(x)}{x}=V(x)+S(x) \tag{2}$$

であり，(9.27) により

$$\frac{F_2{}^{\mathrm{p}}(x)}{x}=\sum_{\mathrm{q}} e_{\mathrm{q}}{}^2(f_{\mathrm{q}}(x)+\bar{f}_{\mathrm{q}}(x))\equiv Q(x)+\overline{Q}(x) \tag{3}$$

とも書くことができる。海クォークは，クォーク・反クォーク対から作られているとすれば，

$$Q(x)=V(x)+\frac{1}{2}S(x),\qquad \overline{Q}(x)=\frac{1}{2}S(x) \tag{4}$$

である。$e_{\mathrm{u}}=2/3$，$e_{\mathrm{d}}=e_{\mathrm{s}}=-1/3$ を考慮すれば，陽子内クォークの構造関数は

$$\begin{aligned} f_{\mathrm{u}}{}^{\mathrm{p}}(x)&=\frac{8}{9}\mathrm{V}(x)+\frac{2}{3}\overline{\mathrm{Q}}=\frac{8}{9}V(x)+\frac{1}{3}S(x),\\ f_{\mathrm{d}}{}^{\mathrm{p}}(x)&=\frac{1}{9}V(x)+\frac{1}{6}\overline{Q}(x)=\frac{1}{9}V(x)+\frac{1}{12}S(x),\\ f_{\mathrm{s}}{}^{\mathrm{p}}(x)&=\frac{1}{6}\overline{Q}(x)=\frac{1}{12}S(x) \end{aligned} \tag{5}$$

となる。同様にして，陽子内の反クォークの構造関数は

$$\begin{aligned} f_{\bar{\mathrm{u}}}{}^{\mathrm{p}}(x)&=\frac{2}{3}\overline{Q}(x)=\frac{1}{3}S(x),\\ f_{\bar{\mathrm{d}}}{}^{\mathrm{p}}(x)&=\frac{1}{6}\overline{Q}(x)=\frac{1}{12}S(x),\\ f_{\bar{\mathrm{s}}}{}^{\mathrm{p}}(x)&=\frac{1}{6}\overline{Q}(x)=\frac{1}{12}S(x). \end{aligned} \tag{6}$$

$\mathrm{pp}\to l\bar{l}\mathrm{X}$ の場合には，(1) において $\mathrm{A=p}$, $\mathrm{B=p}$ であるから，$f_{\mathrm{q}}{}^{\mathrm{A}}(x)$ に (5) を，$f_{\bar{\mathrm{q}}}{}^{\mathrm{B}}(y)$ に (6) を代入したものと，x と y を入れ換えた $f_{\bar{\mathrm{q}}}{}^{\mathrm{A}}(x)$，$f_{\mathrm{q}}{}^{\mathrm{B}}(y)$ に，それぞれ (6) および (5) を代入したものを用いればよい。

$\mathrm{p\bar{p}}\to l\bar{l}\mathrm{X}$ の場合には，$\mathrm{A=p}$, $\mathrm{B=\bar{p}}$ とすれば，反陽子 $\mathrm{\bar{p}}$ の内部に反クォークが価クォークとして存在するので，$f_{\mathrm{q}}{}^{\mathrm{A}}(x)$，$f_{\bar{\mathrm{q}}}{}^{\mathrm{B}}(x)$ のいずれにも (5) を代入すればよい。$\pi^{\pm}\mathrm{p}\to l\bar{l}\mathrm{X}$ の場合には，$f_{\mathrm{q}}{}^{\mathrm{A}}(x)$ として陽子内 $\mathrm{d}(u)$，$f_{\bar{\mathrm{q}}}{}^{\mathrm{B}}(x)$ として $\pi^{\pm}$ 内 $\bar{\mathrm{d}}(\bar{u})$ の構造関数を (1) に用いればよい。

11.9　$Q^2/s\simeq 0$ のときは $x\simeq y\simeq 0$ で海クォークが大勢を決める。したがって $\pi^+\mathrm{C}$ と $\pi^-\mathrm{C}$ の間には大きな違いはない。$Q^2/s\simeq 1$ だと $x\simeq y\simeq 1$ で，価クォークが支配的になる。したがって，$f_{\bar{\mathrm{d}}}{}^{\pi^+}=f_{\bar{\mathrm{u}}}{}^{\pi^-}$ でアイソスカラーの C 標的内には同数の u と d が含まれているから

$$\frac{\sigma(\pi^+\mathrm{C})}{\sigma(\pi^-\mathrm{C})}=\frac{e_{\mathrm{d}}{}^2 f_{\bar{\mathrm{d}}}{}^{\pi^+}f_{\mathrm{d}}{}^{\mathrm{C}}}{e_{\mathrm{u}}{}^2 f_{\bar{\mathrm{u}}}{}^{\pi^-}f_{\mathrm{u}}{}^{\mathrm{C}}}=\frac{e_{\mathrm{d}}{}^2}{e_{\mathrm{u}}{}^2}=\frac{1}{4}$$

を得る。

11.10*　詳しくは F.Halzen and D.M.Scott, Phys. Rev. **D18** (1978) 3378 を参照して頂くとして，解答のあらましを示そう。

$O(\alpha^2\alpha_s)$ でレプトン対生成の断面積に寄与する，グルーオンの入った Feynman 図は次のようである：

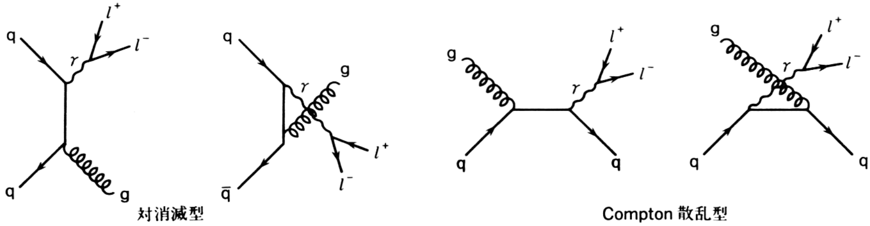


図 11·13 (e) は Compton 散乱型の過程である。図 11·14 にしたがって，入射陽子の 4 元運動量を p_1, p_2，仮想光子の 4 元運動量と質量をそれぞれ k, m ($k^2=m^2$) として

$$s=(p_1+p_2)^2, \qquad t=(p_1-k)^2, \qquad u=(p_2-k)^2$$

を定義する。素過程 $\mathrm{gq}\to\gamma\mathrm{q}$ の対応する変数は

$$\hat{s}=x_1x_2s, \qquad \hat{t}=x_1t+(1-x_1)m^2, \qquad \hat{u}=x_2u+(1-x_2)m^2$$

である。$\mathrm{pp}\to l^+l^-\mathrm{X}$ の断面積は

$$E\frac{d\sigma}{dm^2d\boldsymbol{k}}=\int dx_1\int dx_2 f_{\mathrm{g}}{}^B(x_1)f_{\mathrm{q}}{}^T(x_2)\frac{s}{\pi}\frac{d\hat{\sigma}}{dm^2d\hat{t}}(\hat{s},\hat{t},\hat{u})\delta[(x_1p_1+x_2p_2-k)^2]$$

となる。ここに $f_{\mathrm{g}}{}^B(x_1), f_{\mathrm{q}}{}^T(x_2)$ は，それぞれビーム陽子および標的陽子内のグルーオンおよびクォークの構造関数を表す。δ 関数を積分してしまうと

$$E\frac{d\sigma}{dm^2d\boldsymbol{k}}=\frac{s}{\pi}\int_{x_1{}^{\min}}^1 dx_1 f_{\mathrm{g}}{}^B(x_1)f_{\mathrm{q}}{}^T(x_2)\frac{x_1x_2}{x_1s+u-m^2}\frac{d\hat{\sigma}}{dm^2d\hat{t}}(\hat{s},\hat{t},\hat{u})$$

となる。ここに

$$x_2=\frac{-x_1t-(1-x_1)m^2}{x_1s+u-m^2}, \qquad x_1{}^{\min}=-\frac{u}{s+t-m^2}$$

である。

$$t=-m_T\sqrt{s}\,e^{-y}+m^2, \qquad u=-m_T\sqrt{s}\,e^{y}+m^2, \qquad m_T{}^2=m^2+k_T{}^2$$

を導入して

$$E\frac{d\sigma}{d\boldsymbol{p}}=\frac{1}{\pi}\frac{d\sigma}{dydk_T{}^2}$$

と書き換え

$$\frac{d\hat{\sigma}}{dm^2d\hat{t}}=\frac{\alpha^2\alpha_s}{9m^2}\frac{\hat{s}^2+\hat{u}^2+2m^2\hat{t}}{-\hat{s}^3\hat{u}}$$

を代入すれば

$$\frac{d\sigma}{dm^2dy}=\frac{4\pi\alpha^2}{9m^2s}\frac{\alpha_s}{2\pi}\ln\frac{m^2}{\mu^2}\int_{\tau^{1/2}e^y}^1\frac{dx_1}{x_1}f_{\mathrm{g}}{}^B(x_1)\frac{f_{\mathrm{q}}{}^T(x_2)}{x_2}\frac{(1-\tau_{12})^2+\tau_{12}{}^2}{2}$$

を得る。ここで $\ln(m^2/\mu^2)$ は $k^2{}_T$ の積分を μ で切断したために生じたものであり，$\tau_{12}=\tau/x_1x_2$，$\tau=m^2/s$ である。

12.1 $\pi^+\to\mu^+\nu_\mu$, $\mu^+\to e^+\nu_e\bar{\nu}_\mu$. 粒子と反粒子の寿命は等しいから，それぞれ寿命は (12.1) で与えられる。τ^- の主な崩壊様式は，$\tau^-\to e^-\bar{\nu}_e\nu_\tau$, $\mu^-\bar{\nu}_\mu\nu_\tau$, $\nu_\tau+$ハドロン である。ここで ν_τ は τ ニュートリノ と呼ばれ，e^- に対する ν_e, μ^- に対する ν_μ と同様に τ に付随するニュートリノである。レプトン数 L_e, L_μ, L_τ は e, μ, τ 別々に保存する。

12.2 (6.34) により $u=u_{\mathrm{L}}+u_{\mathrm{R}}\equiv(1-\gamma^5)u/2+(1+\gamma^5)u/2$ であるから

$$\begin{aligned}J^\mu&=\bar{u}_e\gamma^\mu\frac{1}{2}(1-\gamma^5)u_\nu\\&=\bar{u}_e\frac{1}{2}(1+\gamma^5)\gamma^\mu\frac{1}{2}(1-\gamma^5)u_\nu+\bar{u}_e\frac{1}{2}(1-\gamma^5)\gamma^\mu\frac{1}{2}(1-\gamma^5)u_\nu.\end{aligned}$$

第 2 項は $(1+\gamma^5)(1-\gamma^5)=0$ で落ちて

$$J^\mu=\bar{u}_e\frac{1}{2}(1+\gamma^5)\gamma^\mu\frac{1}{2}(1-\gamma^5)u_\nu=\bar{u}_{e\mathrm{L}}\gamma^\mu\frac{1}{2}(1-\gamma^5)u_\nu$$

となる。

問題 5.15 により，$v\simeq c$ の極限では γ^5 はヘリシティー演算子に対応するから，$u_{e\mathrm{L}}=(1-\gamma^5)u_e/2$ は負ヘリシティー電子に対応する。

12.3* 電子の質量を無視すればニュートリノ，電子ともにヘリシティー状態は $u_{L(R)}=(1/2)(1\mp\gamma^5)u$ である。したがって

$$J^\mu=\bar{u}_\nu\gamma^\mu(1/2)(1-\gamma^5)u_e \tag{12.12}$$

は，表6-2を参照して

(a) 左巻き電子 e_L^- が入ってきて，左巻きニュートリノ ν_L が出ていく過程 (e_L^-, ν_L) を表す。

(b) 右巻き反粒子のスピノール成分は，左巻き負エネルギー状態の粒子のスピノール成分に対応するから，右巻き反粒子の射影演算子も $(1-\gamma^5)/2$ になり，いつも $(1-\gamma^5)v/2$ の形が現れる。したがって，(12.12) は右巻き反ニュートリノ $\bar{\nu}_R$ が入ってきて右巻き陽電子 e_R^+ が出ていく過程 $(\bar{\nu}_R, e_R^+)$ を表す。

(c) 出ていく ν_L は入ってくる $\bar{\nu}_R$ と同じであり，入ってくる $\bar{\nu}_R$ は出ていく ν_L と同じであるから，$(0, \nu_L e_R^+)=(\bar{\nu}_R, e_R^+)$，$(e_L^-\bar{\nu}_R, 0)=(e_L^-, \nu_L)$ でそれぞれ (b), (a) に帰着される。すなわち (1) は，真空からの左巻きニュートリノ・右巻き陽電子対生成 $(0, \nu_L e_R^+)$ および，左巻き電子・右巻き反ニュートリノ対消滅 $(e_L^-\bar{\nu}_R, 0)$ も表している。

(12.12) のHermite共役をとれば

$$\begin{aligned}J^{\mu\dagger}&=[\bar{u}_\nu\gamma^\mu(1/2)(1-\gamma^5)u_e]^\dagger=[u_\nu^+\gamma^0\gamma^\mu(1/2)(1-\gamma^5)u_e]^\dagger\\&=u_e^+\gamma^0\gamma^0(1/2)(1-\gamma^5)\gamma^{\mu+}\gamma^0u_\nu=\bar{u}_e\gamma^0(1/2)(1-\gamma^5)\gamma^0\gamma^\mu u_\nu\\&=\bar{u}_e\gamma^\mu(1/2)(1-\gamma^5)u_\nu.\end{aligned} \tag{12.9}$$

すなわち電荷を下げる演算子 (12.9) は，電荷を上げる演算子のHermite共役である。$J^{\mu\dagger}$ に結合するレプトン対は，この問題の前半を参照して (ν_L, e_L^-)，$(e_R^+, \bar{\nu}_R)$，$(\nu_L e_R^+, 0)$，$(0, \bar{\nu}_R e_L^-)$ である。

12.4 ^{14}O および $^{14}N^*$ の $I=1$ 状態は，それぞれアイソスピン0の芯 ^{12}C の外の p, n でみれば $|pp\rangle$ および $(|np\rangle+|pn\rangle)/\sqrt{2}$ で表される。それぞれの陽子が崩壊することができるから $^{14}O\to{}^{14}N^*$ の振幅は $2\sqrt{1/2}$ を含む。

12.5 β 放射元素の寿命のデータから，どのようにして G を求めるかという議論の詳細は，たとえば，Källen (1964)，Gasiorowicz (1967)，あるいは Commins (1973) などの教科書を参照されたい。

$\tau^{-1}=G^2E_0^5/30\pi^3$ に $\tau=20/\log 2\,\mathrm{sec}$ と $E_0=2\,\mathrm{MeV}$ を代入して $G\simeq 0.9\times10^{-5}\,m_p^{-2}$

12.6 $G/\sqrt{2}=g^2/8M_W^2$ で $g=e$ とすれば，$M_W^2=\sqrt{2}\,e^2/8G\simeq(37.2\,\mathrm{GeV})^2$ を得る。第13章でやる標準模型によれば $g\sin\theta_W=e$ $(\sin^2\theta_W\simeq1/4)$ であるから，$M_W^2=2\times37.3\,\mathrm{GeV}=74.6\,\mathrm{GeV}$ となる。

12.7* (1) $\mathrm{Tr}(\gamma^\mu\not{p}_1\gamma^\nu\not{p}_2)=2p_1^\mu\mathrm{Tr}(\gamma^\nu\not{p}_2)-\mathrm{Tr}(\not{p}_1\gamma^\mu\gamma^\nu\not{p}_2)=2p_1^\mu\mathrm{Tr}(\gamma^\nu\not{p}_2)-2g^{\mu\nu}\mathrm{Tr}(\not{p}_1\not{p}_2)+\mathrm{Tr}(\not{p}_1\gamma^\nu\gamma^\mu\not{p}_2)=2p_1^\mu\mathrm{Tr}(\gamma^\nu\not{p}_2)-2g^{\mu\nu}\mathrm{Tr}(\not{p}_1\not{p}_2)+2p_2^\mu\mathrm{Tr}(\not{p}_1\gamma^\nu)-\mathrm{Tr}(\not{p}_1\gamma^\nu\not{p}_2\gamma^\mu)$

$$=2[p_1^\mu\mathrm{Tr}(\gamma^\nu\not{p}_2)+p_2^\mu\mathrm{Tr}(\gamma^\nu\not{p}_1)-g^{\mu\nu}\mathrm{Tr}(\not{p}_1\not{p}_2)]-\mathrm{Tr}(\gamma^\mu\not{p}_1\gamma^\nu\not{p}_2),$$

$$\therefore\quad \mathrm{Tr}(\gamma^\mu\not{p}_1\gamma^\nu\not{p}_2)=4[p_1^\mu p_2^\nu+p_2^\mu p_1^\nu-g^{\mu\nu}(p_1p_2)]. \tag{12.25}$$

(2) $\mathrm{Tr}[\gamma^\mu(1-\gamma^5)\not{p}_1\gamma^\nu(1-\gamma^5)\not{p}_2]=\mathrm{Tr}[\gamma^\mu\not{p}_1\gamma^\nu\not{p}_2+\gamma^\mu\gamma^5\not{p}_1\gamma^\nu\gamma^5\not{p}_2]-\mathrm{Tr}[\gamma^\mu\not{p}_1\gamma^\nu\gamma^5\not{p}_2+\gamma^\mu\gamma^5\not{p}_1\gamma^\nu\not{p}_2]$. $\{\gamma^\mu,\gamma^5\}=0$ であるから

$$\text{上式}=2\mathrm{Tr}[\gamma^\mu\not{p}_1\gamma^\nu\not{p}_2]+2\mathrm{Tr}[\gamma^5\gamma^\mu\not{p}_1\gamma^\nu\not{p}_2].$$

第2項に (6.23) を用いて

$$\mathrm{Tr}[\gamma^\mu(1-\gamma^5)\not{p}_1\gamma^\nu(1-\gamma^5)\not{p}_2]=2\mathrm{Tr}(\gamma^\mu\not{p}_1\gamma^\nu\not{p}_2)\ -8i\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta}p_{1\alpha}p_{2\beta}. \tag{12.26}$$

(3) $$\mathrm{Tr}(\gamma^\mu\not{p}_1\gamma^\nu\not{p}_2)\mathrm{Tr}(\gamma_\mu\not{p}_3\gamma_\nu\not{p}_4)=16[p_1^\mu p_2^\nu+p_2^\mu p_1^\nu-g^{\mu\nu}(p_1p_2)]\times[p_{3\mu}p_{4\nu}+p_{4\mu}p_{3\nu}-g_{\mu\nu}(p_3p_4)]$$

$$=16[(p_1p_3)(p_2p_4)+(p_1p_4)(p_2p_3)-(p_1p_2)(p_3p_4)+(p_2p_3)(p_1p_4)+(p_2p_4)(p_1p_3)$$
$$-(p_1p_2)(p_3p_4)-(p_1p_2)(p_3p_4)-(p_1p_2)(p_3p_4)+4(p_1p_2)(p_3p_4)]$$
$$=32[(p_1p_3)(p_2p_4)+(p_1p_4)(p_2p_3)],$$

すなわち $\mathrm{Tr}(\gamma^\mu \not{p}_1\gamma^\nu \not{p}_2)\mathrm{Tr}(\gamma_\mu \not{p}_3\gamma_\nu \not{p}_4)=32[(p_1p_3)(p_2p_4)+(p_1p_4)(p_2p_3)].$ (12.27)

(4) $\mathrm{Tr}(\gamma^\mu \not{p}_1\gamma^\nu\gamma^5 \not{p}_2)\mathrm{Tr}(\gamma_\mu \not{p}_3\gamma_\nu\gamma^5 \not{p}_4)=\mathrm{Tr}(\gamma^5 \not{p}_2\gamma^\mu \not{p}_1\gamma^\nu)\mathrm{Tr}(\gamma^5 \not{p}_4\gamma^\mu \not{p}_3\gamma_\nu)$

(6.23) を用いて $=(4i)^2\varepsilon^{\alpha\mu\beta\nu}p_{2\alpha}p_{1\beta}\varepsilon_{\rho\mu\sigma\nu}p_4{}^\rho p_3{}^\sigma.$

ここで $\varepsilon^{\alpha\mu\beta\nu}\varepsilon_{\rho\mu\sigma\nu}=\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta}\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}=-2(\delta_\rho{}^\alpha\delta_\sigma{}^\beta-\delta_\rho{}^\beta\delta_\sigma{}^\alpha)$ を用いれば

$$\mathrm{Tr}(\gamma^\mu \not{p}_1\gamma^\nu\gamma^5 \not{p}_2)\mathrm{Tr}(\gamma_\mu \not{p}_3\gamma_\nu\gamma^5 \not{p}_4)=32[(p_1p_3)(p_2p_4)-(p_1p_4)(p_2p_3)]. \quad (12.28)$$

(5) $\mathrm{Tr}[\gamma^\mu(1-\gamma^5)\not{p}_1\gamma^\nu(1-\gamma^5)\not{p}_2]\mathrm{Tr}[\gamma_\mu(1-\gamma^5)\not{p}_3\gamma_\nu(1-\gamma^5)\not{p}_4]$

$$=64[p_1{}^\mu p_2{}^\nu+p_2{}^\mu p_1{}^\nu-g^{\mu\nu}(p_1p_2)+i\varepsilon^{\mu\alpha\nu\beta}p_{1\alpha}p_{2\beta}][p_{3\mu}p_{4\nu}+p_{4\mu}p_{3\nu}-g_{\mu\nu}(p_3p_4)+i\varepsilon_{\mu\rho\nu\sigma}p_3{}^\rho p_4{}^\sigma]$$
$$=64[(p_1p_3)(p_2p_4)+(p_1p_4)(p_2p_3)-(p_1p_2)(p_3p_4)+(p_2p_3)(p_1p_4)+(p_2p_4)(p_1p_3)$$
$$-(p_1p_2)(p_3p_4)-(p_3p_4)(p_1p_2)-(p_1p_2)(p_3p_4)+4(p_1p_2)(p_3p_4)-\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta}\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}p_{1\alpha}p_{2\beta}p_3{}^\rho p_4{}^\sigma]$$
$$=64[2(p_1p_3)(p_2p_4)+2(p_1p_4)(p_2p_3)+2(\delta_\rho{}^\alpha\delta_\sigma{}^\beta-\delta_\rho{}^\beta\delta_\sigma{}^\alpha)p_{1\alpha}p_{2\beta}p_3{}^\rho p_4{}^\sigma]$$
$$=64[2(p_1p_3)(p_2p_4)+2(p_1p_4)(p_2p_3)+2(p_1p_3)(p_2p_4)-2(p_2p_3)(p_1p_4)]$$
$$=256(p_1p_3)(p_2p_4).$$

すなわち

$$\mathrm{Tr}[\gamma^\mu(1-\gamma^5)\not{p}_1\gamma^\nu(1-\gamma^5)\not{p}_2]\mathrm{Tr}[\gamma_\mu(1-\gamma^5)\not{p}_3\gamma_\nu(1-\gamma^5)\not{p}_4]=256(p_1p_3)(p_2p_4). \quad (12.29)$$

12.8 右辺を $\omega\equiv k^0$ で積分すれば

$$\int d^4k\theta(\omega)\delta(k^2)=\int d\omega\int d^3k\theta(\omega)\delta(\omega^2-|\boldsymbol{k}|^2)=\int d^3k\int d\omega\frac{1}{2|\boldsymbol{k}|}\delta(\omega-|\boldsymbol{k}|)=\int\frac{d^3k}{2\omega}$$

となり左辺に等しい。

12.9* $\mathcal{M}=\dfrac{G}{\sqrt{2}}[\bar{u}(k)\gamma^\mu(1-\gamma^5)u(p)][\bar{u}(p')\gamma_\mu(1-\gamma^5)v(k')]$ であるから

$$\overline{|\mathcal{M}|^2}\equiv\frac{1}{2}\sum_{\mathrm{spin}}|\mathcal{M}|^2=\frac{1}{2}\left(\frac{G}{\sqrt{2}}\right)^2\sum_{\mathrm{spin}}[\bar{u}(k)\gamma^\mu(1-\gamma^5)u(p)\bar{u}(p)\gamma^\nu(1-\gamma^5)u(k)]$$
$$\times\sum_{\mathrm{spin}}[\bar{u}(p')\gamma_\mu(1-\gamma^5)v(k')\bar{v}(k')\gamma_\nu(1-\gamma^5)u(p')]$$
$$=\frac{1}{2}\left(\frac{G}{\sqrt{2}}\right)^2\mathrm{Tr}[\not{k}\gamma^\mu(1-\gamma^5)(\not{p}-m)\gamma^\nu(1-\gamma^5)]\cdot\mathrm{Tr}[\not{p}'\gamma_\mu(1-\gamma^5)\not{k}'\gamma_\nu(1-\gamma^5)]$$
$$=\frac{1}{2}\left(\frac{G}{\sqrt{2}}\right)^2\mathrm{Tr}[\not{k}\gamma^\mu(1-\gamma^5)\not{p}\gamma^\nu(1-\gamma^5)]\cdot\mathrm{Tr}[\not{p}'\gamma_\mu(1-\gamma^5)\not{k}'\gamma_\nu(1-\gamma^5)]$$
$$-m\mathrm{Tr}[\not{k}\gamma^\mu(1-\gamma^5)\gamma^\nu(1-\gamma^5)]\cdot\mathrm{Tr}[\not{p}'\gamma_\mu(1-\gamma)^5)\not{k}'\gamma_\nu(1-\gamma^5)].$$

第1項に (12.29) を用い，第2項の最初の Tr は $\mathrm{Tr}[\not{k}\gamma^\mu(1-\gamma^5)\gamma^\nu(1-\gamma^5)]=\mathrm{Tr}[\not{k}\gamma^\mu\gamma^\nu(1+\gamma^5)(1-\gamma^5)]=0$ となるから

$$\overline{|\mathcal{M}|^2}=(G^2/4)\times256(k\cdot p')(k'\cdot p)=64G^2(k\cdot p')(k'\cdot p)$$

を得る。

12.10 $p-k'=p'+k$, $k^2=p'^2=0$ だから（電子質量は無視）

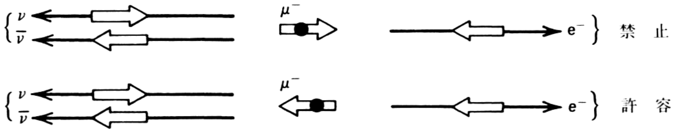
$$2(k\cdot p')(k'\cdot p)=(p'+k)^2(k'\cdot p)=(p-k')^2(k'\cdot p)$$
$$=(p^2-2(p\cdot k'))(k'\cdot p).$$

$p^2=m^2$, $p=(m,0,0,0)$ とすれば $p\cdot k'=m\omega'$ であるから

$$2(k\cdot p')(k'\cdot p)=(m^2-2m\omega')m\omega'$$

を得る。

12.11*



μ 崩壊 $\mu^-(p)\to e^-(p')+\bar{\nu}_e(k')+\nu_\mu(k)$ において μ の偏極ベクトルを s とすれば，行列要素は

$$\mathcal{M}=\frac{G}{\sqrt{2}}\left[\bar{u}(k)\gamma^\mu(1-\gamma^5)\frac{1+\gamma^5\not{s}}{2}u(p)\right][\bar{u}(p')\gamma_\mu(1-\gamma^5)v(k')]$$

であるから，μ の質量を m として電子の質量は無視すれば

$$\begin{aligned}\overline{|\mathcal{M}|^2}&=\frac{G^2}{2}\mathrm{Tr}\left[\gamma^\mu(1-\gamma^5)\left(\frac{1+\gamma^5\not{s}}{2}\right)(\not{p}+m)\gamma^\nu(1-\gamma^5)\not{k}\right]\mathrm{Tr}[\not{p}'\gamma_\mu(1-\gamma^5)\not{k}'\gamma_\nu(1-\gamma^5)]\\&=(G^2/2)(1/2)\times4^2\times[\{k_\mu p_\nu+p_\mu k_\nu-g_{\mu\nu}(p\cdot k)\}-m\{k_\mu s_\nu+s_\mu k_\nu-g_{\mu\nu}(s\cdot k)\}+\\&\quad i\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}p^\rho k^\sigma-im\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}s^\rho k^\sigma][p^{\mu'}k^{\nu'}+k^{\mu'}p^{\nu'}-g^{\mu\nu}(p'\cdot k')+i\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta}k'_\alpha p'_\beta]\\&=64G^2(p'\cdot k)k'\cdot(p-ms).\end{aligned}$$

(12.33) を用いて μ の静止系 $p=(m,0,0,0)$ をとれば

$$\begin{aligned}d\Gamma&=\frac{G^2}{24\pi^3}m^2E'^2dE'd(\cos\theta)\left[\left(3-4\frac{E'}{m}\right)+\frac{(s\cdot p')}{E'}\left(4\frac{E'}{m}-1\right)\right]\\&=\frac{G^2}{24\pi^3}m^2E'dE'd(\cos\theta)\left(3-4\frac{E'}{m}\right)\left[1+\frac{(s\cdot p')}{E'}\frac{(4E'/m)-1}{3-(4E'/m)}\right].\end{aligned}$$

$s=(0,\boldsymbol{P})$ とすれば，電子の質量は無視しているから $\boldsymbol{p}'/E'=\hat{\boldsymbol{p}}'$ と書けて

$$d\Gamma=\frac{G^2}{24\pi^3}m^2E'dE'd(\cos\theta)\left(3-\frac{4E'}{m}\right)\left[1-\boldsymbol{P}\cdot\hat{\boldsymbol{p}}'\left\{\frac{(4E'/m)-1}{3-(4E'/m)}\right\}\right].$$

放出電子のエネルギーが最大の極限では $E'=m/2$ だから $\boldsymbol{P}\cdot\hat{\boldsymbol{p}}'=\cos\alpha$ とすれば

$$\frac{d\Gamma}{d(\cos\theta)}=\frac{G^2m^2}{24\pi^3}E'dE'(1-P\cos\alpha).$$

12.12 (12.42) により

$$\frac{\tau(\tau\to e\nu\bar{\nu})}{\tau(\mu\to e\nu\bar{\nu})}=\left(\frac{m_\mu}{m_\tau}\right)^5=7.1\times10^{-7}.$$

したがって τ の寿命は $\tau=(2.2\times10^{-6})\times(7.1\times10^{-7})\times1/5=3.1\times10^{-13}$sec. レプトン崩壊は e, μ 2 通りに対し，ハドロン ($u\bar{d}$) 崩壊は 3 通りのカラー状態があるから

$$(\tau\to e):(\tau\to\mu):(\tau\to \text{ハドロン})=1:1:3$$

となる。したがって $\tau\to e\nu\bar{\nu}$ 崩壊の分岐比は $1/(1+1+3)=1/5$ である。

12.13 (12.54) を用いて

$$\frac{\Gamma(K^-\to e^-\bar{\nu}_e)}{\Gamma(K^-\to\mu^-\bar{\nu}_\mu)}=\left(\frac{m_e}{m_\mu}\right)^2\left(\frac{m_K{}^2-m_e{}^2}{m_K{}^2-m_\mu{}^2}\right)^2=2.55\times10^{-5}$$

を得る。(12.54) で $\pi\to K$ とし，$\sin^2\theta_C=0.23$ を仮定すると $f_K\simeq145$ MeV を得る。

12.14 点相互作用の場合は，次元を持った変数は s だけである。σ は G^2 に比例するから，断面積の次元を持つ唯一の組み合わせは積 G^2s である。すなわち，$\sigma(\nu_e e^-)\sim G^2s$ である。ところが，点相互作用は s 波 ($l=0$) 過程で $\sigma\leq$(定数)$/s$ であるから，この単純な考え方では $s\sim1/G\sim10^5\mathrm{GeV}^2$ になると使えない。

12.15 $s\simeq 2m_eE_\nu$ を (12.60) に代入すれば

$$\sigma(\nu_e e^-)\simeq 2G^2m_eE_\nu/\pi\simeq E_\nu(\text{GeV 単位})\times 10^{-41}\text{cm}^2.$$

12.16 $\nu_e(k)+e(p)\to e(p')+\nu_e(k')$ の遷移振幅は

$$\mathcal{M}=\frac{G}{\sqrt{2}}(\bar{u}(k')\gamma^\mu(a+b\gamma^5)u(p))(\bar{u}(p')\gamma_\mu(a+b\gamma^5)u(k))$$

であるから

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\sum_{\text{spin}}|\mathcal{M}|^2&=\frac{G^2}{4}\text{Tr}[\gamma^\mu(a+b\gamma^5)\not{p}\gamma^\nu(a+b\gamma^5)\not{k}']\text{Tr}[\gamma_\mu(a+b\gamma^5)\not{k}\gamma_\nu(a+b\gamma^5)\not{p}']\\
&=(G^2/4)\{(a^2+b^2)\text{Tr}[\gamma^\mu\not{p}\gamma^\nu\not{k}']+2ab\text{Tr}[\gamma^\mu\not{p}\gamma^\nu\gamma^5\not{k}']\}\\
&\quad\times\{(a^2+b^2)\text{Tr}[\gamma_\mu\not{k}\gamma_\nu\not{p}']+2ab\text{Tr}[\gamma_\mu\not{k}\gamma_\nu\gamma^5\not{p}']\}\\
&=(G^2/4)\times 32\{[(a^2+b^2)^2+4a^2b^2](p\cdot k)(p'\cdot k')+[(a^2+b^2)^2-4a^2b^2](p\cdot p')(k\cdot k')\}\\
&=8G^2[(a^2+b^2)^2+4a^2b^2](s^2/4)+[(a^2+b^2)^2-4a^2b^2](s/4)^2(1+\cos\theta)^2\}\\
&=2G^2s^2\{[(a^2+b^2)^2+4a^2b^2]+[(a^2+b^2)^2-4a^2b^2]((1+\cos\theta)/2)^2\},
\end{aligned}$$

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}=\frac{1}{64\pi^2s}\frac{1}{2}\sum_{\text{spin}}|\mathcal{M}|^2=\frac{G^2s}{32\pi^2}\{[(a^2+b^2)+4a^2b^2]+[(a^2+b^2)^2-4a^2b^2]\cos^4(\theta/2)\}.$$

これが証明すべき関係であった。

$\bar{\nu}_e e^-\to e^-\bar{\nu}_e$ は s↔t，u↔u の置き換えをすればよいが，$t\simeq -s(1-\cos\theta)/2$ だから

$$\frac{1}{2}\sum_{\text{spin}}|\mathcal{M}|^2=\frac{G^2}{2}s^2(1-\cos\theta)^2\Big\{[(a^2+b^2)^2+4a^2b^2]+[(a^2+b^2)^2-4a^2b^2]\Big(\frac{1+\cos\theta}{2}\Big)^2\Big\}.$$

したがって

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}=\frac{1}{64\pi^2s}\frac{1}{2}\sum_{\text{spin}}|\mathcal{M}|^2=\frac{G^2s}{128\pi^2}(1-\cos\theta)^2\Big\{[(a^2+b^2)^2+4a^2b^2]+[(a^2+b^2)^2-4a^2b^2]\cos^4\frac{\theta}{2}\Big\}.$$

いずれも $a=-b=1$ とすれば，V-A 理論の結果 (12.59) と (12.62) に帰着する。

12.17* $\pi^-\to\pi^0 e^-\bar{\nu}_e$ は $d\to ue^-\bar{\nu}_e$ によって起こるから，β 崩壊の場合の行列要素で n→d, p→u と置き換えればよい。レプトン対へ移ったエネルギーが E_0 であったから，この場合，それは π^- と π^0 の質量差 Δm である。(12.23) の下の Γ の表式により，(12.68) を得る。$\Delta m=4.6$ MeV とすれば，$\Gamma(\pi^-\to\pi^0 e\bar{\nu}_e)=0.43\,\text{sec}^{-1}$ となる。$\Gamma(\pi^-\to\pi^0e^-\bar{\nu}_e)/\Gamma(\pi^-\to\mu^-\bar{\nu}_\mu)\simeq 1.9\times 10^{-8}$. ただし $f_\pi\simeq 100$ MeV とした。

12.18* アイソスカラー標的だから，(9.24) を用いて

$$\begin{aligned}
\frac{d\sigma(eN\to eX)}{dxdy}&=\frac{1}{2}\left[\frac{d\sigma(ep\to eX)}{dxdy}+\frac{d\sigma(en\to eX)}{dxdy}\right]\\
&=\frac{1}{2}\frac{2\pi\alpha^2}{Q^4}sx[1+(1-y)^2][F_2^{ep}(x)+F_2^{en}(x)]
\end{aligned}$$

となるから，u, d クォークに限れば (9.27), (9.28) および (12.75) により

$$\begin{aligned}
F_2^{ep}(x)+F_2^{en}(x)&=\frac{5}{9}(u(x)+d(x))+\frac{5}{9}(\bar{u}(x)+\bar{d}(x))\\
&=\frac{5}{9}(Q(x)+\overline{Q}(x))
\end{aligned}$$

である。したがって

$$\frac{d\sigma(eN\to eX)}{dxdy}=\frac{2\pi\alpha^2}{Q^4}xs[1+(1-y)^2]\frac{5}{18}[Q(x)+\overline{Q}(x)].$$

12.19* (12.76),(12.77) により

$$\sigma(\nu)=\frac{G^2 s}{2\pi}\int dy\int dx[xQ(x)+(1-y)^2 x\overline{Q}(x)],$$

$$\sigma(\bar{\nu})=\frac{G^2 s}{2\pi}\int dy\int dx[x\overline{Q}(x)+(1-y)^2 xQ(x)]$$

であるから，まず y の積分を実行して辺々割れば

$$R\equiv\frac{\sigma(\bar{\nu})}{\sigma(\nu)}=\frac{\frac{1}{3}\int xQ(x)\,dx+\int x\overline{Q}(x)\,dx}{\int xQ(x)\,dx+\frac{1}{3}\int x\overline{Q}(x)\,dx}$$

となる。これから

$$\frac{\int xQ(x)\,dx}{\int x\overline{Q}(x)\,dx}=\frac{3R-1}{3-R}$$

を得る。

12.20* (1) $V-A$ 型クォーク結合：

$$\mathcal{M}(\nu q\to\nu q)=\frac{G_N}{\sqrt{2}}[\bar{u}_\nu(k')\gamma^\mu(1-\gamma^5)u_\nu(k)][\bar{u}_q(p')\gamma_\mu(1-\gamma^5)u_q(p)],$$

$$\overline{|\mathcal{M}|^2}=\frac{1}{2}\sum_{\text{spin}}|\mathcal{M}(\nu q\to\nu q)|^2=\frac{G_N{}^2}{4}\mathrm{Tr}[\gamma^\mu(1-\gamma^5)\not{k}\gamma^\nu(-\gamma^5)\not{k}']\mathrm{Tr}[\gamma_\mu(1-\gamma^5)\not{p}\gamma_\nu(1-\gamma^5)\not{p}']$$

$$=(G_N{}^2/4)\times 8^2[k_\mu k_\nu'+k_\mu' k_\nu-g_{\mu\nu}(k\cdot k')+i\varepsilon_{\mu\alpha\nu\beta}k^\alpha k'^\beta][p^\mu p'^\nu+p'^\mu p^\nu-g^{\mu\nu}(p\cdot p')+i\varepsilon^{\mu\rho\nu\sigma}p_\rho p_\sigma']$$

$$=16G_N{}^2[2(p\cdot k)(p'\cdot k')+2(p\cdot k')(p'\cdot k)-(-2)(\delta_\alpha{}^\rho\delta_\beta{}^\sigma-\delta_\alpha{}^\sigma\delta_\beta{}^\rho,\ k^\alpha k'^\beta p_\rho p_\sigma')]$$

$$=64G_N{}^2(p\cdot k)(p'\cdot k)\simeq 16G_N{}^2 s^2,$$

すなわち　$\overline{|\mathcal{M}|^2}\propto s^2$.

(2) $V+A$ 型クォーク結合：

$$\mathcal{M}(\nu q\to\nu q)=(G_N/\sqrt{2})[\bar{u}_\nu(k')\gamma^\mu(1-\gamma^5)u_\nu(k)][\bar{u}_q(p')\gamma_\mu(1+\gamma^5)u_q(p)],$$

$$\overline{|\mathcal{M}|^2}=\frac{1}{2}\sum_{\text{spin}}|\mathcal{M}(\nu q\to\nu q)|^2=\frac{1}{4}G_N{}^2\mathrm{Tr}[\gamma^\mu(1-\gamma^5)\not{k}\gamma^\nu(1-\gamma^5)\not{k}']\mathrm{Tr}[\gamma_\mu(1+\gamma^5)\not{p}\gamma_\nu(1+\gamma^5)\not{p}']$$

$$=(G_N{}^2/4)\times 8^2[k_\mu k_\nu'+k_\mu' k_\nu-g_{\mu\nu}(k\cdot k')+i\varepsilon_{\mu\alpha\nu\beta}k^\alpha k'^\beta][p^\mu p'^\nu+p'^\mu p^\nu-g^{\mu\nu}(p\cdot p')$$
$$-i\varepsilon^{\mu\rho\nu\sigma}p_\rho p_\sigma']$$

$$=16G_N{}^2[2(p\cdot k)(p'\cdot k')+2(p\cdot k')(p'\cdot k)+(-2)(\delta_\alpha{}^\rho\delta_\beta{}^\sigma-\delta_\alpha{}^\sigma\delta_\beta{}^\rho)k^\alpha k'^\beta p_\rho p_\sigma']$$

$$=64G_N{}^2(p\cdot k')(p'\cdot k)\simeq 16G_N{}^2 u^2.$$

$u\simeq(-s/2)(1+\cos\theta)\simeq -s(1-y)$ であるから　　$\overline{|\mathcal{M}|^2}\propto s^2(1-y)^2$.

(3) S,P 型クォーク結合：

$$\mathcal{M}(\nu q\to\nu q)=(G_N/\sqrt{2})[\bar{u}_\nu(k')(1-\gamma^5)u_\nu(k)][\bar{u}_q(p')(g_s-g_P\gamma^5)u_q(p)]$$

$$\overline{|\mathcal{M}|^2}=\frac{1}{2}\sum_{\text{spin}}|\mathcal{M}(\nu q\to\nu q)|^2=\frac{1}{4}G_N{}^2\mathrm{Tr}[(1-\gamma^5)\not{k}(1-\gamma^5)\not{k}']\mathrm{Tr}[g_s-g_P\gamma^5)\not{p}(g_s-g_P\gamma^5)\not{p}']$$

$$=8G_N{}^2(g_s{}^2-g_P{}^2)(p\cdot p')(k\cdot k')\simeq 2(g_s{}^2-g_P{}^2)t^2.$$

$t\simeq-(s/2)(1-\cos\theta)$,$1-y\simeq(1+\cos\theta)/2$ であるから $t\simeq -sy$ となり，$\overline{|\mathcal{M}|^2}\propto s^2y^2$ を得る。

12.21 $D^0(c\bar{u})$ の3体崩壊を $\bar{u}$ をスペクテーターとして，c の $W^\pm$ を通す3体崩壊で考えれば，$c\to su\bar{d}\propto 3\cos^4\theta_c$，$c\to du\bar{s}\propto 3\sin^4\theta_c$，$c\to d\bar{d}u\propto 3\sin^2\theta_c\cos^2\theta_c$ であるから

$$\Gamma(\mathrm{D^0\to K^-\pi^+}) : \Gamma(\mathrm{D^0\to \pi^+\pi^-}) : \Gamma(\mathrm{D^0\to K^+\pi^-}) = \cos^4\theta_c : \sin^2\theta_c\cos^2\theta_c : \sin^4\theta_c$$
$$= 1 : \tan^2\theta_c : \tan^4\theta_c.$$

$\sin\theta_c \simeq 0.23$ とすれば，上記の比は 1：0.06：0.003 となる。

12.22* 問題 12.17 の結果を用いれば

$$\frac{\Gamma(\mathrm{D^0\to K^-e^+\nu_e})}{\Gamma(\mathrm{K^+\to \pi^0e^+\nu_e})} = \left(\frac{m_{\mathrm{D^0}} - m_{\mathrm{K^-}}}{m_{\mathrm{K^+}} - m_{\pi^0}}\right)^5 \simeq 8.16\times10^2$$

だから，$\Gamma(\mathrm{K^+\to\pi^0e^+\nu_e}) = 4\times10^6\,\mathrm{sec}^{-1}$ を用いて

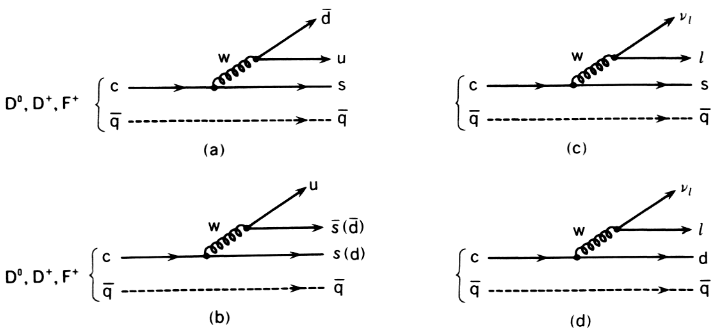
$$\Gamma(\mathrm{D^0\to K^-e^+\nu_e}) \simeq 3.26\times10^9\,\mathrm{sec}^{-1}$$

となる。分岐比は問題 12.12 と同様に考えて 20 % とすれば，$\mathrm{D^0\to K^-e^+\nu_e}$ の寿命は

$$\tau(\mathrm{D^0\to K^-e^+\nu_e}) = \frac{1}{5}\times\frac{1}{\Gamma} \simeq 6\times10^{-11}\,\mathrm{sec}$$

である。

12.23* $\mathrm{D^0}=(\mathrm{c\bar{u}})$，$\mathrm{D^+}=(\mathrm{c\bar{d}})$，$\mathrm{F^+}=(\mathrm{c\bar{s}})$ であるから，非レプトン崩壊，セミレプトン崩壊は，$\bar{\mathrm{q}}\equiv(\bar{\mathrm{u}},\bar{\mathrm{d}},\bar{\mathrm{s}})$ をスペクテーターとして次のように共通の図で表される：



(a)$\propto 3\cos^4\theta_c$，(b)$\propto 3\cos^2\theta_c\sin^2\theta_c$，(c)$\propto\cos^2\theta_c$，(d)$\propto\sin^2\theta_c$ が $\bar{\mathrm{q}}=(\bar{\mathrm{u}},\bar{\mathrm{d}},\bar{\mathrm{s}})$ 共通に成り立っているから，$\tau(\mathrm{D^0})=\tau(\mathrm{D^+})=\tau(\mathrm{F^+})$ が成り立つ。

12.24* (1) $\bar{u}_c = u_c{}^\dagger\gamma^0 = (C\gamma^0u^*)^\dagger\gamma^0 = u^T\gamma^0C^\dagger\gamma^0 = -u^TC^\dagger\gamma^0\gamma^0 = -u^TC^{-1}$.
(2) (5.38)の下の式より　$\gamma^\mu = -(C\gamma^0)\gamma^{\mu*}(C\gamma^0)^{-1} = -C\gamma^0\gamma^{\mu*}\gamma^0C^{-1} = -C\gamma^{\mu T}C^{-1}$.
(3) $\gamma^\mu = -C\gamma^{\mu T}C^{-1}$ だから，$C^{-1}\gamma^\mu\gamma^5C = -\gamma^{\mu T}C^{-1}i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3C = -i\gamma^{\mu T}\times$
$(C^{-1}\gamma^0C)(C^{-1}\gamma^1C)(C^{-1}\gamma^2C)(C^{-1}\gamma^3C) = -i\gamma^{\mu T}\gamma^{0T}\gamma^{1T}\gamma^{2T}\gamma^{3T} = -\gamma^{\mu T}(i\gamma^3\gamma^2\gamma^1\gamma^0)^T =$
$-\gamma^{\mu T}(i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3)^T = +(\gamma^\mu\gamma^5)^T$.

12.25* 電磁相互作用のハミルトニアンが荷電共役不変であると要請すれば，電磁場を A_μ として $H = j^\mu A_\mu = (-e)\bar{\psi}\gamma^\mu\psi A_\mu$ であるから，$H = C^{-1}HC = C^{-1}j^\mu C\cdot C^{-1}A_\mu C = j^{\mu c}\cdot A_\mu{}^c$.
(5.40) により $j^{\mu c} = -j^\mu$ だから $A_\mu{}^c = -A_\mu$. すなわち電磁場は $C=-1$ である。π^0 は 2 個の光子に崩壊するので，$C=+1$ である。

12.26* C で 2 個のパイオンの電荷を入れ換え，次に P で空間座標を入れ換えると，CP は 2

個のパイオンを交換したことに対応する。2個のパイオン系はBose統計に従うから，粒子の交換に対して符号を変えない。すなわち，2個のパイオン系 $\pi^+\pi^-$ または $\pi^0\pi^0$ は CP の固有値が $+1$ の固有状態である。

次に $\pi^+\pi^-$（または $\pi^0\pi^0$）に S 波 π^0 を加えれば，π^0 のパリティは -1 で元の 2π 系も S 波だから $P(\pi^+\pi^-\pi^0)=P(\pi^0\pi^0\pi^0)=(-1)^3(-1)^{0+0}=-1$. 次に $C(\pi^+\pi^-\pi^0)$ で，C は $\pi^+\pi^-$ を入れ換えるから 2π 系の P と同等である。したがって固有値は3個の π の角運動量に依存するが，いまは角運動量0の状態を考えているから $C(\pi^+\pi^-\pi^0)=+1$，また π^0 は C の固有値1の固有状態だから $C(\pi^0\pi^0\pi^0)=+1$. すなわち，$CP(\pi^+\pi^-\pi^0)=CP(\pi^0\pi^0\pi^0)=-1$ である。

13.1* $\mathrm{u_L}$ と $\mathrm{d_L}$ は弱アイソスピン $T=1/2$ の2重項で，それぞれ $T^3=+1/2$ および $T^3=-1/2$ と指定したから，(13.13) により $Y(\mathrm{u_L})=2Q(\mathrm{u_L})-2T^3=4/3-1=1/3$, $Y(\mathrm{d_L})=2Q(\mathrm{d_L})-2T^3=-2/3+1=1/3$ となる。

$\mathrm{u_R}$ と $\mathrm{d_R}$ は弱アイソスピン $T=0$ の1重項で $Q(\mathrm{u_R})=2/3$, $Q(\mathrm{d_R})=-1/3$ だから (13.13) により $Y(\mathrm{u_R})=4/3$, $Y(\mathrm{d_R})=-2/3$ を得る。

13.2 フェルミオン $\mathrm{f_1, f_2}$ およびベクトルボソン X の4元運動量をそれぞれ k, k' および q とすれば，$\mathrm{X}\to\mathrm{f_1}+\bar{\mathrm{f}}_2$ の行列要素は

$$\mathcal{M}=-ig_{\mathrm{X}}\bar{u}(k)\gamma^\mu(1/2)(c_V-c_A\gamma^5)v(k')\varepsilon_\mu^{(\lambda)}$$

である。ただし，$\varepsilon_\mu^{(\lambda)}$ は X ボソンの偏極ベクトルである。X ボソンの3つのヘリシティー状態について平均し，フェルミオンのスピン状態について加えれば

$$\begin{aligned}\overline{|\mathcal{M}|^2}&=\frac{g_{\mathrm{X}}^2}{4}\left[\frac{1}{3}\sum_\lambda\varepsilon_\mu^{(\lambda)}\varepsilon_\nu^{(\lambda)*}\right]\sum_{\text{spin}}[\bar{u}(k)\gamma^\mu(c_V-c_A\gamma^5)v(k')\bar{v}(k')\gamma^\nu(c_V-c_A\gamma^5)u(k)]\\&=\frac{g_{\mathrm{X}}^2}{4}\left[\frac{1}{3}\sum_\lambda\varepsilon_\mu^{(\lambda)}\varepsilon_\nu^{(\lambda)*}\right]\mathrm{Tr}[\not{k}\gamma^\mu(c_V-c_A\gamma^5)\not{k}'\gamma^\nu(c_V-c_A\gamma^5)]\\&=\frac{g_{\mathrm{X}}^2}{4}\left[\frac{1}{3}\sum_\lambda\varepsilon_\mu^{(\lambda)}\varepsilon_\nu^{(\lambda)*}\right][(c_V^2+c_A^2)T_1^{\mu\nu}-2c_Vc_AT_2^{\mu\nu}]\end{aligned}$$

となる。ただし，最初の括弧内が X ボソンの3つのヘリシティー状態に関する和，第2の括弧内が (6.20) で行ったのと同様のフェルミオンのスピン状態に関する和を表し，

$$T_1^{\mu\nu}=\mathrm{Tr}(\gamma^\mu\not{k}'\gamma^\nu\not{k}),\qquad T_2^{\mu\nu}=\mathrm{Tr}(\gamma^5\gamma^\mu\not{k}\gamma^\nu\not{k}')$$

である。(6.93) と (6.23) から c_Vc_A 項は消えることがわかる。偏極に対する和は $\mu\leftrightarrow\nu$ に対して対称であるが，$T_2^{\mu\nu}$ は反対称だからである。X ボソン静止系をとれば

$$q=(M_{\mathrm{X}},\ 0,\ 0,\ 0),\qquad k=\frac{1}{2}M_{\mathrm{X}}(1,\ 0,\ 0,\ 1),\qquad k'=\frac{1}{2}M_{\mathrm{X}}(1,\ 0,\ 0,\ -1)$$

だから，(6.25) を用いて

$$-g_{\mu\nu}T_1^{\mu\nu}=4M_{\mathrm{X}}^2,\qquad q_\mu q_\nu T_1^{\mu\nu}=0$$

が成り立つ。(4.37) を用いて最終的な答えが得られる：

$$\begin{aligned}\Gamma(\mathrm{X}\to\mathrm{f_1\bar{f}_2})&=\frac{1}{64\pi^2M_{\mathrm{X}}}\int\overline{|\mathcal{M}|^2}\,d\Omega=\frac{1}{16\pi M_{\mathrm{X}}}\frac{g_{\mathrm{X}}^2}{12}(c_V^2+c_A^2)4M_{\mathrm{X}}^2\\&=\frac{g_{\mathrm{X}}^2}{48\pi}(c_V^2+c_A^2)M_{\mathrm{X}}.\end{aligned}$$

注意しておくが，上とは違う偏極状態 $\varepsilon^{(\lambda)}$ を考えたとすれば，$T_2^{\mu\nu}$ は0とはならない。$k=(1/2)M_{\mathrm{X}}(1:\sin\theta,\ 0,\ \cos\theta)$ とすれば，崩壊幅は

$$\Gamma^{(\pm)}\propto(c_V^2+c_A^2)(1+\cos^2\theta)\pm2c_Vc_A2\cos\theta,$$
$$\Gamma^{(0)}\propto(c_V^2+c_A^2)2\sin^2\theta$$

となる。これらの結果は，たとえば $\mathrm{W^+}\to\mathrm{e^+}\nu$ における角運動量保存を具体的に意味していることを確かめてみよ。

13.3 $c_V=c_A=1/2$, $M_X=M_Z$, および $g_X=g/\cos\theta$ を (13.43) に代入する。$G=1.166\times 10^{-5}\mathrm{GeV}^{-2}$ および $M_W=M_Z\cos\theta_W$ を用いて (12.15) から g を計算して, $\Gamma(Z\to\nu\bar{\nu})=159\,\mathrm{MeV}$ を得る。

13.4 表 13-2 を用いて $c_V{}^2+c_A{}^2$ を計算する。崩壊様式 $Z\to q\bar{q}$ に対してはカラー因子 3 を考慮する。3 世代の場合には，フェルミオン質量を無視すれば $\Gamma=2.5\,\mathrm{GeV}$ を得る。

13.5 $\Gamma(W^+\to e^+\nu)=\dfrac{g^2M_W}{48\pi}=\dfrac{G}{\sqrt{2}}\dfrac{M_W{}^3}{6\pi}\simeq 224\,\mathrm{MeV}.$

13.6* (12.102),(12.103) を用いれば

$$\Gamma(W^+\to u\bar{d})=\Gamma(W^+\to l^+\nu)\times\cos^2\theta_C\times 3,$$
$$\Gamma(W^+\to u\bar{s})=\Gamma(W^+\to l^+\nu)\times\sin^2\theta_C\times 3$$

である。ただし，θ_C は Cabibbo 角，3 はカラー因子である。

クォークの世代数，すなわち弱アイソスピン 2 重項の数を D_q とすれば

$$\Gamma(W\to \text{ハドロン})=\Gamma(W\to l\nu)\times 3\times D_q$$

であるから，レプトンの弱アイソスピン 2 重項の数を D_l とすれば

$$\Gamma(W\to \mathrm{all})=\Gamma(W\to l\nu)\times(D_l+3D_q)$$

となる。標準模型では $D_l=D_q=3$ だから

$$\Gamma(W\to \mathrm{all})=12\Gamma(W\to l\nu)$$

である。

13.7* $\mathcal{M}^{NC}(\nu e\to\nu e)=J^{NC\mu}\dfrac{g_{\mu\nu}-\dfrac{q_\mu q_\nu}{M_Z{}^2}}{q^2-M_Z{}^2}J^{NC\nu}$

$$=\frac{1}{8}\left(\frac{-ig}{\cos\theta_W}\right)^2[\bar{\nu}\gamma^\mu(1-\gamma^5)\nu]\frac{g_{\mu\nu}-\dfrac{q_\mu q_\nu}{M_Z{}^2}}{q^2-M_Z{}^2}[\bar{e}\gamma^\nu(c_V{}^e-c_A{}^e\gamma^5)e].$$

$|q^2|\ll M_Z{}^2$ とすれば，伝播関数は $-g_{\mu\nu}/M_Z{}^2$ となるから

$$\mathcal{M}^{NC}(\nu e\to\nu e)=\frac{g^2}{8M_Z{}^2\cos^2\theta_W}[\bar{\nu}\gamma^\mu(1-\gamma^5)\nu][\bar{e}\gamma_\mu(1-\gamma^5)e].$$

(13.35) を用いれば

$$\mathcal{M}^{NC}(\nu e\to\nu e)=\frac{\rho G}{\sqrt{2}}[\bar{\nu}\gamma^\mu(1-\gamma^5)\nu][\bar{e}\gamma_\mu(1-\gamma^5)e].$$

13.8* まず $m^2/s\ll 1$ として，電子の質量を無視して (13.47) を導いておく。

$$\mathcal{M}^{NC}(\nu_\mu e\to\nu_\mu e)=\frac{G_N}{\sqrt{2}}(\bar{u}_\nu(k')\gamma^\mu(1-\gamma^5)u_\nu(k))(\bar{u}_e(p')\gamma_\mu(c_V-c_A\gamma^5)u_e(p))$$

$$\overline{|\mathcal{M}|^2}=\frac{1}{2}\sum_{\mathrm{spin}}|\mathcal{M}^{NC}|^2=\frac{1}{2}\frac{G_N{}^2}{2}\mathrm{Tr}[\gamma^\mu(1-\gamma^5)\not{k}\gamma^\nu(1-\gamma^5)\not{k}']\times$$
$$\mathrm{Tr}[\gamma_\mu(c_V-c_A\gamma^5)\not{p}\gamma_\nu(c_V-c_A\gamma^5)\not{p}']$$

$$\mathrm{Tr}[\gamma^\mu(1-\gamma^5)\not{k}\gamma^\nu(1-\gamma^5)\not{k}']=8[k^\mu k'^\nu+k'^\mu k^\nu-g^{\mu\nu}(k\cdot k')]+8i\varepsilon^{\beta\mu\alpha\nu}k_\beta k_\alpha'$$

$$\mathrm{Tr}[\gamma_\mu(c_V-c_A\gamma^5)\not{p}\gamma_\nu(c_V-c_A\gamma^5)\not{p}']=4(c_V{}^2+c_A{}^2)(p_\mu p_\nu'+p_\mu' p_\nu-g_{\mu\nu}(p\cdot p'))+8i\varepsilon_{\beta'\mu\alpha'\nu}p^{\beta'}p'^{\alpha'}$$

であるから，$\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta}\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}=-2(\delta_\rho{}^\alpha\delta_\sigma{}^\beta-\delta_\rho{}^\beta\delta_\sigma{}^\alpha)$ を用いて

$$\overline{|\mathcal{M}|^2}=(G_N{}^2/4)\times 64[(c_A{}^2+c_V{}^2)((p\cdot k)(p'\cdot k')+(p\cdot k')(p'\cdot k))+2c_Ac_V((p'\cdot k')(p\cdot k)-(p\cdot k')(p'\cdot k))]$$

を得る。

$(p\cdot k)\simeq s/2$，$(p'\cdot k')\simeq s/2$，$(p'\cdot k)\simeq -u/2$，$(p\cdot k')\simeq -u/2$ と近似すれば
$$\overline{|\mathcal{M}|^2}=(G_N{}^2/4)\times 16[(c_A{}^2+c_V{}^2)(s^2+u^2)+2c_Ac_V(s^2-u^2)].$$
(4.35) に代入して，$u=-(s/2)(1+\cos\theta)=-s(1-y)$ により $d\sigma/dy$ の形に書き直せば
$$\begin{aligned}&(c_A{}^2+c_V{}^2)(s^2+u^2)+2c_Ac_V(s^2-u^2)\\&=s^2[(c_A{}^2+c_V{}^2)(1+(1-y)^2)+2c_Ac_V(1-(1-y)^2)]\\&=s^2[(c_A+c_V)^2+(c_V-c_A)^2(1-y)^2]\end{aligned}$$
であるから
$$\frac{d\sigma}{dy}=\frac{G_N{}^2s}{4\pi}[(c_A+c_V)^2+(c_V-c_A)^2(1-y)^2].$$
次に電子の質量 m を考慮すると，$\overline{|\mathcal{M}|^2}$ の右辺の第 2 番目の Tr[…] は次のように変更される：
$$\mathrm{Tr}[\gamma_\mu(c_V-c_A\gamma^5)(\not{p}+m)\gamma_\nu(c_\nu-c_A\gamma^5)(\not{p}'+m)].$$
新たに m に依存する有限の寄与をするのは
$$m^2\mathrm{Tr}[\gamma_\mu(c_V-c_A\gamma^5)\gamma_\nu(c_V-c_A\gamma^5)]=4m^2g_{\mu\nu}(c_V{}^2-c_A{}^2)$$
である。したがって
$$\begin{aligned}\overline{|\mathcal{M}|^2}&=(1/4)\,G_N{}^2\cdot 8[k^\mu k'^\nu+k^\nu k'^\mu-g^{\mu\nu}(k\cdot k')+i\epsilon^{\beta\mu\alpha\nu}k_\beta k_\alpha']\times\\&\quad 4m^2g_{\mu\nu}(c_V{}^2-c_A{}^2)\\&=(G_N{}^2/4)(-64)m^2(c_V{}^2-c_A{}^2)(k\cdot k').\end{aligned}$$
$(k\cdot k')=-\dfrac{t}{2}=\dfrac{s}{4}(1-\cos\theta)=\dfrac{s}{4}\times 2y=\dfrac{sy}{2}$ であるから
$$\overline{|\mathcal{M}|^2}=(G_N{}^2/4)\times[-32m^2ys(c_V{}^2-c_A{}^2)].$$
(4.53) に代入して $d\sigma/dy$ の形に書き直せば，$m\neq 0$ から生ずる付加項は
$$-\frac{1}{2\pi}G_N{}^2m^2y(c_V{}^2-c_A{}^2)$$
となる。

13.9* 恒等式
$$A_{\alpha\sigma}B_{\beta\rho}=\sum_{\kappa,\lambda}(A_{\alpha\kappa}\delta_{\lambda\rho})(B_{\beta\lambda}\delta_{\kappa\sigma})$$
によって任意の行列の直積を次のように他の直積の和に分解できる：
$$A_{\alpha\sigma}B_{\beta\rho}=\sum_\nu C_{\alpha\rho}{}^{(\nu)}D_{\beta\sigma}{}^{(\nu)}. \qquad (1)$$
(5.22) により $\Gamma^i=\{I,\gamma^\mu,\sigma^{\mu\nu},\gamma^\mu\gamma^5,\gamma^5\}$ は完全系を作っていたから，任意の 4 行 4 列の積は Γ^i で上の形に展開できる。たとえば，$A=B=I$ とすれば
$$\begin{aligned}(I)_{\alpha\sigma}(I)_{\beta\rho}=&a_S(I)_{\alpha\rho}(I)_{\beta\sigma}+a_V(\gamma^\mu)_{\alpha\rho}(\gamma_\mu)_{\beta\sigma}+a_T(\sigma^{\mu\nu})_{\alpha\rho}(\sigma^{\mu\nu})_{\beta\sigma}+\\&a_A(\gamma^\mu\gamma^5)_{\alpha\rho}(\gamma^\mu\gamma^5)_{\beta\sigma}+a_P(\gamma^5)_{\alpha\rho}(\gamma^5)_{\beta\sigma}.\end{aligned} \qquad (2)$$
両辺に順次 $(I)_{\sigma\beta},(\gamma_\lambda)_{\sigma\beta},(\sigma_{\epsilon\delta})_{\sigma\beta},(\gamma_\lambda\gamma^5)_{\sigma\beta},(\gamma^5)_{\sigma\beta}$ を掛けてトレースの性質を使うと $a_S=a_P=a_V=-a_A=2a_T=1/4$ となる。つまり
$$(I)_{\alpha\sigma}(I)_{\beta\rho}=\frac{1}{4}[(I)_{\alpha\rho}(I)_{\beta\sigma}+(\gamma^\mu)_{\alpha\rho}(\gamma_\mu)_{\beta\sigma}+(\sigma^{\mu\nu})_{\alpha\rho}(\sigma_{\mu\nu})_{\beta\sigma}/2-(\gamma^\mu\gamma^5)_{\alpha\rho}(\gamma_\mu\gamma^5)_{\beta\sigma}+(\gamma^5)_{\alpha\rho}(\gamma^5)_{\beta\sigma}]. \qquad (3)$$
次に $A=B=\gamma^\tau$ として同様に順次 $(I)_{\sigma\beta},(\gamma_\lambda)_{\sigma\beta},(\sigma_{\epsilon\delta})_{\sigma\beta},(\gamma_\lambda\gamma^5)_{\sigma\beta},(\gamma^5)_{\sigma\beta}$ を掛けてトレースの性質を使えば $a_S=1$，$a_V=-1/2$，$a_T=0$，$a_A=1/2$，$a_P=-1$ を得る。以下 A,B に順次 T,A,P を入れて同様の手順で係数を求めれば

$$(\Omega)_{\alpha\sigma}(\Omega)_{\beta\rho}=\begin{pmatrix}1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4\\ 1 & -1/2 & 0 & -1/2 & -1\\ 3/2 & 0 & -1/2 & 0 & 3/2\\ 1 & 1/2 & 0 & 1/2 & -1\\ 1/4 & -1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4\end{pmatrix}(\Omega)_{\alpha\rho}(\Omega)_{\beta\sigma}.$$

これから

$$[\gamma^\mu(1-\gamma^5)]_{\alpha\sigma}[\gamma_\mu(1-\gamma^5)]_{\beta\rho}=-[\gamma^\mu(1-\gamma^5)]_{\alpha\rho}[\gamma_\mu(1-\gamma^5)]_{\beta\sigma}$$

がわかる。$\alpha, \sigma, \beta, \rho$ をそれぞれ $\bar{e}, \nu_e, \bar{\nu}_e, e$ の添字とすれば，上式は (13.51) から Fierz の組み替えによって導かれたことを示す。

13.10 (13.68) の $R_\mu=1+2\,\mathrm{Re}(r)\,c_V{}^2+|r|^2(c_V{}^2+c_A{}^2)^2$ に (13.61) の r を代入して，$s=M_Z^2$ とすれば

$$R_\mu=1+2\left(\frac{G}{e^2}\right)^2\left|\frac{M_Z{}^3}{\Gamma_Z}\right|^2(c_V{}^2+c_A{}^2)^2$$

となるから，これに $c_V\simeq 0$ $(\sin^2\theta_W\simeq 1/4)$，$c_A=-1/2$ を用いれば

$$R_\mu\simeq 1+2\left(\frac{1}{2}\right)^4\left(\frac{GM_Z{}^3}{e^2\Gamma_Z}\right)^2=173.$$

ここで $M_Z=90$ GeV，$\Gamma_Z=2.5$ GeV^2，$G=1.166\times 10^{-5}$ GeV^{-2} を用いた。

13.11 (13.70) の第 3 項が主な寄与を与え，第 2 項は $s=M_Z^2$ では 0 であるから，前問と同様に $\sin^2\theta_W=1/4$ として $c_A{}^u=1/2$，$c_V{}^u=1/6$，$c_A{}^d=-1/2$，$c_V{}^d=-1/3$ を用いれば，

$$\frac{R_q}{R_\mu}=3\frac{(c_V{}^q)^2+(c_A{}^q)^2}{(c_V{}^\mu)^2+(c_A{}^\mu)^2}=3\frac{(c_V{}^q)^2+(c_A{}^q)^2}{0+(-1/2)^2}$$

だから，

$$\frac{R_u}{R_\mu}=3\times\frac{10}{9},\qquad \frac{R_d}{R_\mu}=3\times\frac{13}{9}$$

となる。3 世代を考慮すれば

$$R\,(\text{ハドロン})=3(R_u+R_d)=3\times 3\left(\frac{10}{9}+\frac{13}{9}\right)R_\mu=23R_\mu.$$

前問の $R_\mu=173$ を用いて

$$R\,(\text{ハドロン})\simeq 4000.$$

13.12* $\mathcal{M}_\gamma=-\dfrac{e^2Q_q}{k^2}(\bar{e}\gamma^\mu e)(\bar{q}\gamma_\mu q)$,

$$\mathcal{M}_Z=-\frac{g^2}{4\cos^2\theta_W}[\bar{e}\gamma^\nu(c_V{}^e-c_A{}^e\gamma^5)e]\left(\frac{g_{\nu\sigma}-k_\nu k_\sigma/M_Z{}^2}{k^2-M_Z{}^2}\right)[\bar{q}\gamma^\sigma(c_V{}^q-c_A{}^q\gamma^5)q].$$

$k^2\ll M_Z{}^2$，$\rho=1$ を仮定して $G/\sqrt{2}=g^2/8M_Z{}^2\cos^2\theta_W$ とおけば

$$\mathcal{M}_Z\simeq-\sqrt{2}\,G[\bar{e}\gamma^\nu(c_V{}^e-c_A{}^e\gamma^5)e][\bar{q}\gamma_\nu(c_V{}^q-c_A{}^q\gamma^5)q],$$

$$\mathcal{M}=\mathcal{M}_\gamma+\mathcal{M}_Z$$

だから，$k^2\ll M_Z{}^2$ の範囲ではよい近似で

$$|\mathcal{M}|^2\simeq|\mathcal{M}_\gamma|^2+2\,\mathrm{Re}\,\mathcal{M}_\gamma{}^\dagger\mathcal{M}_Z$$

が成り立つ。

$$\begin{aligned}(c_V-c_A\gamma^5)u&=(c_V-c_A)(1/2)(1+\gamma^5)u+(c_V+c_A)(1/2)(1-\gamma^5)u\\&=(c_V-c_A)u_R+(c_V+c_A)u_L\end{aligned}$$

を用い，始状態の電子を e_L, e_R として $e_Lq_{L,R}\to e_Lq_{L,R}$，$e_Rq_{L,R}\to e_Rq_{L,R}$ を計算し，それぞれ $|\mathcal{M}|_R{}^2$，$|\mathcal{M}|_L{}^2$ とすれば，電磁相互作用はパリティを保存するから

$$|\mathcal{M}|_R{}^2-|\mathcal{M}|_L{}^2=2\,\mathrm{Re}(\mathcal{M}_\gamma{}^\dagger\mathcal{M}_Z)_R-2\,\mathrm{Re}(\mathcal{M}_\gamma{}^\dagger\mathcal{M}_Z)_L.$$

粒子の質量をすべて無視すれば，$p_1(p_1')$, $p_2(p_2')$ を電子，クォークの始(終)状態運動量として

$$2(\mathcal{M}_\gamma{}^\dagger \mathcal{M}_Z)_R = \frac{2\sqrt{2}\,Ge^2Q_q}{k^2}\mathrm{Tr}\left[\gamma^\mu \frac{1+\gamma^5}{2}\not{p}_1{}'\gamma_\nu(c_V{}^e - c_A{}^e\gamma^5)\not{p}_1\right]\frac{1}{2}\mathrm{Tr}\left[\gamma_\mu \not{p}_2{}'\gamma^\nu(c_V{}^q - c_A{}^q\gamma^5)\not{p}_2\right]$$

となる。始状態クォークのスピンにつき平均，終状態電子およびクォークのスピンについては加えてある。同様にして

$$2(\mathcal{M}_\gamma{}^\dagger \mathcal{M}_Z)_L = \frac{2\sqrt{2}\,Ge^2Q_q}{k^2}\mathrm{Tr}\left[\gamma^\mu \frac{1-\gamma^5}{2}\not{p}_1{}'\gamma_\nu(c_V{}^e - c_A{}^e\gamma^5)\not{p}_1\right]\frac{1}{2}\mathrm{Tr}[\gamma_\mu \not{p}_2{}'\gamma^\nu(c_V{}^q - c_A{}^q\gamma^5)\not{p}_2].$$

Tr の計算を実行して

$$|\mathcal{M}|_R{}^2 - |\mathcal{M}|_L{}^2 = -64G\sqrt{2}(e^2/k^2)Q_q[c_V{}^e c_A{}^q[(p_2\cdot p_1)^2 - (p_2\cdot p_1')^2] + c_A{}^e c_V{}^q[(p_2\cdot p_1)^2 + (p_2\cdot p_2')^2].$$

一方，和のほうは電磁相互作用だけでよい近似となるから

$$|\mathcal{M}|_R{}^2 + |\mathcal{M}|_L{}^2 \simeq |\mathcal{M}_\gamma|_R{}^2 + |\mathcal{M}_\gamma|_L{}^2 = \frac{32e^4Q_q{}^2}{(k^2)^2}[(p_1\cdot p_2)^2 + (p_1'\cdot p_2)^2],$$

$$p_1\cdot p_2 = xp_1\cdot P = xEM, \qquad p_1'\cdot p_2 = xp_1'\cdot P = xE'M = xEM(1-y).$$

ただし，P, M は標的の 4 元運動量および質量，$E(E')$ は電子の実験室系の始(終) 状態のエネルギー，x, y は (9.22) で定義した量である。

$$A = \frac{\dfrac{d\sigma_R}{d\Omega} - \dfrac{d\sigma_L}{d\Omega}}{\dfrac{d\sigma_R}{d\Omega} + \dfrac{d\sigma_L}{d\Omega}} = \frac{|\mathcal{M}|_R{}^2 - |\mathcal{M}|_L{}^2}{|\mathcal{M}|_R{}^2 + |\mathcal{M}|_L{}^2}$$

$$= -\left(\frac{2\sqrt{2}\,Gk^2}{e^2}\right)\frac{\sum_q c_V{}^e c_A{}^q Q_q f_q(x)[1-(1-y)^2] + \sum_q c_A{}^e c_V{}^q Q_q f_q(x)[1+(1-y)^2]}{\sum Q_q{}^2 f_q(x)[1+(1-y)^2]}$$

$$= -\left(\frac{2\sqrt{2}\,Gk^2}{e^2}\right)\left[\frac{\sum c_V{}^q c_A{}^e Q_q f_q(x)}{\sum Q_q{}^2 f_q(x)} + \frac{\sum c_A{}^q c_V{}^e Q_q f_q(x)}{\sum Q_q{}^2 f_q(x)}\frac{1-(1-y)^2}{1+(1-y)^2}\right].$$

ただし $f(x)$ は標的内クォーク分布関数である。標的はアイソスカラーで，$f_u(x) = f_d(x)$ とすれば，$f_q(x)$ は消えて $Q_u = 2/3$, $Q_d = -1/3$ とすれば

$$A = -\frac{6}{5}\left(\frac{\sqrt{2}\,Gk^2}{e^2}\right)\left[a_1 + a_2\frac{1-(1-y)^2}{1+(1-y)^2}\right]$$

と書くことができる。ただし

$$a_1 = c_A{}^e(2c_V{}^u - c_V{}^d), \qquad a_2 = c_V{}^e(2c_A{}^u - c_A{}^d)$$

である。表 13-2 の値を代入して

$$a_1 = -\frac{1}{2}\left(1 - \frac{8}{3}\sin^2\theta_W + \frac{1}{2} - \frac{2}{3}\sin^2\theta_W\right) = -\frac{3}{4}\left(1 - \frac{20}{9}\sin^2\theta_W\right),$$

$$a_2 = \left(-\frac{1}{2} + 2\sin^2\theta_W\right)\left(1 + \frac{1}{2}\right) = -\frac{3}{4}(1 - 4\sin^2\theta_W).$$

14.1* スカラー場 $\phi(x)$ のラグランジアン密度を $\mathcal{L}(\phi(x), \partial\phi/\partial x_\mu)$ とすれば，作用は

$$I = \int dt \int \mathcal{L}(\phi(x), \partial\phi/\partial x_\mu)\,d^3x \equiv \int dtL.$$

変分原理

$$\delta I = \delta\int Ldt = 0$$

を実行すれば

$$\delta I = \int dt\int d^3x\left\{\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi}\delta\phi + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial\phi/\partial x_\mu)}\delta\left(\frac{\partial\phi}{\partial x_\mu}\right)\right\}.$$

第 2 項を部分積分して境界で $\phi(x)$ の値は 0 とすれば

$$\delta I=\int dt\int d^3x\left\{\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi}-\frac{\partial}{\partial x_\mu}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial\phi/\partial x_\mu)}\right)\right\}\delta\phi.$$

これが $\delta\phi$ の如何にかかわらず 0 となるためには

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi}-\frac{\partial}{\partial x_\mu}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial\phi/\partial x_\mu)}\right)=0$$

である。これが (14.4) である。

14.2 (14.8) を (14.4) で $\phi=\psi,\bar{\psi}$ としたものに代入する。$\phi=\bar{\psi}$ とすれば，ラグランジアン密度 (14.8) は

$$\mathcal{L}=-i(\partial^\mu\bar{\psi})\gamma_\mu\psi-m\psi\bar{\psi}$$

と書き換えられる。部分積分すればわかるように，こう書いても作用 $\int\mathcal{L}\,d^4x$ は不変である。(14.4) に代入すれば Dirac 方程式 (5.7) が得られる。

14.3

$$\begin{aligned}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu A_\nu)}&=-\frac{1}{4}\frac{\partial}{\partial(\partial_\mu A_\nu)}\{(\partial_\alpha A_\beta-\partial_\beta A_\alpha)(\partial^\alpha A^\beta-\partial^\beta A^\alpha)\}\\&=-\frac{1}{2}g^{\alpha\alpha}g^{\beta\beta}\frac{\partial}{\partial(\partial_\mu A_\nu)}\{(\partial_\alpha A_\beta)^2-(\partial_\beta A_\alpha)(\partial_\alpha A_\beta)\}\\&=-\partial^\mu A^\nu+\partial^\nu A^\mu=-F^{\mu\nu}.\end{aligned}$$

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial A_\nu}=-j^\nu,$$

$$\partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu A_\nu)}\right)-\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial A_\nu}=-\partial_\mu F^{\mu\nu}+j^\nu=0.$$

すなわち

$$\partial_\mu F^{\mu\nu}=j^\nu.$$

次に両辺の ∂_ν をとれば

$$\partial_\nu\partial_\mu F^{\mu\nu}=\partial_\nu j^\nu.$$

$F^{\mu\nu}$ は μ,ν の交換に対して反対称だから $\partial_\nu\partial_\mu F^{\mu\nu}=-\partial_\nu\partial_\mu F^{\nu\mu}=-\partial_\mu\partial_\nu F^{\nu\mu}$ となり，左辺は 0 となる。すなわち

$$\partial_\nu j^\nu=0.$$

14.4

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial A_\nu}=-j^\nu+m^2A^\nu$$

となるから，運動方程式は

$$\partial_\nu F^{\nu\mu}+m^2A^\mu=j^\mu,$$

すなわち

$$(\Box+m^2)A^\mu-\partial^\mu(\partial_\nu A^\nu)=j^\mu$$

と書くことができる。ここで Lorentz ゲージをとれば

$$(\Box+m^2)A^\mu=j^\mu$$

となる。

14.5*

$$Q=\int d^3x\,j^0=-e\int d^3x\bar{\psi}\gamma^0\psi$$

だから，$\partial_\mu j^\mu=0$ を用いて

$$\frac{dQ}{dt}=\int d^3x\partial_0 j^0=-\int d^3x\partial_k j^k.$$

Gauss の定理によって

$$\frac{dQ}{dt}=\int_{表面}dS\boldsymbol{j}_n=\int_{表面}dS(-e\bar{\psi}\boldsymbol{\gamma}^k\psi)$$

となるから，表面における3次元電流の値は0であるとすれば

$$dQ/dt=0.$$

14.6* $U(1)$ 位相変換を

$$\phi(x)\to\phi'(x)=e^{i\alpha}\phi(x),\qquad \partial_\mu\phi(x)\to\partial_\mu\phi'(x)=e^{i\alpha}\partial_\mu\phi(x)$$
$$\phi^*(x)\to\phi^{*\prime}(x)=e^{-i\alpha}\phi^*(x),\quad \partial_\mu\phi^*(x)\to\partial_\mu\phi^*(x)=e^{-i\alpha}\partial_\mu\phi^*(x)$$

とすれば，無限小 $U(1)$ 変換に対するラグランジアン密度 $\mathcal{L}$ の不変性は

$$\begin{aligned}
0&=\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi}\delta\phi+\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial^\mu\phi)}\delta(\partial^\mu\phi)+\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi^*}\delta\phi^*+\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi^*)}\delta(\partial_\mu\phi^*)\\
&=\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi}(i\alpha\phi)+\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial^\mu\phi)}(i\alpha\partial^\mu\phi)+\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi^*}(-i\alpha\phi^*)+\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi^*)}(-i\alpha\partial_\mu\phi^*)\\
&=i\alpha\phi\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi}-\partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial^\mu\phi)}\right)\right]+i\alpha\partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial^\mu\phi)}\phi\right)\\
&\quad-i\alpha\phi^*\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi^*}-\partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi^*)}\right)\right]-i\alpha\partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi^*)}\phi^*\right)\\
&=i\alpha\partial_\mu[\phi(\partial^\mu\phi^*)-(\partial^\mu\phi)\phi^*].
\end{aligned}$$

$\alpha=e$ とおいて，カレントを

$$j^\mu=-ie(\phi^*\partial^\mu\phi-\phi\partial^\mu\phi^*)$$

と定義すれば，上式は $\partial_\mu j^\mu=0$ に他ならない。すなわち保存カレントが存在する。これは (3.25) で定義したカレントに他ならない。

$$\phi=\frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_1+i\phi_2),\qquad \phi^*=\frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_1-i\phi_2)$$

を (14.19) に代入すれば

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}&=\frac{1}{2}(\partial_\mu\phi_1)(\partial^\mu\phi_1)+\frac{1}{2}m^2\phi_1{}^2+\frac{1}{2}(\partial_\mu\phi^2)(\partial^\mu\phi_2)+\frac{1}{2}m^2\phi_2{}^2\\
&=\mathcal{L}(\phi_1)+\mathcal{L}(\phi_2)
\end{aligned}$$

が容易に確かめられる。

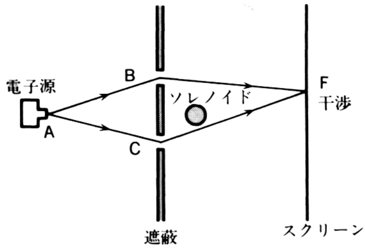
14.7* 古典電磁気学では，荷電粒子の運動は電場 $\boldsymbol{E}$ や磁場 $\boldsymbol{B}$ との局所的相互作用である。スカラーポテンシャル V やベクトルポテンシャル $\boldsymbol{A}$ が0でないとしても，$\boldsymbol{E},\boldsymbol{B}$ 自身が0ならば，荷電粒子は場から力を受けない。

しかし，量子力学では事情が異なる。荷電粒子（たとえば電子）が $\boldsymbol{B}=0$ の空間を通過する場合でも，電子は干渉効果によって磁場を“感じてしまう”のである。このことを初めて指摘したのがAharonovと Bohm であった（Y. Aharonov and D. Bohm, Phys. Rev. **115** (1959) 485, **130** (1963) 1625）。この現象をAharonov-Bohm効果（A-B効果）と呼んでいる。これに対して，外村らの電子線ホログラフィーによる実験の肯定的結果は，ほとんど決定的といえよう（A. Tonomura et al., Phys. Rev. Lett. **51** (1983) 331）。

原著者らがあげている後の文献が，本章との関連で非Abel的ゲージ場や単磁極への拡張なので，これは読者に読んで頂く。ここでは，最初の文献の程度でA-B効果を簡単に述べておこう。

図のように，ソレノイドは内部の磁場 $\boldsymbol{B}$（紙面に垂直）が外の空間に洩れないよう，理想的に無限に長い。つまり磁場は $\boldsymbol{B}\neq 0$（ソレノイド内），$\boldsymbol{B}=0$（外の空間）である。Aの源から射出された電子は，遮蔽にあけた2つのスリットを通過して，それぞれ径路 ABF, ACF を通り右側のスクリーン上Fに達する。径路上で波動関数は

$$\boldsymbol{t}\cdot(i\nabla+e\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}))\psi=0$$



を満足する。ここに $\boldsymbol{t}$ は径路上の単位接線ベクトルである。A で $\psi=\psi_1+\psi_2$ のように 2 つに分れた電子の波動関数は，F においてそれぞれ

$$\psi_1'=\exp\left(ie\int_{\mathrm{ABF}}^{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{x}'\right)\psi_1,\quad \psi_2'=\exp\left(ie\int_{\mathrm{ACF}}^{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{x}'\right)\psi_2$$

となり，

$$\psi'=\psi_1'+\psi_2'$$

である。したがって F における干渉のパターンは，ψ_1' と ψ_2' の位相差

$$\begin{Bmatrix}\cos\\ \sin\end{Bmatrix}\left[e\oint\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}')\cdot d\boldsymbol{x}'\right]=\begin{Bmatrix}\cos\\ \sin\end{Bmatrix}\left[e\int(\nabla\times\boldsymbol{A})\cdot\hat{\boldsymbol{n}}\,dS\right]$$

$$=\begin{Bmatrix}\cos\\ \sin\end{Bmatrix}\left[e\int\boldsymbol{B}\cdot\hat{\boldsymbol{n}}\,dS\right]=\begin{Bmatrix}\cos\\ \sin\end{Bmatrix}e\boldsymbol{\Phi}$$

となる。ここで $\boldsymbol{\Phi}$ は磁場 $\boldsymbol{B}$ の磁束である。すなわち，電子は磁場 $\boldsymbol{B}=0$ の空間を通過してきたにもかかわらず，$\boldsymbol{\Phi}$ に依存し，$\boldsymbol{\Phi}$ の値が変われば，それに応じて干渉のパターンが変化する。これが，$\boldsymbol{B}=0$ の空間を通過する電子でも，干渉効果により "$\boldsymbol{B}$ を感ずる"，という A-B 効果である。電磁相互作用の近接作用を担っているのはベクトルポテンシャルである，ということができる。前記の外村らの実験は，磁場の洩れをなくし，彼らの開発した電子線ホログラフィーの新技術を駆使して，みごとに A-B 効果の実験的検証に成功したのである。

A-B 効果の詳細に関しては，大貫義郎，『物理学最前線 9』を読まれたい。

14.8 $U^\dagger U=1$ は $(\det U)^*(\det U)=1$ を意味する。したがって実数 ϕ を用いて $U=e^{i\phi}$ と書くことができる。また，$U_{ij}=\delta_{ij}+\varepsilon_{ij}$ と書けば，$\det U=1+\mathrm{Tr}(\varepsilon)+O(\varepsilon^2)$ である。$U=e^{i\alpha_a T_a}$ とすれば，$\mathrm{Tr}(T_a)=0$ に他ならない。最後に α_a を無限小とすれば $U^\dagger=U^{-1}$ から

$$1-i\alpha_a{}^*T_a{}^\dagger=1-i\alpha_aT_a$$

が得られ，

$$\alpha_aT_a=\alpha_a{}^*T_a{}^\dagger$$

が示された。

14.9 通常 $T_a\equiv\lambda_a/2$ と書く。(14.32) と (2.44) を比較すれば，これが同じ行列を表していることがわかる。Pauli 行列と同じく，$\mathrm{Tr}(\lambda_a\lambda_b)=2\delta_{ab}$ が成り立つ。これと (2.44) を組み合わせれば

$$\mathrm{Tr}(\lambda_c[\lambda_a,\ \lambda_b])=4if_{abc}$$

が得られる。これから f_{abc} ば完全反対称であることを示すのは容易である。a と b に関して反対称であることは自明。b と c の対に関しては $\mathrm{Tr}(ABC)=\mathrm{Tr}(CAB)$ により

$$4if_{acb}=\mathrm{Tr}(\lambda_b[\lambda_a,\ \lambda_c])=-\mathrm{Tr}(\lambda_c[\lambda_a,\ \lambda_b])=-4if_{abc}$$

となる。

14.10 QED では場の強さのテンソル (14.27) は

$$[D_\mu,\ D_\nu]=-ieF_{\mu\nu}$$

によって導入した。ただし，D_μ は共変微分 (14.24) である。このやり方はどんなゲージ場に対しても正しい (Itzykson and Zuber (1980))。QCD の場合には

$$[D_\mu,\ D_\nu]=igT_aG_{\mu\nu}{}^a$$

である。(14.35) を左辺に代入すれば $G_{\mu\nu}{}^a$ に対する (14.40) の表現が得られる。ゲージ変換

$$\psi\to e^{i\alpha_a(x)T_a}\psi\equiv U\psi$$

に対して，$D_\mu\to VD_\mu V^{-1}$ のように変換するから $G_{\mu\nu}\to UG_{\mu\nu}U^{-1}$ となる。したがってゲージ不変量は ((14.39) 参照)

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}(G_{\mu\nu}G^{\mu\nu})\to\mathrm{Tr}(UG_{\mu\nu}G^{\mu\nu}U^{-1})&=\mathrm{Tr}(UG_{\mu\nu}U^{-1}UG^{\mu\nu}U^{-1})\\&=\mathrm{Tr}(G_{\mu\nu}G^{\mu\nu})\end{aligned}$$

である。

14.11 (14.40) を (14.39) に代入してグルーオン場を 3 個含む項を取り出す。異なる項の中でくり返し現れる，和をとる添字を適当につけ直せば

$$(i\mathcal{L})_{3g}=-\frac{g}{2}f_{abc}(g_{\mu\nu}p_{1\lambda}-g_{\lambda\mu}p_{1\nu})\,G_a{}^\mu G_b{}^\nu G_c{}^\lambda$$

を得る。ここで $i\partial_\mu G_a{}^\mu=p_{1\mu}G_a{}^\mu$ の関係を用いた。3 グルーオンバーテックスは完全対称でなければならないことに注意して，可能なグルーオンの順序について全部加える。f_{abc} は完全反対称であるから，括孤の中の因子を完全反対称にしなければならない。

14.12* $$\mathcal{L}=\frac{1}{2}(\partial_\mu\phi_i)^2-\frac{1}{2}\mu^2\phi_i{}^2-\frac{1}{4}\lambda(\phi_i{}^2)^2.\qquad(\mu^2<0,\ \lambda>0)$$

ポテンシャルを最小にする ϕ_i の値は

$$\frac{\partial V}{\partial\phi_i}=-\phi_i(\mu^2+\lambda\phi_i{}^2)=0$$

により $\phi_i{}^2=-\mu^2/\lambda\equiv v^2$ である。$\mathcal{L}$ をポテンシャル最小の点のまわりで展開するために，その点を $\phi_1=0$，$\phi_2=0$，$\phi_3=v$ ととってよいから，$\phi_i(x)$ を

$$\phi_1(x)=\xi(x),\qquad\phi_2(x)=\eta(x),\qquad\phi_3(x)=v+\zeta(x)$$

と展開して $\mathcal{L}$ に代入すれば

$$\mathcal{L}=\frac{1}{2}(\partial_\mu\xi)^2+\frac{1}{2}(\partial_\mu\eta)^2+\frac{1}{2}(\partial_\mu\zeta)^2+\mu^2\zeta^2+(\xi,\eta,\zeta\ \text{の 3 次, 4 次の項})$$

を得る。$m_3=\sqrt{-2\mu^2}$ とすれば

$$\mathcal{L}=\frac{1}{2}(\partial_\mu\xi)^2+\frac{1}{2}(\partial_\mu\eta)^2+\frac{1}{2}(\partial_\mu\zeta)^2+\frac{1}{2}m_3{}^2\zeta^2+(\xi,\eta,\zeta\ \text{の 3 次, 4 次の項}),$$

すなわち，$\mathcal{L}$ は質量 $m_3=\sqrt{-2\mu^2}$ のスカラー場と，2 つの質量を持たない Goldstone ボソン場を記述している。

14.13 ラグランジアンの中で関係する項は [(14.65) および (14.74) 参照]，$\phi_j=v\,\delta_{j3}$ を用いて

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}|igT_kW_k\phi|^2&=\frac{1}{2}|ig(-i\varepsilon_{ijk})\,W_k\phi_j|^2\\&=\frac{1}{2}g^2v^2\varepsilon_{i3k}\varepsilon_{i3l}W_kW_l=\frac{1}{2}g^2v^2(W_1{}^2+W_2{}^2)\end{aligned}$$

となる。2 個のボソンは質量 gv を獲得するが，第 3 のボソン W_3 は依然として質量を持たない。

15.1* $W^{3\mu}=\sin\theta_W A^\mu+\cos\theta_W Z^\mu$, $B^\mu=\cos\theta_W A^\mu-\sin\theta_W Z^\mu$ であるから

$$-igJ_\mu{}^3W^{3\mu}-i\frac{g'}{2}j_\mu{}^YB^\mu=-igJ_\mu{}^3(\sin\theta_W A^\mu+\cos\theta_W Z^\mu)-i\frac{g'}{2}j_\mu{}^Y(\cos\theta_W A^\mu-\sin\theta_W Z^\mu)$$

$$=-i\left(g\sin\theta_W J_\mu{}^3+g'\cos\theta_W\frac{j_\mu{}^Y}{2}\right)A^\mu-i\left(g\cos\theta_W J_\mu{}^3-g'\sin\theta_W\frac{j_\mu{}^Y}{2}\right)Z^\mu.$$

第1項は電磁相互作用を表すから $-iej_\mu{}^{em}A^\mu=-ie\bar{\psi}\gamma_\mu Q\psi A^\mu$, $Q=T^3+Y/2$, すなわち $-ie(J_\mu{}^3+j_\mu{}^Y/2)$ に等しいはずである。そのためには

$$e=g\sin\theta_W=g'\cos\theta_W$$

が成り立たなければならない。これを用いて上式の第2項を書き直せば

$$-igJ_\mu{}^3W^{3\mu}-i\frac{g'}{2}j_\mu{}^YB^\mu=-iej_\mu{}^{em}A^\mu-\frac{ie}{\sin\theta_W\cos\theta_W}[J_\mu{}^3-\sin\theta_W j_\mu{}^{em}]Z^\mu$$

を得る。

15.2* Weinberg-Salam 模型によれば, (15.18) により

$$M_W=\frac{1}{2}vg$$

だから, これを (12.15) と組み合わせて

$$\frac{1}{2v^2}=\frac{g^2}{8M_W{}^2}=\frac{G}{\sqrt{2}}$$

を得る。これから G として第12章の G_μ の値 (12.44) を用いると

$$v=246\,\text{GeV}.$$

上の関係により M_W を g と G で表して $e=g\sin\theta_W$ を用いれば

$$M_W=\frac{1}{\sin\theta_W}\left[\frac{\sqrt{2}\,e^2}{8G}\right]^{1/2}.$$

$e^2=4\pi/137$, $G=1.166\times10^{-5}\,\text{GeV}^{-2}$ を代入すれば

$$M_W=\frac{37.3}{\sin\theta_W}\,\text{GeV}$$

となる。したがって

$$M_Z=\frac{M_W}{\cos\theta_W}=\frac{37.3}{\sin\theta_W\cos\theta_W}=\frac{74.6}{\sin2\theta_W}\,\text{GeV}.$$

ここで $\sin^2\theta_W$ に実験値 (13.54) を代入すると

$$M_W=77.1\,\text{GeV},\qquad M_Z=88.1\,\text{GeV}.$$

15.3 ラグランジアン (15.17) を, ϕ の真空期待値を ϕ_0 として

$$\left|\frac{g}{\sqrt{2}}(T^+W_\mu{}^++T^-W_\mu{}^-)\phi_0+\left(gT^3W_\mu{}^3+\frac{g'}{2}YB_\mu\right)\phi_0\right|^2$$

と書き, W の質量項を取り出せば

$$M_W{}^2=\frac{g^2}{2}\phi_0{}^+(T^+T^-+T^-T^+)\phi_0$$

$$=g^2\left(\frac{v}{\sqrt{2}}\right)^2[T(T+1)-(T^3)^2].$$

$T=3$, $T^3=2$ を代入して

$$M_W{}^2=4g^2v^2.$$

また (15.19) によって

$$\frac{1}{2}M_Z{}^2Z_\mu{}^2=\frac{v^2}{2}4(gW_\mu{}^3-g'B_\mu)^2=\frac{2g^2v^2}{\cos^2\theta_W}Z_\mu{}^2.$$

したがって，標準模型の場合と同様に $M_W/M_Z=\cos\theta_W$ が成り立つ。

15.4* Higgs スカラーを ϕ_i $(i=1,2,\cdots,N)$ とすれば，前問と同様にして，ラグランジアンの $W^\pm$ および Z の質量項を取り出すことができる。すなわち，(15.17) を拡張して $T_\pm=(1/\sqrt{2})(T_1\pm iT_2)$，$T_+T_-+T_-T_+=T^2-T_3{}^2$ を用いれば

$$\mathcal{L}_M=\frac{g^2}{2}W_\mu{}^+W^{-\mu}\sum_{i=1}^{N}[T_i(T_i+1)-T_{3i}{}^2]v_i{}^2+\frac{g^2}{2\cos^2\theta_W}Z_\mu Z^\mu\sum_{i=1}^{N}T_{3i}{}^2v_i{}^2$$

となる。ただし

$$T^2v_i=T_i(T_i+1)v_i,\qquad T_3v_i=T_{3i}v_i=-\frac{Y_i}{2}v_i$$

である。したがって $W^\pm$, Z の質量は

$$M_W{}^2=\frac{g^2}{2}\sum_{i=1}^{N}\left[T_i(T_i+1)-\frac{Y_i{}^2}{4}\right]v_i{}^2,$$

$$M_Z{}^2=\frac{g^2}{\cos^2\theta_W}\sum_{i=1}^{N}\frac{Y_i{}^2}{4}v_i{}^2$$

となるから求める結果を得る：

$$\rho=\left(\frac{M_W}{M_Z\cos\theta_W}\right)^2=\frac{\sum_{i=1}^{N}v_i{}^2\left[T_i(T_i+1)-\frac{1}{4}Y_i{}^2\right]}{\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{2}v_i{}^2Y_i{}^2}.$$

ϕ_i がすべて $SU(2)$ 2 重項だとすれば

$$T_i(T_i+1)-\frac{Y_i{}^2}{4}=\frac{1}{2}$$

であるから

$$\rho=1$$

を得る。また $\rho=1$ とすれば $T_i\geq 0$ だから，(15.28) を満足するのは $T_i=1/2$，すなわち Higgs は $SU(2)$ 2 重項である。

15.5* (15.13) のラグランジアンの中で関係する部分を取り出して，$\phi(x)$ に

$$\phi(x)=\sqrt{\frac{1}{2}}\begin{pmatrix}0\\ v+h(x)\end{pmatrix}$$

を代入すれば

$$\left|\left(-ig\frac{\boldsymbol{\tau}}{2}\cdot\boldsymbol{W}_\mu-i\frac{g'}{2}B_\mu\right)\phi\right|^2=\frac{1}{8}\left|\begin{pmatrix}gW_\mu{}^3+g'B_\mu & g(W_\mu{}^1-iW_\mu{}^2)\\ g(W_\mu{}^1+iW_\mu{}^2) & -gW_\mu{}^3-g'B_\mu\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\ v+h(x)\end{pmatrix}\right|^2$$

$$=\frac{g^2}{8}(v+h(x))^2\cdot 2W_\mu{}^+W^{-\mu}+\frac{1}{8}(v+h(x))^2(W_\mu{}^3,B_\mu)\begin{pmatrix}g^2 & gg'\\ -gg' & g'^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}W^{3\mu}\\ B^\mu\end{pmatrix}.$$

ここで，$W_\mu{}^\pm=(W_\mu{}^1\pm iW_\mu{}^2)/\sqrt{2}$ である。第 2 項に $W_\mu{}^3=\sin\theta_W A_\mu+\cos\theta_W Z_\mu$, $B_\mu=\cos\theta_W A_\mu-\sin\theta_W Z_\mu$ を代入して，$e=g\sin\theta_W=g'\cos\theta_W$ を使えば $Z_\mu Z^\mu$ の項だけ残り

$$\text{第 2 項}=(1/8)(v+h(x))^2(g^2\cos^2\theta_W+g'^2\sin^2\theta_W+2gg'\sin\theta_W\cos\theta_W)Z_\mu Z^\mu$$
$$=(1/8)(v+h(x))^2[g^2+g'^2-(g\sin\theta_W-g'\cos\theta_W)^2]Z_\mu Z^\mu=(1/8)(v+h(x))^2(g^2+g'^2)$$

となる。すなわち

$$\left|\left(-ig\frac{\boldsymbol{\tau}}{2}\cdot\boldsymbol{W}_\mu-i\frac{g'}{2}B_\mu\right)\begin{pmatrix}0\\ \dfrac{v+h(x)}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}\right|^2=\frac{g^2}{8}(v+h(x))^2\cdot 2W_\mu{}^+W^{-\mu}+$$
$$\frac{1}{8}(v+h(x))^2(g^2+g'^2)Z_\mu Z^\mu.$$

したがって，(15.25) の $M_W{}^2=g^2v^2/4$，(15.21) の $M_Z{}^2=(g^2+g'^2)v^2/4$ を使えば

$$\mathcal{L}_{\mathrm{hW^+W^-}}=(g/2)(gv)(hW_\mu{}^+W^{-\mu})=gM_{\mathrm{W}}(W_\mu{}^+W^{-\mu}h),$$
$$\mathcal{L}_{\mathrm{hhW^+W^-}}=(g^2/4)(hhW_\mu{}^+W^{-\mu}),$$
$$\mathcal{L}_{\mathrm{hZZ}}=(v/4)(g^2+g'^2)(hZ_\mu Z^\mu)=\frac{g}{2M_{\mathrm{W}}}M_{\mathrm{Z}}{}^2(hZ_\mu Z^\mu)$$
$$=\frac{gM_{\mathrm{Z}}}{2\cos\theta_{\mathrm{W}}}(hZ_\mu Z^\mu),$$
$$\mathcal{L}_{\mathrm{hhZZ}}=\frac{g^2+g'^2}{8}(hhZ_\mu Z^\mu)=\frac{g^2}{8\cos^2\theta_{\mathrm{W}}}(hhZ_\mu Z^\mu).$$

以上により，各バーテックス因子は，それぞれ次のようになることがわかる：

$$\mathrm{hW^+W^-}：igM_{\mathrm{W}},\qquad \mathrm{hhW^+W^-}：ig^2/4$$
$$\mathrm{hZZ}：\frac{igM_{\mathrm{Z}}}{2\cos\theta_{\mathrm{W}}},\qquad \mathrm{hhZZ}：\frac{ig^2}{8\cos^2\theta_{\mathrm{W}}}$$

15.6* $\mathcal{L}=\partial_\mu\phi^\dagger\partial^\mu\phi-\mu^2\phi^\dagger\phi-\lambda(\phi^\dagger\phi)^2=T-V(\phi)$，$V(\phi)=\mu^2\phi^\dagger\phi+\lambda(\phi^\dagger\phi)^2$ とする。ここで $\phi=(\phi_1+i\phi_2)/\sqrt{2}$, $\phi^\dagger=(\phi_1-i\phi_2)/\sqrt{2}$ で ϕ_1,ϕ_2 は実スカラー場である。μ^2 と λ は定数であるが $\lambda>0$ とする。$\lambda<0$ だとすると $V(\phi)\to-\infty$ ($|\phi|^2=\phi^\dagger\phi\to\infty$ のとき) でポテンシャルが最小値を持たず，基底状態が存在しなくなってしまう。

さて，ポテンシャルが最小になるのは

$$\frac{\partial V(\phi)}{\partial\phi_j}=(\mu^2+2\lambda|\phi|^2)\phi_j=0\qquad(j=1,2)$$

を満足する $\phi_j=\phi_j{}^v$ が存在するときである。すなわち

$$\phi_j{}^v=0,\qquad |\phi^v|^2=-\mu^2/2\lambda>0$$

のときである。$|\phi^v|^2=v^2$ として $-\mu^2=m_{\mathrm{h}}{}^2$ とおけば

$$m_{\mathrm{h}}{}^2=2v^2\lambda$$

を得る。

15.7* (15.52) を用いて

$$C^2\left(\frac{1}{g_1{}^2}-\frac{1}{g_2{}^2}\right)=2C^2(b_1-b_2)\log\frac{M_{\mathrm{X}}}{\mu}$$

が成り立つから，(15.56) および $e=g_2\sin\theta_{\mathrm{W}}$ とおいて

$$2C^2(b_1-b_2)\log\frac{M_{\mathrm{X}}}{\mu}=\frac{1}{e^2}[1-(1+C^2)\sin^2\theta_{\mathrm{W}}]=\frac{1}{4\pi\alpha}[1-(1+C^2)\sin^2\theta_{\mathrm{W}}].$$

$b_2-b_2=(22/3)\cdot\{1/(4\pi)^2\}$ および (15.57) を用いて

$$\frac{22C^2}{3}\cdot\frac{1}{(4\pi)^2}\,\frac{12\pi}{11(1+3C^2)}\left(\frac{1}{\alpha}-\frac{1+C^2}{\alpha_s}\right)=\frac{1}{4\pi\alpha}[1-(1+C^2)\sin^2\theta_{\mathrm{W}}],$$

すなわち

$$\frac{2C^2}{1+3C^2}\left[1-\frac{1+C^2}{\alpha_s}\alpha\right]=1-(1+C^2)\sin^2\theta_{\mathrm{W}},$$
$$\frac{1+3C^2}{1+3C^2}-\frac{1+C^2}{1+3C^2}-\frac{2C^2(1+C^2)}{1+3C^2}\frac{\alpha}{\alpha_s}=1-(1+C^2)\sin^2\theta_{\mathrm{W}},$$

よって

$$\sin^2\theta_{\mathrm{W}}=\frac{1}{1+3C^2}\left(1+2C^2\frac{\alpha}{\alpha_s}\right).$$

15.8 X, Y は

$$(\mathrm{u},\ \mathrm{d})_{\mathrm{L}}\to \mathrm{e_L}{}^++(\overline{\mathrm{Y}},\ \overline{\mathrm{X}})$$

によりクォークをレプトンに転換させるから，電荷はそれぞれ

$$Q_X=\frac{4}{3},\qquad Q_Y=\frac{1}{3}$$

である。

15.9 大統一質量を M_X とすれば，$Q \leqq M_X$ までは各結合定数 $\alpha_i(Q) \equiv g_i{}^2(Q)/4\pi$ $(i=1,2,3)$ は

$$\frac{d\,\alpha_i(Q)}{d\log Q}=b_i\alpha_i{}^2(Q)+O(\alpha_2{}^3)$$

の解として図 15·4 のように変化する。$Q \geqq M_X$ では，理論は大統一群 $G \equiv SU(5)$ の対称性に従うとすれば，$g_1=g_2=g_3=g$ となり，b_i に (15.64) の b_N $(N=5)$ を用いた方程式が成り立つ。それを $g^2(Q=M_X) \equiv g_G{}^2=$大統一結合定数の条件で解いて

$$\frac{1}{g^2(Q)}=\frac{1}{g_G{}^2}+2b_5\log\frac{M_X}{Q}\quad \text{すなわち}\quad g^2(Q)=\frac{g_G{}^2}{1+g_G{}^2 b_5\log(M_X/Q)}$$

を得る。ここで $b_5=(1/4\pi)^2[(-11/3)\times 5+(4/3)n_g]$，$n_g$ はフェルミオンの世代数であり，Higgs 粒子の閉線は無視した。たとえば $n_g=3$ とすれば，$b_5<0$ だから，$Q \geqq M$ で $\alpha(Q) \equiv g^2(Q)/4\pi$ は Q の増加とともに図 15·4 のように減少していく。

各章の参考書

＊印は邦訳があるもので，後の参考文献欄に書名，訳者，出版社を記してある。

第1章

Bransden, Evans, and Major (1973), Cheng and O'Neill (1979), Gasiorowicz (1967), Muirhead (1965), Parl (1974) および Perkins (1982) の各書の最初の部分を読むとよい。また Mulvey (1981) の中の Adams, Peierls および Wilkinson の論文, Fabjan and Ludlam (1982), Harari (1978) や Kleinknecht (1982) も参考になる。

第 2 章

群論：Carruthers (1966), Georgi (1982), Hammermesh (1963), Lipkin (1966, 1973), Schiff (1955)* および Wybourne (1974). クォーク：Close (1979), Feynman (1972), Leader and Predazzi (1982), Lipkin (1973) および Rosner (1974).

第3章

Aitchison (1972), Aitchison and Hey (1982)*, Bjorken and Drell (1964) および Feynman (1961). 摂動論：Merzbacher (1961) および Messiah (1962). 相対論的運動学：Byckling and Kajantie (1973) および Martin and Spearman (1970).

第4章

Aitchison (1972), Aitchison and Hey (1982)* および Feynman (1961). 断面積：Martin and Spearman (1970), Pilkuhn (1967) および Scadron (1979).

第5章

Aitchison (1972), Bethe and Jackiw (1968), Bjorken and Drell (1964), Gasiorowicz (1967) および Sakurai (1967).

第6章

Aitchison (1972), Aitchison and Hey (1982)*, Bjorken and Drell (1964), Feynman (1961, 1962), Gasiorowicz (1967), Källén (1972), Sakurai (1967) および Scadron (1979).

第7章

Bjorken and Drell (1964), Gastmans (1975), Gasiorowicz (1967), Feynman (1962), Itzykson and Zuber (1980), Jauch and Rohrlich (1976), Källén (1972), Lautrup

(1975), Lee (1980), Lurie (1968), Mandl (1966)*, Ramond (1981), Sakurai (1961) および Scadron (1979). QED の検証：Cheng and O'Neill および Perkins (1982). QCD：Aitchison and Hey (1982)* および Field (1979).

第 8 章

Close (1979), Feynman (1972), Gilman (1972), Llewellyn Smith (1972), Perl (1974) および West (1975). 非相対論的形状因子：Bethe and Jackiw (1968).

第 9 章

Close (1979), Feynman (1972), Leader and Predazzi (1982), Perl (1974) および Perkins (1982).

第 10·11 章

Aitchison and Hey (1982)*, Altarelli (1978, 1882), Collins and Martin (1984), Ellis and Sachrajda (1979), Field (1979), Kogut and Susskind (1973), Mess and Wiik (1983), Pennington (1983), Reya (1981), Söding and Wolf (1981), Wiik and Wolf (1979) および Wilczek (1982).

第 12 章

Bailin (1982), Bjorken and Drell (1964), Commins (1973), Feynman (1972), Gaillard and Maiani (1979), Gasiorowicz (1967), Harari (1978), Källén (1964), Maiani (1976), Marshak (1969), Muirhead (1965), Okun (1982), Perkins (1982), Pilkuhn (1979) および Steinberger (1976).

第 13 章

Bailin (1982), Bilenky and Hosek (1982), Gaillard and Maiani (1979), Ellis et al. (1982), Harari (1978), Hung and Sakurai (1981), Maiani (1976) および Weinberg (1974).

第 14 章

Abers and Lee (1973), Aitchison (1982), Aitchison and Hey (1982)*, Baillin (1982), Beg and Sirlin (1974), Bernstein (1974), Feynman (1977), Fritzsch and Minkowski (1981), Gaillard and Maiani (1979), Gastmans (1975), 't Hooft and Veltman (1973), Iliopoulos (1976), Maiani (1976), Okun (1982), Politzer (1975), Ramond (1981), Taylor (1976) および Weinberg (1974).

第 15 章

第 13, 14 章と同じ。さらに Dolgov and Zeldovich (1981), Ellis (1981), Mulvey (1981) の中の Ellis and Salam の論文，Langacker (1981), Llewellyn Smith (1974), Steigman (1979), および Weinberg (1977)*.

参考文献

邦訳のある本は＊印をつけ，最後にまとめて掲げた。

Abers, E., and Lee, B. W. (1973) "Gauge Theories." *Phys. Rep.* **9C**, 1.

Aitchison, I. J. R. (1972) *Relativistic Quantum Mechanics*. Macmillan, London.

Aitchison, I. J. R. (1982) *An Informal Introduction to Gauge Field Theories*. Cambridge University Press, Cambridge, England. ＊1

Aitchison, I. J. R., and Hey, A. J. G. (1982) *Gauge Theories in Particle Physics*. Adam Hilger Ltd., Bristol. ＊2

Altarelli, G. (1978) In *New Phenomena in Lepton-Hadron Physics*. NATO Advanced Study Series, Series B, Vol. 49. Plenum Press, New York.

Altarelli, G. (1982) "Partons in Quantum Chromodynamics." *Phys. Rep.* **81C**, 1.

Bailin, D. (1982) *Weak Interactions*. Adam Hilger Ltd., Bristol.

Beg, M. A., and Sirlin, A. (1974) "Gauge Theories of Weak Interactions." *Ann. Rev. Nucl. Sci.* **24**, 379.

Bernstein, J. (1974) "Spontaneous Symmetry Breaking, Gauge Theories and All That." *Rev. Mod. Phys.* **46**, 7.

Bethe, H. A., and Jackiw, R. (1968) *Intermediate Quantum Mechanics*. Benjamin, Reading, Mass.

Bethe, H. A., and Salpeter, E. E. (1957) *Quantum Mechanics of One and Two Electron Atoms*. Academic Press, New York.

Bilenky, S. M., and Hosek, J. (1982) "Glashow–Weinberg–Salam Theory of Electroweak Interactions and the Neutral Currents." *Phys. Rep.* **90C**, 73.

Bjorken, J. D., and Drell, S. D. (1964) *Relativistic Quantum Mechanics*. McGraw-Hill, New York.

Bransden, B. H., Evans, D., and Major, J. V. (1973) *The Fundamental Particles*. Van Nostrand Reinhold, London.

Byckling, E., and Kajantie, K. (1973) *Particle Kinematics*. Wiley, New York.

Carruthers, P. (1966) *Introduction to Unitary Symmetries*, Wiley-Interscience, New York.

Cheng, D. C., and O'Neill, G. K. (1979) *Elementary Particle Physics*. Addison Wesley, Reading, Mass.

Close, F. E. (1979) *An Introduction to Quarks and Partons*. Academic Press, London.

Collins, P. D. B., and Martin A. D. (1984) Hadron Interactions. Adam Hilger Ltd., Bristol.

Commins, E. D. (1973) *Weak Interactions*. McGraw-Hill, New York.

Dokshitzer, Y. L., Dyakonov, D. I., and Trojan, S. I. (1980) "Hard Processes in Quantum Chromodynamics." *Phys. Rep.* **58C**, 269.

Dolgov, A. D., and Zeldovich, Ya. B. (1981) "Cosmology and Elementary Particles." *Rev. Mod. Phys.* **53**, 1.

Ellis, J. (1982) "Grand Unified Theories in Cosmology." *Phil. Trans. Roy. Soc. London*, **A307**, 21.

Ellis, J., Gaillard, M. K., Girardi, G., and Sorba, P. (1982) "Physics of Intermediate Vector Bosons." *Ann. Rev. Nucl. Particle Sci.* **32**, 443.

Ellis, J., and Sachrajda, C. T. (1979) In *Quarks and Leptons*. NATO Advanced Study Series, Series B, *Physics*, Vol. 61. Plenum Press, New York.

Fabjan, C. W., and Ludlam, T. (1982) "Calorimetry in High-Energy Physics." *Ann. Rev. Nucl. Particle Sci.* **32**, 335.

Feynman, R. P. (1961) *The Theory of Fundamental Processes*. Benjamin, New York.

Feynman, R. P. (1962) *Quantum Electrodynamics*. Benjamin, New York.

Feynman, R. P. (1963) *The Feynman Lectures on Physics*. Addison Wesley, Reading, Mass.

Feynman, R. P. (1972) *Photon–Hadron Interactions*. Benjamin, New York.

Feynman, R. P. (1977) In *Weak and Electromagnetic Interactions at High Energies*. Les Houches Session 29. North-Holland, Amsterdam.

Field, R. D. (1979) In *Quantum Flavordynamics, Quantum Chromodynamics and Unified Theories*. NATO Advanced Study Series, Series B, *Physics*, Vol. 54. Plenum Press, New York.

Fritzsch, H., and Minkowski, P. (1981) "Flavordynamics of Quarks and Leptons." *Phys. Rep.* **73C**, 67.

Gaillard, M. K., and Maiani, L. (1979) In *Quarks and Leptons*. NATO Advanced Study Series, Series B, *Physics*, Vol. 61. Plenum Press, New York.

Gasiorowicz, S. (1967) *Elementary Particle Physics*. Wiley, New York.

Gastmans, R. (1975) In *Weak and Electromagnetic Interactions at High Energies*. NATO Advanced Study Series, Series B, *Physics*, Vol. 13a, Plenum Press, New York.

Georgi, H. (1982) *Lie Algebras in Particle Physics*. Benjamin-Cummings, Reading, Mass.

Gilman, F. J. (1972) "Photoproduction and Electroproduction." *Phys. Rep.* **4C**, 95.

Goldstein, H. (1977) *Classical Mechanics*. Addison Wesley, Reading, Mass. *3

Halliday, D., and Resnick, R. (1970) *Fundamentals of Physics*. Wiley, New York.

Hammermesh, M. (1963) *Group Theory*. Addison Wesley, Reading, Mass.

Harari, H. (1978) "Quarks and Leptons." *Phys. Rep.* **42C**, 235.

Hung, P. Q., and Sakurai, J. J. (1981) "The Structure of Neutral Currents." *Ann. Rev. Nucl. Particle Sci.* **31**, 375.

Iliopoulos, J. (1977) "An Introduction to Gauge Theories." Proceedings of the 1977 CERN School of Physics, CERN Report 77-18. CERN, Geneva.

Itzykson, C., and Zuber, J. B. (1980) *Quantum Field Theory*. McGraw-Hill, New York.

Jauch, J. M., and Rohrlich, F. (1976) *Theory of Photons and Electrons*. Springer-Verlag, Berlin.

Källén, G. (1964) *Elementary Particle Physics*. Addison Wesley, Reading, Mass.

Källén, G. (1972) *Quantum Electrodynamics*. Addison Wesley, Reading, Mass.

Kim, J. E., Langacker, P., Levine, M., and Williams, H. H. (1981) "A Theoretical and Experimental Review of Neutral Currents." *Rev. Mod. Phys.* **53**, 211.

Kleinknecht, K. (1982) "Particle Detectors." *Phys. Rep.* **84C**, 85.

Kogut, J., and Susskind, L. (1973) "The Parton Picture of Elementary Particles." *Phys. Rep.* **8C**, 75.

Langacker, P. (1981) "Grand Unified Theories and Proton Decay." *Phys. Rep.* **72C**, 185.

Lautrup, B. (1975) In *Weak and Electromagnetic Interactions at High Energies.* NATO Advanced Study Series, Series B, *Physics*, Vol. 13a. Plenum Press, New York.

Leader, E., and Predazzi, E. (1982) *Gauge Theories and the New Physics*. Cambridge University Press, Cambridge, England.

Lee, T. D. (1980) *Particle Physics and Introduction to Field Theory*. Harwood Academic Publishers, Chur.

Lipkin, H. (1966) *Lie Groups for Pedestrians*. North-Holland, Amsterdam.

Lipkin, H. (1973) "Quark Models for Pedestrians." *Phys. Rep.* **18C**, 175.

Llewellyn Smith, C. H. (1972) "Neutrino Interactions at Accelerators." *Phys. Rep.* **3C**, 261.

Llewellyn Smith, C. H. (1974) In *Phenomenology of Particles at High Energy*. Academic Press, New York.

Lurie, D. (1968) *Particles and Fields*. Wiley-Interscience, New York.

Maiani, L. (1976) "An Elementary Introduction to Yang-Mills Theories and to their Applications to the Weak and Electromagnetic Interactions." Proceedings of the 1976 CERN School of Physics, CERN Report 76-20, CERN, Geneva.

Mandl, F. (1966) *Introduction to Quantum Field Theory*. Wiley-Interscience, New York.

Marshak, R. E., Riazuddin, and Ryan, C. P. (1969) *Theory of Weak Interactions in Particle Physics*. Wiley-Interscience, New York.

Martin, A. D., and Spearman, T. D. (1970) *Elementary Particle Theory*. North-Holland, Amsterdam.

Merzbacher, E. (1961) *Quantum Mechanics*. Wiley, New York.

Mess, K. H., and Wiik, B. H. (1983) In *Gauge Theories in High Energy Physics*. Les Houches Summer School Proc., 37.

Messiah, A. (1962) *Quantum Mechanics*. North-Holland, Amsterdam.

Muirhead, H. (1965) *The Physics of Elementary Particles*. Pergamon, London.

Mulvey, J. H. (1981) *The Nature of Matter*. Clarendon, Oxford.

Okun, L.B. (1982) Leptons and Quarks. North-Holland, Amsterdam.

Omnès, R. (1970) *Introduction to Particle Physics*. Wiley, New York.

Pennington, M. R. (1983) "Cornerstones of QCD." *Rep. Prog. Phys.* **46**, 393.

Perkins, D. H. (1982) *Introduction to High Energy Physics*. Addison Wesley, Reading, Mass.

Perl, M. (1974) *High Energy Hadron Physics*. Wiley-Interscience, New York.

Pilkuhn, H. (1967) *The Interactions of Hadrons*. North-Holland, Amsterdam.

Pilkuhn, H. (1979) *Relativistic Particle Physics*. Springer-Verlag, New York.

Politzer, H. D. (1974) "Quantum Chromodynamics." *Phys. Rep.* **14C**, 129.

Ramond, P. (1981) *Field Theory, A Modern Primer*. Benjamin-Cummings, Reading, Mass.

Reya, E. (1981) "Perturbative Quantum Chromodynamics." *Phys. Rep.* **69C**, 195.

Rose, M. E. (1957) *Elementary Theory of Angular Momentum*. Wiley, New York.

Rosner, J. (1974) "Classification and Decays of Resonant Particles." *Phys. Rep.* **11C**, 193.

Sakurai, J. J. (1967) *Advanced Quantum Mechanics*. Addison Wesley, Reading, Mass.

Scadron, M. D. (1979) *Advanced Quantum Theory*. Springer-Verlag, New York.

Schiff, L. I. (1955) *Quantum Mechanics*. Third edition. McGraw-Hill, New York. *8

Söding, P., and Wolf, G. (1981) "Experimental Evidence on QCD." *Ann. Rev. Nucl. Particle Sci.* **31**, 231.

Steigman, G. (1979) "Cosmology Confronts Particle Physics." *Ann. Rev. Nucl. Sci.* **29**, 313.

Steinberger, J. (1976) "Neutrino Interactions." Proceedings of the 1976 CERN School of Physics, CERN Report 76-20, CERN, Geneva.

Taylor, J. C. (1976) *Gauge Theories of Weak Interactions*. Cambridge University Press, Cambridge, England.

't Hooft, G., and Veltman, M. (1973) "Diagrammar." CERN Report 73-9, CERN, Geneva.

Weinberg, S. (1974) "Recent Progress in the Gauge Theories of the Weak, Electromagnetic and Strong Interactions." *Rev. Mod. Phys.* **46**, 255.

Weinberg, S. (1977) *The First Three Minutes*. A. Deutsch and Fontana, London. *9

West, G. B. (1975) "Electron Scattering from Atoms, Nuclei, Nucleons." *Phys. Rep.* **18C**, 264.

Wiik, B. H., and Wolf, G. (1979) *Electron–Positron Interactions*. Springer Tracts in Modern Physics 86, Springer-Verlag, Berlin.

Wilczek, F. (1982) "Quantum Chromodynamics: The Modern Theory of the Strong Interaction." *Ann. Rev. Nucl. Particle Sci.* **32**, 177.

Wybourne, B. G. (1974) *Classical Groups for Physicists*. Wiley, New York.

*1 藤井昭彦訳：ゲージ場入門（講談社，1985）

*2 藤井昭彦訳：ゲージ理論入門 I，II（講談社，1983，1984）

*3 瀬川富士 他訳：古典力学 上，下（吉岡書店，1959）

*4 村田良夫訳：場の量子論入門（東京図書，1971）

*5 高橋安太郎訳：量子力学（講談社，1971）

*6 小出昭一郎，田村二郎訳：量子力学 1～3（東京図書，1971）

*7 山内恭彦，森田正人訳：角運動量の基礎理論（みすず書房，1971）

*8 井上健訳：量子力学 上，下（吉岡書店，1970）

*9 小尾信彌訳：宇宙創成はじめの三分間（ダイヤモンド社，1977）

日本語の教科書を二，三挙げておこう。

1） 武田曉，宮沢弘成：素粒子物理学（裳華房，1972，修正10版）

2） 小川修三，沢田昭二，中川昌美：素粒子の複合模型（岩波書店，1980）

3） 原康夫：素粒子（朝倉書店，1980）

4) 九後汰一郎：ゲージ場の量子論 I , II (培風館, 1989)

5) T. Muta：*Foundations' of Quantum Chromodynamics* (World Scientific, 1987)

1)は少し古いが，すでに確立した部分について丁寧な説明がなされ，基礎知識を養うのに適したよい教科書である。2)は，本書とはある意味で重なるスタイルであり，相補的に読むと有益であろう。3)は本書に似た構成をとっており，本書と比較しながら一読するのも面白いだろう。4)は本書14章以下を深く理解したいという読者には最適な教科書と言えよう。5)は本書9章～11章を本格的に勉強しようという読者にすすめる。

素 粒 子 表

(Particle Properties Deta Booklet, June 1992 による)

粒 子 名	$I^G(J^P)C$	質 量 (MeV)	平均寿命 (sec) または全崩壊幅 Γ	主な崩壊過程
			ゲージボソン	
γ	0,1 $(1^-)-$		——	安 定
W		80220	Γ=2120 MeV	$e\nu$, $\mu\nu$, $\tau\nu$
Z		91173	Γ=2487 MeV	e^+e^-, $\mu^+\mu^-$, $\tau^+\tau^-$ $\nu\bar{\nu}$, ハドロン
			レ プ ト ン	
ν_e	$J=½$		安 定	安 定
e	$J=½$	0.511	安 定	安 定
ν_μ	$J=½$	<0.27	安 定	安 定
μ	$J=½$	105.66	2.197×10^{-6}	$e^-\bar{\nu}\nu$ (100)%
ν_τ	$J=½$	<35		
τ	$J=½$	1784.1	3.05×10^{-13}	$\mu^-\bar{\nu}\nu$ (17.58) $e^-\bar{\nu}\nu$ (17.93) ハドロン$^-$ (50.3) 3(ハドロン$^\pm$) (14.06)
			非ストレンジメソン	
$\pi^\pm$	$1^-(0^-)$	139.6	2.603×10^{-8}	$\mu^+\nu^-$ (100)%
π^0	$1^-(0^-)+$	135.0	0.84×10^{-16}	$\gamma\gamma$ (98.798) γe^+e^- (1.198)
η	$0^+(0^-)+$	548.8	Γ=1.19 keV	$\gamma\gamma$ (38.9) $3\pi^0$ (31.9) $\pi^+\pi^-\pi^0$ (23.6)
ρ(770)	$1^+(1^-)-$	769	Γ=151.5 MeV	$\pi\pi$ (~100)
ω(783)	$0^-(1^-)-$	782.6	Γ=8.43 MeV	$\pi^+\pi^-\pi^0$ (88.8) $\pi^0\gamma$ (8.5)
η'(958)	$0^+(0^-)+$	957.6	Γ=0.198 MeV	$\eta\pi\pi$ (64.7) $\rho^0\gamma$ (30.0)
J/ψ(1S)	$0^-(1^-)-$	3097	Γ=86 keV	e^+e^- (6.27) $\mu^+\mu^-$ (5.97) ハドロン (86.0)
ψ(2S)	$0^-(1^-)-$	3686	Γ=278 keV	e^+e^- (0.88) $\mu^+\mu^-$ (0.77) ハドロン (98.1)
ψ(3770)	?$(1^-)-$	3770	Γ=23.6 MeV	e^+e^- (0.00112) $D\bar{D}$ dominant
ψ(4040)	?$(1^-)-$	4040	Γ=52 MeV	e^+e^- (0.0014) ハドロン dominant
ψ(4160)	?$(1^-)-$	4159	Γ=78 MeV	e^+e^- (0.0010) ハドロン dominant

粒子名	$I^G(J^P)C$	質量 (MeV)	平均寿命 (sec) または全崩壊幅 Γ	主な崩壊過程
$\psi(4415)$	$(1^-)-$	4415	$\Gamma=43$ MeV	e^+e^- (0.0011) % ハドロン dominant
$\chi_{c0}(1P)$)	$0^+(0^+)+$	3415	$\Gamma=14$ MeV	$2(\pi^+\pi^-)$ (3.7) $\pi^+\pi^-K^+K^-$ (3.0)
$\chi_{c1}(1P)$	$0^+(1^+)+$	3510	$\Gamma=0.88$ MeV	$\gamma J/\psi(1S)$(27.3)
$\chi_{c2}(1P)$	$0^+(2^+)+$	3556	$\Gamma=2.00$ MeV	$\gamma J/\psi(1S)$(13.5)
$\Upsilon(1S)$	$(1^-)-$	9460	$\Gamma=52.1$ keV	$\mu^+\mu^-$ (2.48) e^+e^- (2.52) $\tau^+\tau^-$ (2.97)
$\Upsilon(2S)$	$?(1^-)-$	10023	$\Gamma=43$ keV	$\Upsilon(1S)\pi^+\pi^-$(18.5) $\Upsilon(1S)\pi^0\pi^0$(8.8) $\gamma\chi_{b1}(2P)$ (6.7) $\gamma\chi_{b2}(2P)$ (6.6)
$\Upsilon(3S)$	$(1^-)-$	10355	$\Gamma=24.3$ keV	$\Upsilon(2S)$ anything (10.9) $\Upsilon(1S)\ \pi^+\pi^-$ (4.48) $\gamma\chi_{b1}$ $(2P)$ (11.4) $\gamma\chi_{b2}$ $(2P)$ (11.3)
$\Upsilon(4S)$	$(1^-)-$	10580	$\Gamma=23.8$ MeV	e^+e^- (0.00101)
$\Upsilon(10860)$	$?(1^-)-$	10865	$\Gamma=110$ MeV	e^+e^- (2.8×10^{-4})
$\Upsilon(11020)$	$?(1^-)-$	11019	$\Gamma=79$ MeV	e^+e^- (1.6×10^{-4})
			ストレンジメソン	
$K^\pm$	½(0^-)	493.6	1.237×10^{-8}	$\mu^+\nu$ (63.51) $\pi^+\pi^0$ (21.17) $\pi^+\pi^+\pi^-$ (5.59)
K^0 $\overline{K}^0$	½(0^-)	497.7		50% K_{Short} ; 50% K_{Long}
$K_S{}^0$	½(0^-)		0.892×10^{-10}	$\pi^+\pi^-$ (68.61) $\pi^0\pi^0$ (31.39)
$K_L{}^0$	½(0^-)		5.17×10^{-8}	$\pi^0\pi^0\pi^0$ (21.6) $\pi^+\pi^-\pi^0$ (12.38) $\pi^\pm\mu^\mp\nu$ (27.0) $\pi^\pm e^\mp\nu$ (38.7)
$K^*(892)$	½(1^-)	891.6	$\Gamma=49.8$ MeV	$K\pi$ (~100)
			チャーム・非ストレンジメソン	
$D^\pm$	½(0^-)	1869	10.66×10^{-13}	K^- anything (20.8) K^0 anything (59) $e^\pm$ anything (17.2)
D^0 $\overline{D}^0$	½(0^-)	1865	4.20×10^{-13}	K^- anything (46) K^0 anything (42) $e^\pm$ anything (7.7)

粒子名	$I^G(J^P)C$	質量 (MeV)	平均寿命 (sec) または全崩壊幅 Γ	主な崩壊過程
		チャーム・ストレンジメソン		
$D_s^{\pm}$	$0(0^-)$	1968.8	4.50×10^{-13}	non $K\overline{K}$ anything (64) K anything (20)
		ボトムメソン		
$B^{\pm}$	$\frac{1}{2}(0^-)$	5278.6	12.9×10^{-13}	$D^0/\overline{D}^0$ anything (46) $e^{\pm}\nu$ hadrons (10.7) $D^-e^+\nu$ (1.8) $D^{*-}e^+\nu$ (4.9)
B^0 $\overline{B}^0$	$\frac{1}{2}(0^-)$	5278.7		
		非ストレンジバリオン		
p	$\frac{1}{2}(\frac{1}{2}^+)$	938.3	安定 ($>10^{32}$ y)	安定
n	$\frac{1}{2}(\frac{1}{2}^+)$	939.6	889.1 16	$pe^-\overline{\nu}$ (100)
Δ(1232)	$\frac{3}{2}(\frac{3}{2}^+)P_{33}'$	1230～1234	Γ=115～125 MeV	$N\pi$ (99.4) $N\gamma$ (0.6)
		S=−1 バリオン		
Λ	$0(\frac{1}{2}^+)$	1115.6	2.632×10^{-10}	$p\pi^-$ (64.1) $n\pi^0$ (35.7)
Σ^+	$1(\frac{1}{2}^+)$	1189	0.799×10^{-10}	$p\pi^0$ (51.57) $n\pi^+$ (48.30)
Σ^0	$1(\frac{1}{2}^+)$	1192	7.4×10^{-20}	$\Lambda\gamma$ (100)
Σ^-	$1(\frac{1}{2}^+)$	1197	1.479×10^{-10}	$n\pi^-$ (100)
$\Sigma(1385)P_{13}$	$1(\frac{3}{2}^+)$	(+)1382.8 (−)1387.2	Γ=35.8 Γ=39.4	$\Lambda\pi$ (88) $\Sigma\pi$ (12)
		S=−2 バリオン		
Ξ^0	$\frac{1}{2}(\frac{1}{2}^+)$	1315	2.90×10^{-10}	$\Lambda\pi^0$ (100)
Ξ^-	$\frac{1}{2}(\frac{1}{2}^+)$	1321	1.639×10^{-10}	$\Lambda\pi^-$ (100)
$\Xi(1530)P_{13}$	$\frac{1}{2}(\frac{3}{2}^+)$	(0)1531.8 (−)1535.0	Γ=9.1 MeV Γ=9.9 MeV	$\Xi\pi$ (100)
		S=−3 バリオン		
Ω^-	$0(\frac{3}{2}^+)$	1672	0.822×10^{-10}	ΛK^- (67.8) $\Xi^0\pi^-$ (23.6) $\Xi^-\pi^0$ (8.6)
		非ストレンジ・チャームバリオン		
Λ_c^+	$0(\frac{1}{2}^+)$	2284.9	1.91×10^{-13}	$pK^-\pi^+$ (3.2) $p\overline{K}^0$ (1.6) Λ anything (27)

訳者あとがき

本書は Francis Halzen and Alan D. Martin, Quarks and Leptons: An Introductory Course in Modern Particle Physics, 1983 (第 2 刷) の翻訳である。ユニークな内容で，学部レベルの高エネルギー物理学の教科書として最適と思われる。また，大学院初年級の学生諸君の入門書としても，手元に置いて，随時参考にすることができるだろう。

著者らは活発な研究活動を続けている高エネルギー物理の理論家であり，共に現象論研究者として高名である。日本人研究者にも多くの知己を持ち，とくに Halzen 氏は何回か来日し，共同研究や学会の特別講演，大学での集中講義も経験している。

本書が話題になったのは，1984 年 3 月，東京で開かれた International Symposium on Cosmic Rays and Particle Physics に Halzen 氏がやって来た時である。彼が，実はこんな本を書いたのだが，日本の学部学生のレベルは高いだろうから，それに適した内容の取捨選択をして姉妹版を書いてはどうか，と言うのである。それは大変な仕事なので願い下げにした。しかし，訳者らは，学部 4 年生の「高エネルギー物理学」の講義を担当しているが，なかなか手頃なレベルの教科書がなくて苦労していた。実験装置や測定器の話から始め，現在の実験の現状まで，さらに理論は，場の理論の基礎から始めて QCD や標準模型の計算まで，などということは 4 年生の 1 年間ではできない相談である。

やがて著者から送られてきた本書を見て，その簡にして要を得た理論と実験の解説と，実用主義に徹して，すぐに計算ができるように，というユニークな内容に感心した。私どもが年来考えていたものが，かなりの程度本書で満たされている。Halzen 氏は，もっと内容を精選して一書をと言ったが，これで十分ではないか。日本語にしたほうがより広く学生諸君に読んでもらえるだろう。

そんなわけで，著者に私どもの意向を伝えたところ，快諾され，本訳書が出来上がったわけである。

厳密にゲージ理論を定式化して，理論的基礎づけをした上で具体的な計算を，という向きには別の本が沢山ある。本書は，場の理論の知識がなくても，QCD, Weinberg-Salam 理論，大統一理論のあらましなどを，自分で計算してみながら定量的レベルで理解できるように書かれている。これは実用主義を一貫させた本書のユニークさである。こうして，高エネルギー素粒子現象を感覚的に身につけた上で，もっと深い厳密な理論の内容を学ぶのがよいのではないだろうか。

本書の出版後の理論の新しい方向，たとえば超対称理論などについて補足すべきかと考え，昨夏著者と会った折に相談した。しかし，本書の性格から時期尚早ということで意見が一致して，いろいろ補いたい点も少なくないが，すべて止めることにした。また，実験データに関しても，本質的に違わない限り，最新のものを挙げることはしなかった。文献に関しても同様である。

願うところは，学生諸君が，このような比較的やさしい教科書によって，できるだけ具体的に理論の内容を理解し，実際の場に当ったとき，定量的評価が容易にできるようなカンを養って頂きたいことである。

訳者の疑問に丁寧に答え，いろいろ示唆を頂いた著者お二人に改めて感謝したい。培風館編集部の黒田健治氏には終始お世話になった。同氏の熱心な励ましがなかったら，本書はとても完成しなかったであろう。厚くお礼申し上げる次第である。

1986 年 1 月　　　　訳　　者

索　引

あ　行

か　行

さ　行

た 行

な 行

は　行

ま　行

や　行

ら　行

わ　行

訳者略歴

小林 澈郎（こばやし てつろう）

1952年　東京文理科大学物理学科卒業
　　　　ペンシルヴェニア大学，
　　　　早稲田大学理工学研究所等を経て，
1973年　東京都立大学理学部教授
現　在　東京都立大学名誉教授
　　　　福井工業大学教授
　　　　理学博士
専　攻　高エネルギー物理学理論

著訳書

現代物理学概論（共訳，岩波書店）
電磁気学（訳，講談社）
素粒子と物理法則
　＝窮極の物理法則を求めて（訳，培風館）
電磁気学Ｉ・II
　＝新しい視点にたって（共訳，培風館）

広瀬 立成（ひろせ たちしげ）

1967年　東京工業大学理工学部物理学科
　　　　博士課程終了
　　　　東京大学原子核研究所素粒子
　　　　研究所準備室，
　　　　ハイデルベルク大学高エネルギー
　　　　研究所等を経て，
現　在　東京都立大学理学部教授，
　　　　理学博士
専　攻　高エネルギー物理学実験

著訳書

EとH，DとB（物理学ワンポイント，共立出版）
相対性理論講義（訳，東京図書）
図説物理学（共著，丸善）
現代物理への招待
　＝宇宙・物質・生命の起源を探る（著，培風館）
超ひも理論と「影の世界」
　　　　（ブルーバックス，講談社）
モノポール（ブルーバックス，講談社）

1986 年 4 月 5 日　初 版 発 行
1995 年 9 月 20 日　初版第 9 刷発行

クォークとレプトン
—現代素粒子物理学入門—

原著者　F. ハルツェン
　　　　A. D. マーチン
訳　者　小 林 澈 郎
　　　　広 瀬 立 成
発行者　山 本　格

発 行 所　株式会社　培　風　館
東京都千代田区九段南 4 - 3 -12・郵便番号102
電話(03)3262-5256(代表)・振替00140-7-44725

寿 印刷・三水舎 製本

PRINTED IN JAPAN

ISBN4-563-02171-7 C3042

運動学

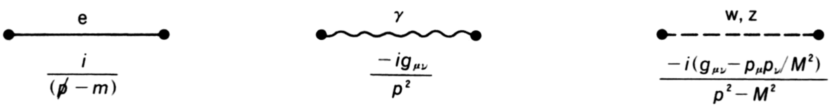
Lorentz 不変位相体積 $(P \to p_1 + \cdots + p_n)$

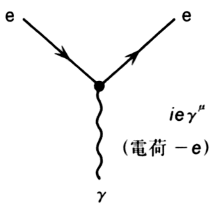
$$d\Omega = (2\pi)^4 \delta^4 (P - p_1 - \cdots - p_n) \prod_{i=1}^{n} \frac{d^3 p_i}{(2\pi)^3 2E_i}$$

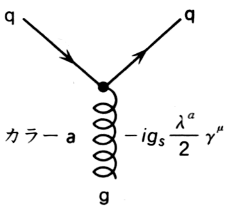
散乱： $\left.\frac{d\sigma}{d\Omega}\right|_{\mathrm{cm}} = \frac{1}{64\pi^2 s} \frac{p_f}{p_i} |\mathcal{M}|^2$ 　　崩壊： $d\Gamma(A \to 1 + \cdots + n) = \frac{|\mathcal{M}|^2}{2m_A} d\Omega$

$-i\mathcal{M}$ に対する Feynman 則

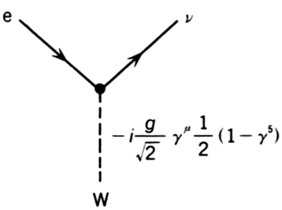


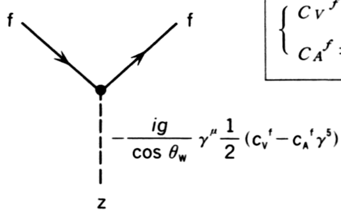






$$\begin{cases} \alpha_s = \dfrac{g^2}{4\pi} \\ \quad = \dfrac{12\pi}{(33 - 2n_f) \log (Q^2 / \Lambda^2)} \end{cases}$$





$$\begin{cases} c_V{}^f = T_f{}^3 - 2\sin^2\theta_W Q_f \\ c_A{}^f = T_f{}^3 \end{cases}$$

f	Q_f	$(T_f{}^3)_L$	$(T_f{}^3)_R$
u, c, t	2/3	1/2	0
d, s, b	−1/3	−1/2	0
ν_e, ν_μ, ν_τ	0	1/2	—
e^-, μ^-, τ^-	−1	−1/2	0

$\sin^2\theta_W \simeq 0.23$, $g \sin\theta_W = e$, $G = \frac{\sqrt{2}\, g^2}{8M_W^2} \simeq 1.17 \times 10^{-5}\,\mathrm{GeV}^{-2}$

公式・定数表

$$\hbar = 6.58 \times 10^{-25}\ \mathrm{GeV \cdot sec} = 1$$

$$\hbar c = 0.197\ \mathrm{GeV \cdot fm} = 1$$

$$(1\ \mathrm{GeV})^{-2} = 0.389\ \mathrm{mb}$$

$$\alpha = \frac{e^2}{4\pi} = \frac{1}{137}$$

$$x^\mu = (t, \boldsymbol{x}), \qquad p^\mu = (E, \boldsymbol{p}) = i(\partial/\partial t,\ -\nabla) = i\partial^\mu,$$

$$p \cdot x = Et - \boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{x}, \qquad p^2 \equiv p^\mu p_\mu = E^2 - \boldsymbol{p}^2 = m^2,$$

$$(\Box^2 + m^2)\phi = 0, \qquad (i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi = 0.$$

電磁場内では，$i\partial^\mu \rightarrow i\partial^\mu + eA^\mu$(電荷$-e$)

$$j^\mu = -ie(\phi^* \partial^\mu \phi - \phi \partial^\mu \phi^*), \qquad j^\mu = -e\bar{\psi}\gamma^\mu \psi$$

γ 行列

$$\gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = 2g^{\mu\nu}, \qquad \gamma^{\mu\dagger} = \gamma^0 \gamma^\mu \gamma^0.$$

$$\gamma^{0\dagger} = \gamma^0, \qquad \gamma^0 \gamma^0 = I; \qquad \gamma^{k\dagger} = -\gamma^k, \qquad \gamma^k \gamma^k = -I, \qquad k = 1,2,3.$$

$$r^5 = i\gamma^0 \gamma^1 \gamma^2 \gamma^3, \qquad \gamma^\mu \gamma^5 + \gamma^5 \gamma^\mu = 0, \qquad \gamma^{5\dagger} = \gamma^5.$$

(130, 271 頁のトレース定理)

標準的な表示：

$$\gamma^0 \equiv \beta = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{\gamma} \equiv \beta \boldsymbol{\alpha} = \begin{pmatrix} 0 & \boldsymbol{\sigma} \\ -\boldsymbol{\sigma} & 0 \end{pmatrix}, \qquad \gamma^5 = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix}$$

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

スピノール

$$(\not{p} - m)u = 0 \qquad \begin{cases} \bar{u} \equiv u^\dagger \gamma^0 \\ \not{p} \equiv \gamma_\mu p^\mu \end{cases}$$

$$\bar{u}(\not{p} - m) = 0$$

$$u^{(r)\dagger} u^{(s)} = 2E\delta_{rs}, \qquad \bar{u}^{(r)} u^{(s)} = 2m\delta_{rs}, \qquad \sum_{s=1,2} u^{(s)} \bar{u}^{(s)} = \not{p} + m = 2m\Lambda_+$$

$$\frac{1}{2}(1 - \gamma^5)u \equiv u_{\mathrm{L}}, \qquad \frac{1}{2}(1 + r^5)u \equiv u_{\mathrm{R}}.$$

もし $m=0$ あるいは $E \gg m$ ならば，u_{L} はヘリシティー $\lambda = -1/2$，u_{R} は $\lambda = +1/$ である。